BROWN BOOK

فہرست مطالب

صفحہ

باب اول بیان حدود کا ۱

فصل اول قاعدہ جمع کا ۵

فصل دوسری قاعدہ تفریق کا ۱۰

فصل تیسری قاعدہ ضرب کا ۱۲

فصل چوتھی قاعدہ تقسیم کا ۲۵

باب دوسرا بیان کسور کا فصل اول بیچ اختصار کے ۲۶

دوسری فصل تحویل کسور ۳۰

تیسری فصل قاعدہ جمع کسور کا ۳۱

چوتھی فصل قاعدہ تفریق کسور کا ۳۴

پانچوین فصل قاعدہ ضرب کسور کا ۳۶

چھٹی فصل قاعدہ تقسیم کسور کا ... ۳۷

فصل قاعدہ نکالنی جذر کا ... ۳۸

فصل قاعدہ نکالنی کعب کا ۴۴

تیسرا باب بیان مساوات مین ۴۶

بیان مساوات اول درجہ کا ۴۷

بیان مساوات درجہ دوم کا ۸۹

بیان مقدار غیر ممکن کا ۱۴۶

بیان تناسب کا ۱۴۷

قاعدہ سلسلہ جمع اور تفریق کا ... ۱۴۸

قاعدہ سلسلہ ضرب اور تقسیم کا ۱۴۹

سوالات اول درجہ کی مساوات کی ۱۵۰

سوالات درجہ دوم کی مساوات کی ۱۶۶

ان نئے قاعدہ ضرب اور تقسیم کا ۱۷۶

بیان دوسرا قاعدہ تقسیم کا ۱۷۷

بیان تیسرا قیاسی قاعدہ تقسیم مین ۱۷۸

فصل دوم بیان خواص مساوات کا ۱۸۱

فصل سویم بیچ بیان تبدیل کرنی مساواتوں کے ۱۹۱

فصل چہارم بیچ بیان دریافت کرنی قیمتون غیر ممکن مساوات کے بوسیلہ قاعدہ ہندسی بودن کے ... ۲۰۹

بیان دوسرا قاعدہ ہندسی ویکوا کا واسطی دریافت کرنی قیمتون غیر ممکن مساواتون کے ۲۱۱

فصل پنجم بیان قاعدہ ہندسی کارڈن کا واسطی حل کرنے مساواتون تیسری مرتبہ کے ۲۱۲

فصل ششم بیان قاعدہ ہندسی کمپلی کا واسطے تحویل کرنی مساواتون چوتھی درجہ کی طرف مساواتون تیسری درجہ کی ۲۱۵

فصل ہفتم بیان ان قواعد کا جنکی ذریعہ سی تقریبی قیمتین سب درجونکی مساواتونکی معلوم ہوسکتی ہین ۲۱۹

باب چہارم مطالب مختلفہ فصل اول ترتیب اور اجتماع کے بیان مین ۲۲۵

فصل دوسری ثبوت ضابطہ نیوٹن صاحب کا ۲۳۱

بیان طریق ثابت کرنی ضابطہ نیوٹن صاحب کا دوسری طرح سیے ۲۳۶

بیان اثبات ضابطہ نیوٹن صاحب کا بغیر مدد سلسلہ فرضی سیے ۲۴۰

ضابطہ غیر مقررہ نشان قوت کا ۲۴۹

فصل تیسری لوگارتم کی بیان مین ۲۵۰

لوگارتم کی نکالنی کی ترکیب ۲۵۲

ترکیب بنانی لوکارثم کی کتاب کی ٢٥٣
فصل ٤ بیان حل کرنی سوالات ہندسی کا بوسیلہ جبر ومقابلہ کے ٢٥٥
سوالات مثلثون کے ٢٥٦
فصل پانچوین حد زیادتی اور کمی کی بیان مین ٢٦٩
چھٹی فصل مساحت دائرہ اور مجسم بیان مین
ساتوین فصل مقدار نزولی کا بیان ٢٩٣
اٹھوین فصل سلسلون کے بیان مین قاعدہ فرق ٣٠٣
نوین فصل قاعدہ سلسلہ زیادتیون کا ٣٠٩
دسوین فصل معکوس کرنا سلسلہ کا ٣٢٠
گیارہوین فصل سلسلہ متواتر ٣٢٤
ضابطہ کثیر الاجزاء ٣٢٨
بارہوین فصل احتمالات کا بیان ٣٤٠
تیرہوین فصل کسور ٣٤٢
مقادیر جبریہ کی عجیب نتیجی ٣٤٦
کسور متسلسل ٣٤٧
ثبوت مقسوم علیہ اعظم ٣٥٢
سود اور تنخواہون کے بیان ٣٥٦
دریافت کرنا زیادتی کسی ملک کا بوسیلہ تعداد مرنے اور پیدائش کے ٣٥٩
ثبوت قواعد جذر وکعب اعداد ٣٦٠
خواص اعداد کا بیان ٣٦٤
سوالات غیر منقطع ایک مساوات کی ٣٧١
سوالات غیر منقطع دو مساواتون کے ٣٧٥
خاص ترکیب لا ٢ + ا کے صحیح مجذور ہو جانے کی ٣٧٩

سوالات مجذورون کے ٣٩٦
مثلثات صحیحہ کی دریافت کرنیکی ترکیب ٤١٤
سوالات مختلفہ ٤٢١
ضمیمہ مشکل مساواتون کا ٤٣٥

اور اگلی چالیس صفحون مین تمام مطالب کی مثالین بغیر حل کی ہوئی وڈ صاحب کی جبر ومقابلہ سی نقل کی ہین

جمع کی مثالین ٤٦١
تفریق کی مثالین ایضاً
ضرب کی مثالین ٤٦٢
تقسیم کی مثالین ٤٦٤
مقسوم علیہ اعظم کی مثالین ٤٦٥
ضعف مشترک کی مثالین ٤٦٧
کسور کی مثالین ٤٦٨
کسور کی اختصار کی مثالین ٤٦٩
ضرب کسور کی مثالین ٤٧١
تقسیم کسور کی مثالین ٤٧٢
صعود اور نزول کی مثالین ٤٧٣
مقادیر نزولی کی مثالین ٤٧٥
مساواتین بغیر حل کی ہوئی ٤٧٧ تا آخر

تمت

دیباچہ

بسم اللہ الرحمن الرحیم

بعد حمد خدا اور نعت رسول مقبول محمد مصطفے صلے اللہ علیہ وسلم کے ارباب علم پر واضح ہو کہ اس سے پہلے ایک جبر و مقابلہ مولفہ اوستادی مخدومی مکرمی جناب ماسٹر رامچندر صاحب کا چھپا تہا چونکہ اوسمین مطالب بہت مفید اور دلچسپ تہے اس سبب سے لوگون کو اوسکے پڑہنے سے اس فن کی طرف بہت رغبت ہوئی اور جسقدر نسخہ جبر و مقابلہ کے چھپے تہے سب بک گئے اکثر آدمی اوسکے مشتاق تہے اسواسطے جناب ماسٹر صاحب نے مجھہ کمترین کو کہ نام میرا کریم بخش ہی اور مین اودنے ترین اونکے شاگردون مین سے ہون ارشاد فرمایا کہ ایک جبر و مقابلہ مرتب کرنا چاہیے جسمین جمیع مطالب پہلے جبر و مقابلہ کے بہی ہون اور مثالین ہر قاعدہ کے بہت بہت لکہی جائین اور بعضے اور مطالب مفیدہ بہی اوسمین زیادہ کئے جائین سو اسواسطے اس کمترین نے یہہ جبر و مقابلہ مرتب کیا اور جو مطالب مفیدہ تہے جناب ماسٹر صاحب کی صلاح سے اوسمین داخل کئے اگر اسمین کسی جگہہ غلطی ہوئی ہو تو کمترین کے قصور فہم کو معاف فرما کر درست کر دین اور اس جبر و مقابلہ مین مطالب ان کتابون سے جمع کئے ہین — وڈ صاحب کا جبر و مقابلہ بلینڈ صاحب کا جبر و مقابلہ بیج الجبرا اولر الجبرا اور کتابین اس فن کی جو انگریزی زبان مین مشہور ہین

باب اول حدود

واضح ہو کہ جبر و مقابلہ ایک فرع علم ریاضی کی جس سے فنون ریاضیہ کے اکثر مسائل حل ہوتے ہین اور اس علم مین بجاے اعداد کے حروف فرض کئے جاتے ہین اور اون پر عمل ضرب تقسیم وغیرہ کے کئے جاتے ہین اور جسطرح حساب مین اعداد کے ضرب تقسیم وغیرہ پر مجہول کا نکالنا موقوف ہی اسیطرح یہان بہی ضرب تقسیم وغیرہ پر اعمال جبریہ موقوف ہین

اب جاننا چاہیے کہ جبر و مقابلہ مین بجاے اعداد مجہول کے حروف لا ر د ز وغیرہ فرض کرتے ہین اور بجاے
مقادیر معلومہ کے حروف ح ص س ط ع وغیرہ فرض کرتے ہین اور جبر و مقابلہ کے تمام عملون مین علامتون
مقررہ کا استعمال ہوتا ہی اسیواسطے ہم پہلے اون علامتونکا بیان کرتے ہین جاننا چاہیے کہ صورت + جمع کی
علامت ہی یعنے جن دو مقدارون کے درمیان مین یہہ علامت آوے تو جاننا چاہیے کہ وہ دونون مقدار باہم جمع کی
جاینگی مثلاً ۲ + ۳ سے یہہ مراد ہی کہ ۲ کو ۳ کے ساتھہ جمع کرلین یعنے ۲ + ۳ سے ۵ مراد ہین
علی ہذا القیاس لا + ر سے بہی یہی مراد ہی کہ لا کو ر کے ساتھہ جمع کرلین یہہ بہی واضح ہو کہ جب بہت سی
مقدار لکہین اور اول مقدار کی علامت + ہو تو اس علامت کو چہوڑکر اول مقدار کو بےعلامت لکہہ دیتے
ہین پس جب کوئی مقدار اول مین ایسی ہو کہ اوسکے پہلے کوئی علامت نہو تو جاننا چاہیے کہ اوسکے اول مین علامت
+ کی منوی ہی جس مقدار کی اول علامت + کی لکہی ہوئی ہو یا محذوف ہو اوس مقدار کو مثبت کہتے ہین

— صورت − کی تفریق کی علامت ہی یعنے جن دو مقدارونکے درمیان مین علامت − کی واقع ہو تو
جاننا چاہیے کہ اول مقدار مین سے دوسری مقدار نکالی جاوے گی مثلاً ۴ − ۲ سے یہہ مراد ہی کہ ۴ مین سے
۲ کو نکال لین یعنے ۴ − ۲ سے ۲ مراد ہی اسیطرح لا − ر سے یہہ مراد ہی کہ لا مین سے ر کو نکالنا
چاہیے جس مقدار کے اول علامت تفریق ہوتی ہی اوس مقدار کو منفی کہتے ہین کیونکہ یہہ مقدار نفی کی جاتی
مثلاً ۴ − ۳ مین ۴ مثبت ہی اور ۳ منفی علی ہذا القیاس لا − ر مین لا مثبت اور ر منفی

— صورت × علامت ضرب کی ہی یعنے جن دو مقدارون مین علامت × واقع ہو اوس سے یہہ مراد
ہوتی ہی کہ یہہ دونو مقدار باہم ضرب دئے گئے ہین مثلاً ۵ × ۴ سے حاصل ضرب ۵ اور ۴ کا
تعبیر ہوتا ہی یعنے ۵ کو ۴ مین ضرب کرنا چاہیے پس ۵ × ۴ سے ۲۰ مراد ہین اسیطرح لا × ر سے
یہہ مراد ہی کہ لا کو ر مین ضرب دینا چاہیے یعنے لا × ر حاصل ضرب لا اور ر کا ہی پوشیدہ نرہے
کہ جب دو حرف کو آپسمین ضرب کرتے ہین تو اونکے حاصل ضرب کو بے علامت ضرب کی لکہہ دیتے ہین
یعنے حاصل ضرب لا اور ر کا اسطور پر لار لکہتے ہین اس صورت مین لا اور ر کے درمیان مین علامت
× ضرب کی نہین لکہی لیکن لار سے وہی مراد ہی جو لا × ر سے ہی جسطرح حرف کو حرف مین ضرب کرکر
بے نشانی ضرب کے شامل کردیتے ہین اسیطرح عدد کو حرف مین ضرب کرین تو بے نشانی ضرب
کے لکہنا چاہیے مثلاً ۷ کو لا مین ضرب کرین تو ۷لا لکہنا چاہیے اور اگر ۴ کو د مین ضرب کرین
تو ۴د لکہنا چاہیے لیکن اس صورت مین اسبات کا لحاظ ضرور ہی کہ عدد ہمیشہ حرف کے پہلے لکہا
جاوے جب کوئی عدد حرف مین ضرب کیا جاتا ہی تو اوس عدد کو اوس حرف کا سر کہتے ہین ۷ لامین

مین عدد ۷ کا سر لا کا ہی اور ۴ دین عدد ۴ کا سر د کا ہی بیان بالا سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اگر لا کو لا مین
ضرب کرین تو حاصل ضرب اس صورت سے لا لا کا لکھا جاویگا یعنے لا کو فی نفسہ ضرب کرنیسے لا لا حاصل ہوتا ہے
اور یہہ بات ظاہر ہی کہ جب ایک مقدار کو فی نفسہ ضرب کرتے ہین تو حاصل ضرب کو مجذور اوس مقدار کا
کہتے ہین مثلا ۴ کو ۴ مین ضرب کرین تو حاصل ضرب ۱۶ ہوتا ہی پس ۱۶ کو مجذور ۴ کا کہتے ہین اس سے معلوم
ہوا کہ لا کو لا مین ضرب کیا تو حاصل ضرب لا لا ہوا اور لا لا مجذور لا کا ہی بعینہ اسیطرح ط ط مجذور ط کا ہی
اب یہہ بہی ظاہر ہی کہ جسوقت لا لا کو لا مین ضرب کرینگے تو موافق بیان سابق کے لا لا لا ہوگا اور جب کسی
مقدار کے مجذور کو اوسی مقدار مین ضرب کرین تو حاصل ضرب مکعب اوس مقدار کا ہوتا ہی تو معلوم ہوا کہ لا لا لا
مکعب لا کا ہی کسواسطے کہ لا لا مجذور لا کا تہا اور جب اس مجذور کو لا مین ضرب کیا تو لا لا لا ہوا پس لا لا لا
مکعب لا کا ہی اب چونکہ مجذور لا کا لا لا ہی اور اسمین لا دو دفعہ پایا جاتا ہی اسواسطے جبر و مقابلہ مین اختصار
کے واسطے لا لا کو لا^{۲} لکہتے ہین یعنے بجاے دو لا لکہنے کے دو کا ہندسہ لا کے اوپر لکہہ دیتے ہین
اور لا^{۲} کو لا کے دوسری قوت کہتے ہین علی ہذا القیاس لا لا لا کو جو مکعب لا کا ہی لا^{۳} لکہتے ہین اور لا^{۳} کو لا کے
تیسری قوت کہتی ہین اور اسیطرح لا^{۴} اور لا^{۵} وغیرہ لکہے جاتے ہین اور ان کو چوتہی قوت اور پانچوین قوت
لا وغیرہ سے تعبیر کرتے ہین اور ان اعداد کو جو حروف کے اوپر لکہے جاتے ہین نشان قوت کہتے ہین جاننا چاہیے
کہ سواے × کے علامت ضرب کی اور بہی ہین یعنے خطوط ( ) اور { } بہی علامتین
ضرب کی ہین اور ان خطوط کو خطوط وحدانی کہتے ہین مگر ان علامتون کے استعمال مین فرق ہی اور وہ یہہ ہے
کہ جب کئی مقدارین اور کئی مقدارون مین ضرب کی جاوین یا کئی مقدارین ایک ہی مقدار مین ضرب کی جاوین
تو اول صورت مین مضروب اور مضروب فیہ کو ان خطوط کے اندر لکہہ کر دونو کو بے علامت ضرب کے شامل
کر دیتے ہین مثلا مجموعہ لا اور د کا حاصل تفریق ط اور د مین ضرب کیا جاوے تو ظاہر ہی کہ مجموعہ لا اور د کا
اسطرح لا + د لکہا جاوے گا اور حاصل تفریق ط اور د کا اسطرح ط − د لکہا جاویگا پس موافق بیان
بالا کے اس مجموعہ اور حاصل تفریق کا حاصل ضرب اسطرح (لا + د) (ط − د) یا اسطرح
{لا + د} {ط − د} لکہا جاویگا اور دوسری صورت مین یعنے جسوقت کئی مقدارین ایک
مقدار مین ضرب دی جاوین تو انکی حاصل ضرب کو اسطرح لکہتے ہین (لا + د) ط یعنے مجموعہ لا اور د کا
ط مین ضرب کیا ہوا ہی یا اسطرح {ط − لا} د لکہا جاتا ہی یعنے حاصل تفریق ط اور لا کا د مین ضرب
کیا ہوا ہی اگر مجموعہ لا اور د یعنے لا + د کو حاصل تفریق ط − د مین ضرب کرین تو حاصل ضرب کو
اسطرح بہی لا + د × ط − د لکہتے ہین اور علی ہذا القیاس اور صورتین بہی اسطرح لکہی جاتی ہین ہمنے

پہلے بیان کیا ہی کہ مجذور لا کا اسطرح لا^{2} لکہا جاتا ہی اور مکعب لا کا اسطرح لا^{3} اور علی ہذا القیاس اب
جاننا چاہیے کہ کسی مقدار کے دوسری مرتبہ کے نزول کو جذر اوس مقدار کا کہتے ہین مثلاً ۱۶ کا جذر ۴ ہے
یعنے عدد ۴ کا ۱۶ مین کا ایسا جز ہی کہ اگر اوسکو فی نفسہ ضرب کرین تو حاصل ضرب ۱۶ ہوتا ہی اسیطرح
لا^{2} کا جذر لا ہی کیونکہ لا کو لا مین ضرب کرین تو حاصل ضرب لا^{2} ہی پس جب معلوم ہوا کہ جذر دوسرے
مرتبہ کا نزول ہوتا ہی تو اسیلئے جبر و مقابلہ مین جذر کی نشانی $\frac{1}{2}$ ہے یعنی جس مقدار کا جذر لینا ہوتا ہے
اوسپر $\frac{1}{2}$ لکہہ دیتی ہین مثلاً لا کا جذر اسطرح $\text{لا}^{\frac{1}{2}}$ لکہتے ہین اور ط کا جذر اسطرح $\text{ط}^{\frac{1}{2}}$ اور ر کا جذر اسطرح
$\text{ر}^{\frac{1}{2}}$ اور لا اور ط کے مجموعہ کا جذر اسطرح $(\text{لا} + \text{ط})^{\frac{1}{2}}$ لکہتے ہین علی ہذا القیاس $(\text{ر} - \text{د})^{\frac{1}{2}}$ سی
جذر حاصل تفریق ر اور د کا تعبیر ہوتا ہی اور $(\text{ط} + \text{لا} + \text{س})^{\frac{1}{2}}$ سے جذر تین مقدارون ط اور لا
اور س کے مجموعہ کا تعبیر ہوتا ہی اسیطرح اور صورتین لکہی جاتی ہین واضح ہو کہ جذر کے واسطے سواے
علامت مذکورہ بالا کے اور بہی ہی اور وہ علامت یہہ خط $\sqrt{}$ خاص صورت کا ہی پس $\sqrt{\text{لا}}$ سے
جذر لا کا تعبیر ہوتا ہی اور $\sqrt{\text{لا} + \text{ط}}$ سے جذر مجموعہ لا اور ط کا تعبیر ہوتا ہی اگر ط^{2} اور ۲ ط لا کے مجموعہ کا
جذر لکہین تو اسطرح $\sqrt{\text{ط}^{2} + 2\,\text{ط لا}}$ لکہنا چاہیے اور اگر ص^{2} اور ۳ ط لا کے حاصل تفریق کا جذر لکہنا
منظور ہو تو اسطرح $\sqrt{\text{ص}^{2} - 3\,\text{ط لا}}$ لکہنا چاہیے ظاہر ہی کہ کسر مین دو مقدار لکہی جاتے ہین ایک تو شمار کنندہ
اور ایک نسب نما مثلاً $\frac{1}{2}$ مین ۱ شمار کنندہ ہی اور ۲ نسب نما اسیطرح $\frac{\text{لا}}{\text{ط}}$ مین لا شمار کنندہ ہی اور ط
نسب نما اگر لا کی تہائی لکہتے ہو تو اسطرح $\frac{\text{لا}}{3}$ لکہنے چاہیے اور اگر لا کا پانچوان حصہ لکہین تو $\frac{\text{لا}}{5}$ لکہنا
چاہیے اور علی ہذا $\frac{\text{لا}}{\text{ط}}$ کو لا تقسیم کیا ہوا ط پر کہتے ہین — یہہ صورت = مساوات کی علامت
ہی یعنے جن مقدارون کے درمیان مین یہہ علامت ہو تو جاننا چاہیے کہ وہ مقادیر باہم برابر ہین مثلاً
$4 = 4$ سے مراد ہی کہ ۴ برابر ہی ۴ کے اور علی ہذا القیاس $\text{لا} = \text{لا}$ سے یہہ مراد ہی کہ لا برابر ہے
لا کے اگر یہہ لکہنا منظور ہو کہ مجموعہ لا اور ر کا برابر ہی ۱۲ کے تو اسکو اسطرح $\text{لا} + \text{ر} = 12$
لکہنا چاہیے اگر یہہ لکہنا منظور ہو کہ دو چند لا مین سے ۳ کا عدد نکال ڈالین تو باقی برابر ۱۰ کے
ہی تو اسطرح $2\,\text{لا} - 3 = 10$ لکہنا چاہیے اگر یہہ لکہنا منظور ہو کہ ایک عدد مجہول لا ایسا ہی کہ
اگر اسکو تگنا کرکے اوسمین سے ۵ نکال ڈالین تو سات باقی رہی ہین تو اسکو اسطرح
$3\,\text{لا} - 5 = 7$ لکہنا چاہیے اور علی ہذا القیاس اور صورتین لکہی جاتی ہین اسکا بیان انشاء اللہ تعالے
مساوات کے بیان مین بخوبی کیا جاویگا — اگر یہہ لکہنا منظور ہو کہ عدد ۱ کا ۲ سے وہ نسبت
رکہتا ہی جو عدد ۴ کا ۸ سے نسبت رکہتا ہی تو اسکو اسطرح لکہتے ہین $1 : 2 :: 4 : 8$ یعنے

یعنے نقاط : :: : تناسب کی علامت ہین پس اگر یہہ صورت ہو لا : ط :: ص : س تو اسکو
الفاظ مین اسطرح تعبیر کرین گے کہ لا کو ط سے وہ نسبت ہی جو ص کو س سے ہی یعنے جسقدر مقدار
لا کے ط سے زیادہ ہی اوسیقدر مقدار ص کی س سے زیادہ ہی یا جسقدر لا ط سے کم ہی اوسیقدر
ص س سے کم ہی اگر یہہ بات لکہنی منظور ہو کہ (لا اور د ایسے دو عدد ہین کہ انمین وہ نسبت ہی جو
۳ اور ۴ مین ہی) تو اسکو اسطرح لکہنا چاہئے لا : د :: ۳ : ۴ — اگر یہہ لکہنا ہو کہ
لا اور د ایسے دو عدد مین کہ انکے مجذورون مین وہ نسبت ہی جو س اور ص مین ہی تو اسطرح
لکہنا چاہئے لا^{2} : د^{2} :: س : ص سے اور علی ہذ القیاس اور مثالین ہو سکتے ہین ÷
علامت تقسیم کی ہی مثلا د ÷ لا سے یہہ مراد ہی کہ د کو لا پر تقسیم کرنا چاہئے اور اسیطرح لا + د ÷
لا سے یہہ مراد ہی کہ مجموعہ لا اور د کو لا پر تقسیم کرنا چاہئے ∴ یہہ تین نقطہ بجاے (اسیواسطے)
لکہے جاتے ہین یعنے جس جگہہ لفظ اسیواسطے لکہنا ضرور ہوتا ہی وہان ∴ یہہ تین نقطہ لکہہ دیتے ہین

فصل اول قاعدہ جمع اب ہم جمع کا قاعدہ لکہتے ہین لیکن چونکہ اسمین لفظ مقدار متماثلہ کا مستعمل
ہوگا اسواسطے اوسکے معنے بیان کرتے ہین سا ننا چاہئے کہ مقادیر متماثلہ اون مقدارون کو کہتے ہین
جو باہم جمع ہو سکین یا اون مین باہم تفریق ہو سکے مثلا ۴ لا اور ۲ لا مقادیر متماثلہ مین
کیونکہ ۴ لا اور ۲ لا کو جمع کرین تو ۶ لا ہوتے ہین اور ۴ لا مین سے ۲ لا کو نکال ڈالین تو ۲ لا
رہتے ہین اسیطرح ۷ لا د اور ۳ لا د مقادیر متماثلہ مین کیونکہ ۷ لا د لا اور د کے
حاصل ضرب کا سات گنا ہی اور ۳ لا د اوسی حاصل ضرب کا تگنا ہی پس اگر ۷ لا د کو ۳ لا د
کے ساتہہ جمع کرین تو ۱۰ لا د ہوتے ہین اور اگر ۷ لا د مین سے ۳ لا د نکال ڈالین تو
۴ لا د رہتے ہین بعینہ اسیطرح ۴ س اور ۲ س مقادیر متماثلہ ہین اور ۱۰ ص^{2} اور ۲ ص^{2}
بہی مقادیر متماثلہ ہین اور ۷ لا^{3} اور ۵ لا^{3} بہی مقادیر متماثلہ ہین اور ۳ (لا + د) اور
۲ (لا + د) مقادیر متماثلہ ہین کیونکہ ۳ (لا + د) لا اور د کے مجموعہ کا تگنا ہی اور
۲ (لا + د) لا اور د کے مجموعہ کا دوگنا ہی پس اگر ۳ (لا + د) کو ۲ (لا + د) کے ساتہہ
جمع کرین تو ۵ (لا + د) ہوتے ہین اسیطرح ۳ √لا اور ۲ √لا مقادیر متماثلہ مین کیونکہ اول
مقدار لا کے جذر کا تگنا ہی اور دوسری مقدار لا کے جذر کا دوگنا ہی پس اگر ۳ √لا اور ۲ √لا
کو باہم جمع کرین تو ۵ √لا ہوتا ہی اور اگر باہم تفریق کرین تو √لا رہتا ہی علے ہذ القیاس
۵ √(۲ لا + لا^{2}) اور ۲ √(۲ لا + لا^{2}) بہی مقادیر متماثلہ ہین کیونکہ انمین سواے اعداد ۵ اور ۲ کے

جو انکی سرین اوپر کوئی فرق نہین پس انکا مجموعہ ۷ ہ(۲لا + لا۲) ہوتا ہی اور حاصل تفریق ۳ ہ(۲لا + لا۲) ہوتا ہے
چونکہ جذر کا نشان (√) بھی ہی تو ظاہر ہی کہ (۲لا + لا۲)^½ اور ۲(۲لا + لا۲)^½ بھی
مقادیر متماثلہ ہین کیونکہ ۵(۲لا + لا۲)^½ ، √(۲لا + لا۲) کے جذر کا پانچ گنا ہی اور ۲(۲لا + لا۲)^½
اوسی مقدار کے جذر کا دوگنا ہی پس مجموعہ انکا ۷(۲لا + لا۲)^½ ہی اور حاصل تفریق ۳(۲لا + لا۲)^½
ہی جاننا چاہیے کہ جسطرح اعداد کے جمع کرنے مین ترتیب اکائی اور دہائی کے ملحوظ ہوتی ہی جبر و مقابلہ مین
اوس ترتیب کا خیال نہین کیا جاتا اور جن مقدارون کا جمع کرنا مطلوب ہوتا ہی اونکو اوپر نیچے بے لحاظ ترتیب کے
لکہہ دیتے ہین یہہ بات ظاہر ہی کہ مقادیر جبریہ جنکا جمع کرنا مطلوب ہی تین طرح پر واقع ہو سکتے ہین یا تو سب
مقادیر متماثلہ ہون یا سب مقادیر غیر متماثلہ ہون یا مقادیر متماثلہ اور غیر متماثلہ ملے ہوئے ہون اور علامتین انکے
یا تو یکسان ہونگی یا مختلف یعنے ان سب کے اول مین یا تو علامت جمع کی ہوگی یا علامت تفریق کی ہوگی یا کسی کے
اول مین علامت تفریق کے اور کسی کے اول مین علامت جمع کی ہوگی پس جمع کا قاعدہ یہہ ہی کہ (صورت اول)
اگر مقادیر متماثلہ ہون اور اونکی اول مین علامتین یکسان ہون تو اون سب کے نیچے ایک خط عرضی کہنچکر پہلے
اوس علامت کو لکہین جو اونکے اول مین ہی بشرطیکہ وہ علامت کی جمع نہو کیونکہ اول مین جمع کی علامت
نہین لکہی جاتی بعد اسکے اون مقدارون کے اول مین جو اعداد ہون اونکو جمع کرکر علامت کے آگے لکہہ دین
اور اسکے آگے مقدار جبریہ یا حروف ثبت کر دین مثلاً

۳ لا
۲ لا
۶ لا
———
۱۱ لا

یہہ سب مقادیر متماثلہ مین اور ان سب کے اول علامت جمع کی ہی پس موافق قاعدہ بالا کے علامت کا لکہنا ضرور نہین انکے
اعداد کو جمع کیا تو ۱۱ ہوتے ہین اور ۱۱ کے آگے لا کو ثبت کیا تو حاصل جمع ۱۱ لا ہوئے
اسیطرح

− لا
− ۴ لا
− ۵ لا
———
− ۱۰ لا

کو جمع کیا تو پہلے علامت نفی کی حاصل جمع مین لکہہ دی بعد اسکے اونکے امثالون کو جمع کیا تو ۱۰ ہوئے اسکے آگے لا کو ثبت کیا تو حاصل جمع − ۱۰ لا ہوا

مثال (۳)

۳ لا − ۴ د
۲ لا − ۳ د
۵ لا − ۲ د
———
۱۰ لا − ۹ د

مثال (۴)

۴ لا د − ۳ د
۵ لا د − ۶ د
۷ لا د − ۹ د
———
۱۶ لا د − ۱۸ د

مثال (۵) ط لا^۲ − ط لا
۲ لا^۲ − ۳ ط لا
۶ لا^۲ − ۷ ط لا
۹ لا^۲ − ۱۱ ط لا

مثال (۶) ۲ ط لا − ۲ ط ی
۲ ط لا − ۳ ط ی
۹ ط لا − ۵ ط ی
۱۲ ط لا − ۹ ط ی

مثال (۷) ۲ ط لا − ر لا
۲ ط لا − لا^۲ − ۳ ر لا
۳ ط لا − لا^۲ − ۵ ر لا
۶ ط لا − لا^۲ − ۹ ر لا

مثال (۸) ط^۲ لا^۲ − ر لا^۳
ط^۲ لا^۲ − ۳ ر لا^۳
۳ لا^۲ ط^۲ − ۲ ر لا^۳
۵ لا^۲ ط^۲ − ۶ ر لا^۳

مثال (۹) ط ب لا − ص ر لا
۳ ط ب لا − ۲ ص ر لا
ب ط لا − ۵ ر ص لا
۵ ب ط لا − ۸ ص ر لا

مثال (۱۰) ط ص لا^۲ − ط ص ی^۲
۲ ط ص لا^۲ − ۴ ط ص ی^۲
۳ ط ص لا^۲ − ط ص ی^۲
۶ ط ص لا^۲ − ۶ ط ص ی^۲

مثال (۱۱) ص لا − ط ر لا
۲ ص لا − ۲ ط ر لا
۳ ص لا − ۵ ط ر لا
۵ ص لا − ۸ ط ر لا

صورت دوم

اب اگر مقادیر جبریہ متماثلہ ہون اور علامتین اونکی مختلف ہون تو اس صورت مین یہہ قاعدہ ہی کہ جنکی علامتین یکسان ہون اونکو علحدہ علحدہ شمار کرلین اور بعد اسکے جنکی تعداد زیادہ ہواونمین سے کم تعداد کو نکالکر جو باقی رہی اوسے ثبت کردین اور اوسکے اول وہ علامت لکہین جو زیادہ رقم پر تہی پس یہہ حاصل جمع ہوگا مثلاً

۲ لا
۳ لا
− لا
− ۴ لا
۲ لا

کو جمع کرنا چاہیے تو ظاہر ہی کہ اسمین ۵ لا مثبت ہین اور ۳ لا منفی ہین پس پانچ مین سے تین کو تفریق کیا تو ۲ لا بچی اور چونکہ ۵ لا کے اول مین علامت جمع کی تہی اسیواسطے ۲ لا کے اول مین بہی علامت جمع رہی پس معلوم ہوا کہ ۲ لا حاصل جمع ہی

اسیطرح

− لا ر
− ۴ لا ر
− ۵ لا ر
۳ لا ر
۲ لا ر
− ۵ لا ر

کو جمع کیا تو اسمین ۱۰ لا ر منفی ہین اور ۵ لا ر مثبت ہین پس حاصل تفریق ۵ لا ر منفی رہینگے اسیواسطے منفی ۵ لا ر حاصل جمع ہوگا

مثال (۳) ۴ ط لا − ۳ ی^۲
۲ ط لا − ۶ ی^۲
− ۴ ط لا + ۳ ی^۲
− ط لا + ۴ ی^۲
ط لا − ۲ ی^۲

مثال (۴) − ۶ ص لا^۲ + ۵ ط لا ر^۲ − ۲ ص لا
− ص لا^۲ − ۹ ط لا ر^۲ − ۱۱ ص لا
+ ۲ ص لا^۲ − ۶ ط لا ر^۲ + ۱۹ ص لا
− ۵ ص لا^۲ − ۱۰ ط لا ر^۲ + ۲ ص لا

مثال (٥) ٢ طص لا٢ — ٣ ع لا
— ٥ طص لا٢ — ٧ ع لا
٦ طص لا٢ + ١٠ ع لا
٢ طص لا٢

مثال (٦) ٤ ط لا — ١٠ ص لا٢ ى + ١٥ ط (لا + ى)
٨ ط لا — ٧ ص لا٢ ى — ٤ ط (لا + ى)
— ٩ ط لا + ٩ ص لا٢ ى + ٦ ط (لا + ى)
— ٤ ط لا + ٨ لا٢ ص ى — ٤ ط (لا + ى)
— ط لا + ١٣ ط (لا + ى)

مثال (٧) ٣ ن لا — ٥ ص لا٢ + ٢
٤ ن لا + ٤ ص لا٢ — ٤
— ٧ لا ن — ص لا٢ + ٢
— ٢ ص لا٢

مثال (٨) ٤ لا — ٥ ى + ٢٠
— ٧ لا + ٦ ى — ١٣
٥ لا — ى + ٧
٢ لا + ١٤

مثال (٩) ٣ لا٢ — ١٥ لا + ٢١
٢ لا٢ — ٧ لا — ١٥
— ٥ لا٢ + ٢٣ لا — ٦
لا

مثال (١٠) ٣ (لا٢ — ى٢) — ١٠
٢ (لا٢ — ى٢) + ١٥
— ٤ (لا٢ — ى٢) — ٣
لا٢ — ى٢ + ٢

مثال (١١) $\sqrt{ط + لا}$ — ١٧ + (لا — ط)$^{\frac{1}{2}}$
— ٣ $\sqrt{ط + لا}$ + ١٩ — ٣ (لا — ط)$^{\frac{1}{2}}$
٢ $\sqrt{ط + لا}$ — ٢ + ٤ (لا — ط)$^{\frac{1}{2}}$
+ ٢ (لا — ط)$^{\frac{1}{2}}$

مثال (١٢) $\sqrt{٣}$ لا٢ + $\sqrt{٢}$ لا٢ — $\sqrt{٥}$ ى٢
٣ $\sqrt{٣}$ — ٢ لا٢ $\sqrt{٢}$ + ٣ لا٢ $\sqrt{٥}$ ى٢
— ٤ $\sqrt{٣}$ لا٢ — ٢ $\sqrt{٢}$ + لا٢ $\sqrt{٥}$ ى٢
— ٢ $\sqrt{٢}$ لا٢ + ٣ $\sqrt{٥}$ ى٢

صورت سوم

جس صورت مین مقادیر جبریہ غیر متماثلہ ہون تو اس صورت مین یہہ قاعدہ ہی کہ ان سب مقدارون کو ایک سطر مین لکہہ دیتے ہین اور انکے اول مین جو علامت ہوتی ہی دہی لکہی جاتی ہی اور یہی حاصل جمع ہوتا ہی مثلاً ٤ ط لا — ٢ لا٢ + ٣ ط کو جمع کرین تو ان سب کو ایک سطر مین لکہہ دینگے اور ترتیب کا لحاظ کچہہ نہین ہوگا

— ٦ لا ى + ص لا — ٣

٤ ط لا — ٢ لا٢ + ٣ ط — ٣ — ٦ لا ى + ص لا

مثال (٢) ٦ لا٢ — ٣ ط + ٢
— ٥ ى٢ + ٦ ص لا + ٣ لا
+ ٥ لا ط + ص٢ لا — ن

٦ لا٢ — ٣ ط — ٥ ى٢ + ٢ + ٦ ص لا + ٣ لا — ن + ٥ لا ط + ص٢ لا

جس صورت مین مقادیر جبریہ اسطرح واقع ہون کہ اونمین مقادیر متماثلہ بہی ہون اور غیر متماثلہ بہی ہون تو اس صورت مین چاہئے کہ مقادیر متماثلہ کو اسطرح جمع کرین جسطرح صورت اول اور دوم مین جمع کیا ہی اور غیر متماثلہ کو اسطرح جمع کرین جسطرح تیسری صورت مین جمع کیا ہی

مثلا

۴ لا^۲ − ۲ ص لا + ۳ ط − د
− ص لا + ۵ لا^۲ − ۴ ط + ع
ط − ۶ لا^۲ + ۴ ص لا
―――――――――
۳ لا^۲ + ص لا − د + ع

اس صورت مین اول مقدار کی متماثل دو اور ہین یعنے ۴ لا^۲ کے متماثل ۵ لا^۲ اور − ۶ لا^۲ ہین پس ۹ لا^۲ مثبت ہین اور − ۶ لا^۲ منفی ہین اسیواسطے اسکا حاصل جمع ۳ لا^۲ ہوا اسیطرح − ۲ ص لا کی متماثل − ص لا اور ۴ ص لا ہین پس انکا حاصل جمع ص لا ہوا اور ۳ ط کی متماثل − ۴ ط اور ط ہین پس ۴ ط اور − ۴ ط کا حاصل جمع کچہہ نہین ہوتا اسواسطے انکی جگہہ کچہہ نہین لکہا اب − د اور ع کا متماثل کوئی مقدار نہین اسواسطے انکو بعینہ اوتار کی نیچی سطر مین لکہدیا

مثال ۲

۷ لا د + ۲ لا^۲ − ۳ د^۲
+ ع − لا^۳ − ۵ د^۲
− ۲ لا د + ۴ د^۲ − لا^۲
―――――――――
۵ لا د + لا^۲ − ۴ د^۲ + ع − لا^۳

مثال ۳

۳√ص + ۱۰ − ۲ ح لا + ۵ ص^۲ لا
− ص^۲ لا + ۴ ح لا − ۷ ص^{۱/۳} − لا د + لا^۲
− ح لا + ۲۵ + لا^۳ − ۴ ص^۲ لا
―――――――――
− ۴ ص^{۱/۳} + ۳۵ + ح لا − لا د + لا^۲ + لا^۳

مثال ۴

(ط + لا)^{۱/۲} − ۳√(۲ لا − لا^۲) − ۱۵
(۲ لا − لا^۲)^{۱/۲} + ۴ لا^۲ − ۲۷ − لا^۳
لا^۳ + ۲۵ − √(ط + لا) + ۲ (لا + ط)^{۱/۲}
―――――――――
۳ (ط + لا)^{۱/۲} − ۲√(۲ لا − لا^۲) − ۱۷ + ۴ لا^۲

مثال ۵

۶ لا − ۳ د + ۲۰
− ۶ لا + ۳ د − ۹
۷ د − لا^۲ + ۲
―――――――――
۱۳ + ۷ د − لا^۲

مثال ۶

۳ لا^۲ − ۷ + ص
۵ لا^۲ − ع − ط لا
لا^۳ + ۹ − ۲ ص
―――――――――
۸ لا^۲ + ۲ − ص − ع − ط لا + لا^۳

مثال ۷

۴ لا د ط − ۷ لا^۲ د ط + ۱۵ لا
− لا^۲ د − ۵ ط لا د + ۷ لا
د^۲ ط لا + ۳ لا^۲ د ط − ط لا د
―――――――――
− ۲ لا د ط − ۴ لا^۲ د ط + ۲۲ لا − لا^۲ د + د^۲ ط لا

مثال ۸

ط لا − ص لا + ط + لا
۷ ص لا − لا^۲ ط − ص^۲ لا
− ۶ ط − ۴ لا + ط^۲ لا
―――――――――
− لا^۲ ط + ط لا + ۶ ص لا − ۵ ط − ۳ لا − ص^۲ لا + ط^۲ لا

مثال ۹

۳ط۲ + ص۲ + ۲لا۲ − لا ی
۲ط۲ + ۳ص۲ + ۴لا۲ + ۷لا ی
۵ص۲ + ۶ط۲ − ۳لا۲ − ۴لا ی
− لا ی + لا۲ − ۷ص۲ − ۶ط۲
———
۵ط۲ + ۲ص۲ + ۴لا۲ + لا ی

مثال ۱۰

(ص + ط) لا − (ط + ص) لا + ۳لا۲ − ۳ √۸
− ۳ √۸ − ۳ لا۲ − ۲ (ط + ص) لا − ۲۷
+ √۸ − ۹ لا۲ − لا۲ + ۵ لا − ۱۸
———
− ۲ (ط + ص) لا − ۲ √۸ − ۳ لا۲ − ۵ لا + ۴ لا۲ + ۵ لا

مثال ۱۱

لا + ط + س
لا − ۴ ط − س
لا۲ − ۴ لا + ط
۳ لا + ۲ لا۲ − ط
———
لا۲ − ۳ ط + ۳ لا۲

مثال ۱۲

۱۸ ط لا − س لا۲ + √(لا۲ − ط۲)
ی۲ − ۷ لا ط + س لا۲ + ۱۸
− ۳ (لا۲ − ط۲)^½ + ۲۵ − ۹ ط لا
———
۲ ط لا − ۲ √(لا۲ − ط۲) + ی۲ + ۳۴

مثال ۱۳

ط + س − لا − ۹ لا۲
− ۵ لا + ۶ ط − س + ۳
۱۵ س − ۹ ط + لا۲ + ۱
———
− ۲ ط + ۱۵ س − ۶ لا − ۸ لا۲ + ۴

مثال ۱۴

۴ لا^⅔ − ۲ لا^½ + ۳ ط
− ۷ ط + ۳ لا^⅔ + ۵ لا^½
+ ۶ ی − ط لا + ۹
———
۷ لا^⅔ + ۳ لا^½ − ۴ ط + ۶ ی − ط لا + ۹

مثال ۱۵

√(ط − لا) + ۴ √(لا − ط) + ط
√(لا − ۱) − ۳ √(ط − لا) + ۶ √ط
− ۴ √(لا − ط) + ۲ √(ط − لا) − ۱۷
———

مثال ۱۶

۱۷ لا۲ + ۷ لا + لا^⅓
− ۵ لا^⅓ + لا^½ − ۶ لا۲
+ ۷ لا^⅓ + ۲ √لا + ۹
———
۱۱ لا۲ + ۷ لا + ۳ لا^⅓ + لا^½ + ۲ √لا + ۹

مثال ۱۷

۴ لا^⅔ − ۷ لا^⅔ + ۹ لا۲
۲ لا^½ + ۳ لا^⅔ − لا^½
+ ۷ √لا + ۱ − ۶
———
− ۳ لا^⅔ − لا^½ ... ۹ لا۲ ... ۹

مثال ۱۸

(ا + ب) لا۲ − ط لا۲ + ۶ √لا
+ ۶ لا۲ − (ا + ب) لا۲ + ط لا۲
− ۲ (ا + ب) لا۲ + (ا + ب) لا۲
———

مثال ۱۹

لا ی + ی لا۲ + لا ی + ۲
ی لا − لا ی۲ + لا + ۱
۵ لا + ۳ لا ی۲ − ۹ لا ی + ۳
———
۲ لا ی − ۷ لا ی + ۶ + ۲ لا ی۲

مثال ۲۰

۹ لا − ۶ ط + ۲۵
− ۱۵ لا − ۷ لا + ۱۷
+ ۴ ط − ۵ ط − ۸ لا
———
− ۷ لا − ط + ۸

فصل دویم قاعدہ تفریق

جاننا چاہیئے کہ ایک مقدار مین سے دوسری مقدار نکال ڈالنی کو تفریق کہتے ہین پس جو مقدار کہ نکالی جاتی ہی اوسکو مفروق کہتے ہین اور جسمین سے نکالی جاتی ہی اوسکو مفروق منہ کہتے ہین مفروق منہ کو اکثر اوپر لکھتے ہین اور مفروق کو اوسکی نیچی لکھتے ہین پہر مفروق کی سب مقدارون کی علامتین بدل کر مفروق منہ کی ساتھہ جمع کر لیتے ہین جو کچھہ حاصل ہوتا ہی وہ حاصل

تفریق ہی اور علامتین بدلنے سی یہہ مراد ہی کہ جس مقدار پر + کا نشان ہو اوسکو - کا بنا دینا چاہئی اور جسپر نفی کا نشان ہو اوسکو + کا بنا دینا چاہئی اور تبدیل علامتون کی اکثر لکھہ کر نہین کرتے بلکہ خیال مین رکھہ کر مفروق کو مفروق منہ کے ساتہہ جمع کر لیتے ہین مثلاً ۵ لا مین سے ۳ لا کو تفریق کرین تو اس صورت پر ۵ لا / ۳ لا لکھنا چاہئیے پس تبدیل علامت کی یہہ ۵ لا / -۳ لا صورت ہوگی اسکی جمع موافق قاعدہ جمع کی ۲ لا ہی پس ۵ لا اور ۳ لا کا حاصل تفریق ۲ لا ہی اسیطرح ۵ لا مین سے -۳ لا کو تفریق کرین تو اسطرح ۵ لا / -۳ لا لکھنا چاہئیے اور بعد تبدیلی علامت مفروق کے یہہ صورت ۵ لا / ۳ لا / ۸ لا ہوگی اسکی جمع ۸ لا ہی پس ۵ لا اور -۳ لا کا حاصل تفریق ۸ لا ہوا ایسا ہی یہہ بات جاننی چاہئیے کہ جسوقت منفی مقدار پر علامت نفی لکھتے ہین تو وہ مثبت ہو جاتی ہی اگر ہم چاہتے ہین کہ ۴ لا + ۳ ط مین سے ۲ لا + ط کو تفریق کرین تو یہہ ہوگا ۴ لا + ۳ ط کیونکہ جب مفروق کی علامتین تبدیل کین تو -۲ لا - ط ہوا اور اوسکو جمع کیا ۴ لا + ۳ ط کی ساتہہ تو ظاہر ہی کہ ۲ لا + ۲ ط ہوگا

۴ لا + ۳ ط
۲ لا + ط
۲ لا + ۲ ط

اگر چاہین کہ ۵ د + ۳ لا مین سے ۲ د - ۲ لا تفریق کرین تو یہہ حاصل ہوگا اس صورت مین ۲ د منفی ہونگی اور جب اونکو ۵ د کی ساتہہ جمع کرینگی تو ۳ د حاصل ہونگی اور -۲ لا علامت بدلنی کی بعد ۲ لا ہو جاینگی اور انکو ۳ لا کی ساتہہ جمع کرینگی تو ۵ لا ہونگی

۵ د + ۳ لا
۲ د - ۲ لا
۳ د + ۵ لا

مثال ۵

۵ لا^۲ + ۲ د
۲ لا^۲ + ۵ د
۳ لا^۲ - ۳ د

مثال ۶

ص^۲ - ۲ لا + ۳
۴ ص^۲ + ۹ لا - ۵
-۳ ص^۲ - ۱۱ لا + ۸

مثال ۷

۵ لا^۲ + ۱۲ √لا - ۴ ص
۶ لا^۲ - ۸ لا - لا^(۱/۲)
- لا^۲ + ۱۲ √لا + ۸ لا - ۴ ص

مثال ۹

۴ ط لا + ۳ د + ۱
۳ د + ۵ ط لا - ۱
- ط لا + ۲

مثال ۱۰

۵ لا + ۱ لا - ۴ ۲
۵ لا - ۲ لا + ۷
۱۳ لا - ۱۳

مثال ۱۱

۸ لا^۲ - ۵ لا + ۷ د - ۹
۷ لا^۲ - ۸ لا - ۳ د - ۸
لا^۲ - ۷ لا + ۱۰ د - ۱

مثال ۱۲

۹ د + ۷ د لا + ۵ لا^۲ - ۷
-۹ + ۶ لا^۲ - ۴ د + ۱
۱۱ د + ۷ د لا - لا^۲ + ۱

مثال ۱۳

۴ ط + ۳ ص - ۲ لا + ۸ د
ط + ۲ ص + لا + ۵ د
۳ ط + ص - ۳ لا + ۳ د

مثال ۱۴

۱۲ لا د + ۳ د^۲ - ۷ لا لا^۲ + ۳ √۲
- ۵ لا د + ۷ د^۲ - ۹ لا لا^۲ + ۲ √۲
۱۷ لا د - ۴ د^۲ + ۲ لا^۲ + √۲

مثال ۱۵

۲۸ ط لا^۲ + ۲۱ ط^۲ لا^۲ + ۲۵ ط^۳ لا
۱۸ ط لا^۲ + ۳۰ ط^۲ لا^۲ - ۴۳ ط^۳ لا
۱۰ ط لا^۲ - ۹ ط^۲ لا^۲ + ۶۸ ط^۳ لا

مثال ۱۶

۴ (ط + ص) لا + ۲ (ط − لا)
(ط + ص) لا + ۲ (ط − ط)
―――――――――
(ط + ص) لا + (ط − لا)

مثال ۱۷

۸√ لاٰ − یٰ + ۴ (لا + ی) − ۳ ۸√ ط + لا
۳ (لا + ی) − ۲ (لاٰ − یٰ)^½ + ۳ ۸√ ط + لا
―――――――――
۳ ۸√ لاٰ − یٰ + (لا + ی) − ۶ ۸√ ط + لا

مثال ۱۸

۸√ ۳ ۸√ لا − طٰ یٰ − ۴
۵ + (ی)^½ + (۳)^½ طٰ + ^⅔ لا
―――――――――
− ۲ طٰ ۸√ یٰ − ۹

مثال ۱۹

لاٰ + ۲ لا ی + یٰ
لاٰ − ۲ لا ی + یٰ
―――――――――
۴ لا ی

مثال ۲۰

لاٰ − ۲ لا ی + یٰ + (لاٰ + یٰ)^½ + (۲ لا ی − یٰ)
لاٰ + ۲ لا ی − یٰ − (لاٰ + یٰ) ۲ + (۳ لا ی − یٰ)
―――――――――
− ۴ لا ی + ۲ یٰ ۲ + (لاٰ + یٰ) ۲ − (لاٰ + یٰ) − (۲ لا ی − یٰ)

مثال ۲۱

لاٰ + ۳ لاٰ ی + ۳ لا یٰ + یٰ
لاٰ − ۳ لاٰ ی + ۳ لا یٰ − یٰ
―――――――――
۶ لاٰ ی + ۲ یٰ

مثال ۲۲

۳ ۸√ ۲۵ لاٰ − ۸√ ۲ لاٰ + ۵ لاٰ
۲ ۸√ ۲۵ لاٰ − ۸√ ۲ لاٰ + ۸√ ۲ لاٰ
―――――――――
۸√ ۲۵ لاٰ − ۸√ ۲ لاٰ + ۵ لاٰ

مثال ۲۳

۸√ ۳ (لا + ط)^½ − ۸√ ۲ (لا − ط)^⅔
− ۸√ ۳ (لا + ط)^½ − ۳ ۸√ ۲ (لا − ط)^⅔
―――――――――
۲ ۸√ ۳ (لا + ط)^½ + ۲ ۸√ ۲ (لا − ط)^⅔

مثال ۲۴

۸√ لا − ۲ ی ۸√ لا + یٰ
۸√ لا + ۲ ی ۸√ لا + یٰ
―――――――――
− ۴ ی ۸√ لا

تیسری فصل ضرب کا قاعدہ

حدود مین یہہ بات بیان کی گئی ہی کہ جب مقدار کی اول مین علامت جمع یعنی + ہوتی ہی اوسس مقدار کو مقدار مثبت کہتی ہین اور جس مقدار کی اول مین علامت نفی یعنی − ہوتی ہی اوسس مقدار کو منفی کہتے ہین پس ضرب کی قاعدہ مین ان تین باتون کو ضرور یاد رکہنا چاہیئے کہ اگر مقدار مثبت کو مثبت مین ضرب کرین تو حاصل ضرب ایک مقدار مثبت ہوتی ہی اور اگر منفی کو مثبت مین ضرب کرین یا مثبت کو منفی مین ضرب کرین تو حاصل ضرب ایک مقدار منفی ہوتی ہی اب جاننا چاہیئے کہ مضروب اور مضروب فیہ کی تین صورتین ہوسکتی ہین یا تو مضروب اور مضروب فیہ دونو مین ایک ایک رقم ہو یا انمین سے ایک مین بہت رقمین ہون اور دوسری مین ایک رقم ہو یا دونو مین بہت بہت رقمین ہون صورت اول یعنی جسوقت مضروب اور مضروب فیہ مین ایک ایک رقم ہو تو اس صورت مین ضرب کا قاعدہ یہہ ہی کہ اول مضروب اور مضروب فیہ کو اوپر نیچی لکہہ کر ایک خط عرضی کہینچا چاہیئے پس اگر مضروب اور مضروب فیہ دونو مثبت یا دونو منفی ہین تو اس خط عرضی

عوضی ہے یہی علامت جمع کی لکھدی اور بعد اسکی مضروب کی سر کو مضروب فیہ کی سر میں ضرب کرکی اوس علامت کی آگی ثبت کری اور اسکی آگی حروف کو ملاکر لکھدین اور اگر مضروب اور مضروب فیہ کی علامتین مختلف ہون تو اول مین علامت نفی یعنی − لکھہ کر اوسکی آگی حاصل ضرب اعداد ان کا لکھہ کر حروف کو ملا کر لکھہ دین مثلاً ۳ لا اور ۴ د کو ضرب کرنا چاہتے ہین تو انکو اسطرح ۳ لا لکھنا چاہیئے اب چونکہ ان دونوں کی اول مین علامت

$$\frac{۴ د}{۱۲ لا د}$$

جمع کی ہی تو حاصل ضرب مین بہی علامت جمع چاہیئے پہر انکی سرونکو باہم ضرب کرنا چاہیئی یعنی ۳ کو ۴ مین ضرب کرنا چاہیئے پس ۱۲ ہوتے ہین ۱۲ کی آگے لا د کو لکھنا چاہیئے پس حاصل ضرب ۱۲ لا د ہوگا

بعینہ اسیطرح − ۳ لا کو − ۴ د مین ضرب کرین تو − ۳ لا سے ۱۲ لا د ہونگی کیونکہ مضروب اور

$$\frac{− ۴ د}{۱۲ لا د}$$

اور مضروب فیہ مین دونو کی علامت نفی تہین اسیواسطی علامت حاصل ضرب کی مثبت ہوگی اگر − ۳ لا کو ۴ د مین ضرب کرین تو − ۳ لا − ۱۲ لا د نفی ہونگی کیونکہ علامتین مضروب اور مضروب فیہ کی مختلف ہین اور اسطرح $\frac{− ۳ لا \quad ۴ د}{− ۱۲ لا د}$

$$\frac{۴ د}{− ۱۲ لا د}$$

۴ د اور − ۳ لا کا حاصل ضرب ہی − ۱۲ لا د ہوگا یہان جاننا چاہیئے کہ حروف کو باہم ملا کر لکھہ دیتی ہین اسمین کچھہ لحاظ تقدیم اور تاخیر کا نہین ہے یعنی صورت بالا مین لا د لکھدین چاہین د لا لکھدین

مثال ۶	مثال ۵	مثال ۴	مثال ۳	مثال ۲	مثال ۱
− ۱۵ دٓ	− ۳ لاَ	− ۴ ط لا	۳ ص لا	۷ لاَ	+ ۵ د
− ۳ب لا	− ۲ دٓ	− ۷ ص دٓ	۵ ط د	۳ د	+ ۶ ط
۱۵ ب لا دٓ	۶ لاَ دٓ	۲۸ ط ص لا دٓ	۱۵ ص ط لا د	۲۱ لاَ د	+ ۳۰ ط د

۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷
صٓ	لاَ طٓ	۱۱ ص لا	− ۷ لاَ دٓ	− ۴ لا د	− ۸ ص لاَ
− لاَ	− ۲ ص	− ۳ ط	۵ ا ط	۵ ب	− ۷ ط د
− صٓ لاَ	− ۲ ص طٓ لاَ	− ۳۳ ط ص لا	− ۳۵ ا ط لاَ دٓ	− ۲۰ ب لا د	۵۶ ص ط لاَ د

۱۵	۱۴	۱۳
− لاَ صٓ	− دٓ ط	ط لا
طٓ	ص	− د ص
− صٓ طٓ لاَ	− ص ط دٓ	− ص ط لا د

اگر کوئی حرف مضروب اور مضروب فیہ مین مشترک ہو تو اوسکو حاصل ضرب مین ملا کر نہین لکھتے بلکہ اونمین سے فقط ایک ہی حرف لکھہ کر اوسکی اوپر مجموعہ نشان قوتون دونو حرفون کا لکھہ دیتے ہین مثلاً ۴ لا^{۳} کو ۵ لا^{۲} مین ضرب کرین تو ظاہر ہی کہ اسمین نشان قوت لا کی ۳ اور ۲ ہین پس قاعدہ کے موافق ۵ لا^{۲} × ۴ لا^{۳} حاصل ضرب ۲۰ لا^{۵} ہوگا کیونکہ ۴ کو ۵ مین ضرب کیا تو ۲۰ ہوے

۲۰ لا^{۵}

اور دونون نشانون کو جمع کر کر لا کا نشان قوت لکھا تو لا^{۵} ہوا پس کل حاصل ضرب ۲۰ لا^{۵} ہوا اگر ۳ ی کو ۲ ی مین ضرب کرین تو بعینہ موافق بیان بالا کی حاصل ضرب ۳ ی × ۲ ی = ۶ ی^{۲} ہوگا اگر ۲ لا کو ۳ لا مین ضرب کرین تو چونکہ اس صورت مین نشان قوت حرف مشترک لا کا ۱ اور ۱ ہی اسیواسطے حاصل ضرب ۳ لا × ۲ لا = ۶ لا^{۲} ہوگا

مثال ۴

۳ لا^{۲}
−۵ لا^{۲}
−۱۵ لا^{۴}

مثال ۵

−۷ لا
۳ لا^{۲}
−۲۱ لا^{۳}

مثال ۶

۵ ی
−۶ ی
−۳۰ ی^{۲}

مثال ۷

−۳ لا ی
۵ لا ی
−۱۵ لا^{۲} ی^{۲}

مثال ۸

۲ لا^{۲} ی
۳ ی^{۲} لا
۶ لا^{۳} ی^{۳}

مثال ۹

−۳ ط لا^{۲}
۱۵ ط^{۲} لا^{۲}
−۴۵ ط^{۳} لا^{۴}

مثال ۱۰

۷ ص لا ی^{۲}
۴ لا ص ی
۲۸ ص^{۲} لا^{۲} ی^{۳}

مثال ۱۱

ط ص لا
ص ی لا
ط ص^{۲} ی لا^{۲}

مثال ۱۲

ا لا^{۲} ی
ا^{۲} لا ی^{۲}
ا^{۳} لا^{۳} ی^{۳}

مثال ۱۳

ط ۸ لا
ط ۸ لا
ط^{۲} لا

مثال ۱۴

لا$^{\frac{۱}{۲}}$
ط لا$^{\frac{۱}{۲}}$
ط لا

مثال ۱۵

۴ لا$^{\frac{۱}{۲}}$
۵ لا
۲۰ لا$^{\frac{۳}{۲}}$

مثال ۱۶

ص لا$^{\frac{۱}{۳}}$
ط لا$^{\frac{۱}{۴}}$
ص ط لا$^{\frac{۷}{۱۲}}$

مثال ۱۷

۳ لا^{۲}
ط لا$^{\frac{۱}{۲}}$
۳ ط لا$^{\frac{۵}{۲}}$

مثال ۱۸

ص لا ی$^{\frac{۱}{۲}}$
ص^{۲} لا$^{\frac{۱}{۲}}$ ی
ص^{۳} لا$^{\frac{۳}{۲}}$ ی$^{\frac{۳}{۲}}$

مثال ۱۹

ط$^{\frac{۱}{۲}}$ ی لا$^{\frac{۱}{۲}}$
ط^{۲} ی$^{\frac{۱}{۲}}$ لا$^{\frac{۱}{۳}}$
ط$^{\frac{۵}{۲}}$ ی$^{\frac{۳}{۲}}$ لا$^{\frac{۵}{۶}}$

مثال ۲۰

ص لا ی
ص^{۲} ی لا$^{\frac{۱}{۲}}$
ص^{۳} ی^{۲} لا$^{\frac{۳}{۲}}$

جب مضروب اور مضروب فیہ دو مقدار ایسی ہون کہ اون دونو پر جذر ہو تو چاہیے کہ جو مقدارین جذر کی اندر ہین اونکو ضرب کر لین اور حاصل ضرب پر نشان جذر کا بنا دین۔

مثال ۱ | مثال ۲ | مثال ۳ | مثال ۴ | مثال ۵

[illegible]

مثال ۶ | مثال ۷ | مثال ۸ | مثال ۹

[illegible]

دوسری صورت یعنی جسوقت مضروب مین بہت رقمین ہون اور مضروب فیہ مین ایک رقم یا بالعکس پس ان دونوحالتونمین یہہ قاعدہ ہی کہ اوس ایک رقم مین سب رقمون کو موافق صورت اول کی ضرب کرکر ایک سطر مین سب کو لکہنا چاہیئی مثلا ۴ ص لا + ط ی + ۲ لاَ کو ۴ لاَ مین ضرب کرین تو ۴ ص لا + ط ی + ۲ لاَ ان سب رقمونکو ۴ لاَ مین ضرب کیا جاسکی

۴ لاَ

یہہ ۱۶ ص لاَ + ۴ ط لاَ ی + ۸ لا ۳ حاصل ہوگا

مثال ۲

۳ ط لا − ۲ ی + ۴

۵ لاَ

۱۵ ط لاَ − ۱۰ لاَ ی + ۲۰ لاَ

مثال ۳

۵ لاَ ی − ۲ یَ لا + ۳

− ۷ لا ی

− ۳۵ لاَ یَ + ۱۴ لاَ یَ − ۲۱ لا ی

مثال ۴

ط + لا − ص

۲ ط

۲ طَ + ۲ ط لا − ۲ ط ص

مثال ۵ | مثال ۶ | مثال ۷

[illegible]

مثال ۸

طَ لاَ + صَ لاَ − ۳ یَ

− لاَ

− طَ لاَ − صَ لاَ + ۳ لاَ یَ

مثال ۹

[illegible]

مثال ۱۰ | **مثال ۱۱** | **مثال ۱۲**

۳ لا^2

۵ لا + ۷ ط − ۱۲

۱۵ لا^3 + ۲۱ ط لا^2 − ۳۶ لا^2

مثال ۱۱

−۶ ی

۲ لا ی − ی^2 + ۷ لا ی

−۱۲ لا ی^2 + ۶ ی^3 − ۴۲ لا ی^2

مثال ۱۲

۸√۳

۳ ی لا − ۸√۳ − لا ۱

۳ ۸√۳ ی لا − ۳ لا − ۸√۳

تیسری صورت یعنی جسوقت مضروب اور مضروب فیہ دونوںمین بہت بہت سی رقمین ہون تو اسوقت یہہ قاعدہ ہی کہ مضروب فیہ کی اول رقم کو مضروب کی ساری رقمون مین ضرب کرکی دوسری صورت کی موافق ایک سطر مین لکھدین اور پہر دوسری رقم کو مضروب فیہ کی ساری رقمون مین ضرب کر کے پہلی سطر کی نیچی ایک مرتبہ چھوڑ کر لکھتی چلے جاوین اور علی ہذا القیاس جتنی رقمین ہون سب مین اسیطرح ضرب کر کر لکھتے جاوین اور بعد عمل تمام ہونیکے سب حاصل ضربون کو جمع کرلین یہہ حاصل جمع حاصل ضرب مطلوب ہوگا

مثال ۱

۷ ط لا + ۲ لا − ۴ ی

۳ لا − ۲ ی

۲۱ ط لا^2 + ۶ لا^2 − ۱۲ لا ی

− ۱۴ ط لا ی − ۴ لا ی + ۸ ی^2

۲۱ ط لا^2 − ۶ لا^2 − ۱۶ لا ی − ۱۴ لا ط ی + ۸ ی^2

مثال ۲

۳ لا ی − ۵ ی لا^2 − ۳

۴ لا ی − ۳ لا ی

۱۲ لا^2 ی^2 − ۲۰ لا^3 ی^2 − ۱۲ لا ی

− ۹ لا^2 ی^2 + ۱۵ لا^3 ی^2 + ۹ لا ی

− ۳ لا^2 ی^2 − ۳ لا ی

مثال ۳

لا + ی

لا + ی

لا^2 + ی لا

+ ی لا + ی^2

لا^2 + ۲ ی لا + ی^2

مثال ۴

ی − لا

ی − لا

ی^2 − ی لا

− ی لا + لا^2

ی^2 − ۲ لا ی + لا^2

مثال ۵

لا^2 − ی^2

لا^2 + ی^2

لا^4 − لا^2 ی^2

+ لا^2 ی^2 − ی^4

لا^4 − ی^4

مثال ۶

ط + لا

ط − لا

ط^2 + ط لا

− ط لا − لا^2

ط^2 − لا^2

مثال ۷

۲ لا + ۱

۲ لا − ۱

۴ لا^2 + ۲ لا

− ۲ لا − ۱

۴ لا^2 − ۱

مثال ۸

۸√لا + لا

۸√لا − لا

لا$^{2/8}$ + لا

− لا$^{2/8}$ − لا^2

لا − لا^2

مثال ۹

$2لط - ل^2$

$2لط + ل^2$

$4ل^2ط^2 - 2طل^3$

$+ 2ل^3ط - ل^4$

$4ل^2ط^2 - ل^4$

مثال ۱۰

$\sqrt{ط+ل} - ل$

$ل + \sqrt{ط+ل}$

$ل\sqrt{ط+ل} - ل^2$

$ط + ل - ل\sqrt{ل+ط}$

$ط + ل - ل^2$

مثال ۱۱

$ل^2 + 1 - 2ل - ط$

$2ل + ط + ل + 1$

$2ل^3 + 2ل - 4ل^2 - 2طل$

$+ طل + ط - 2طل - ط^2$

$+ ل^3 + ل - 2ل^2 - طل$

$+ ل + 1 - 2ل - ط$

$- 3ل^2 + 2ل - 4طل - ط^2 + 1$

مثال ۱۲

$ل^2 + 1 - ط - ل$

$ط + ل + 1 + ل^2$

$طل^2 + ط - ط^2 - طل$

$+ ل^3 + ل - طل - ل^2$

$+ ل^2 + 1 - ط - ل$

$+ ل^4 + ل^2 - طل^2 - ل^3$

$- ط^2 - 2طل + ل^4 + 1 + ل^2$

مثال ۱۳

$1 + ل + ل^2$

$1 + ل + ل^2$

$1 + ل + ل^2$

$ل + ل^2 + ل^3$

$+ ل^2 + ل^3 + ل^4$

$1 + 2ل + 3ل^2 + 2ل^3 + ل^4$

مثال ۱۴

$ل^2 + ل^2$

$ل^2 + ل^2$

$ل^4 + ل^4$

$+ ل^4 + ل^4$

$4ل^4$

مثال ۱۵

$\sqrt{ط+ل} - ل^2$

$\sqrt{ط+ل} + ل^2$

$ط + ل - ل^2\sqrt{ط+ل}$

$+ ل^2\sqrt{ط+ل} - ل^4$

$ط + ل - ل^4$

مثال ۱۶ ضرب کرو $ل^2 + 2لد + د^2$ کو $ل - د$ جواب $ل^3 + ل^2د - لد^2 - د^3$

مثال ۱۷ ضرب کرو $5ط^3 - 2ط^2ص + 4طص^2$ کو $ط^3 - 4ط^2ص + 2ص^3$ مین جواب $5ط^6 - 22ط^5ص + 12ط^4ص^2 - 6ط^3ص^3 - 4ط^2ص^4 + 8طص^5$

مثال ۱۸ ضرب کرو $(ل - ط)$ کو $(ل - د)$ مین اور حاصل ضرب کو $(ل - 1)$ مین

جواب لا۳ - (ط + د + ۱) لا۲ + ۱ د ط (ط + د) لا - ۱ د ط

جس مقدار کو فی نفسہ ضرب کرتے ہین تو ظاہر ہی کہ حاصل ضرب اوس مقدار کا مجذور ہوتا ہی مثلاً لا کو لا مین ضرب کرین تو لا۲ مجذور لا کا ہی اسیطرح لا + د کو لا + د مین ضرب کرین تو (لا۲ + ۲ لا د + د۲) مجذور لا + د کا ہی اگر (لا۲ + ۲ لا د + د۲) کو لا + د مین ضرب کرین تو ظاہر ہی کہ حاصل ضرب مکعب (لا + د) کا ہوگا اور اسیطرح اگر اس مکعب کو پہر (لا + د) مین ضرب کرین تو چوتھی مرتبہ کا صعود (لا + د) کا حاصل ہوگا اور علی ہذا القیاس پانچوین مرتبہ کا صعود اور چھٹی مرتبہ وغیرہ کا صعود ضرب دینی سے حاصل ہوسکتا ہی لیکن یہہ بات ظاہر ہی کہ اسطرح کی ضرب مین دشواری ہوتی ہی کیونکہ بہت سی مقدارون کے ضرب کرنے مین دقت واقع ہوتی ہی اسیواسطی نیوٹن صاحب نی ایک آسان قاعدہ ایسا نکالا ہی کہ جتنی مرتبہ کا صعود چاہین بغیر ضرب کرنے کی حاصل ہوسکتا ہی پس ہم وہ قاعدہ لکھتے ہین اور دلیل اوسکی آگے بیان کرینگی وہ قاعدہ یہہ ہی کہ اگر دو مقدارون کے مجموعہ یا حاصل تفریق کا صعود لینا ہو تو جتنی مرتبہ کا صعود لینا ہی اوسکی موافق مجموعہ یا حاصل تفریق پر عدد لکہین مثلاً (لا + د) کا مجذور کیا چاہتی ہین یعنے اسکی دو مرتبہ کا صعود لیا جاتا ہے ہین پس عدد (۲) کا اسپر اسطرح (لا + د)۲ لکہنا چاہیئے (لا + د)۲ = لا۲ + ۲ لا د + د۲ اور اسکی آگی مساوات کی علامت لکھہ کر جو حرف کہ اول ہی اوسکا نشان قوت وہی عدد رکہنا چاہیئے جو کل پر ہی بعد اسکی دیکھنا چاہئی کہ جن مقدارونکا صعود لینا اونکی بیچمین علامت + کی ہی یا علامت نفی کی پس اگر علامت + ہی تو اول حرف کے بعد علامت + کی لکھہ کر وہ عدد لکہین جو نشان قوت ہی اور اس عدد کی آگی اول حرف کو لکہین مگر اسطرح پر نشان قوت اول کی نسبت بقدر ۱ کی کم ہو بعد اسکی دوسرا حرف ملا کر موافق ضرب کی لکھہ دین یہہ دوسرا جز ہوگا پہر تیسری جز کی واسطی یہہ قاعدہ کرین کہ دوسرے جز کی سر کو اول حرف کی نشان قوت مین ضرب کرین اور حاصل ضرب کو جزون کی تعداد پر کہ اس صورت مین ہوگی تقسیم کرین اور خارج قسمت کو تیسری جز کا سر بناوین بعد اسکی اول حرف کا نشان قوت پہلی کی نسبت بقدر ۲ کی کم کر کر لکہین اور اسکی دوسری حرف کا نشان قوت پہلی سی بقدر ۱ کی زیادہ لکہین اور علی ہذا القیاس چوتھی جز واسطی بہی یہی قاعدہ کرین غرض اول حرف کی قوت گھٹاتی جاوین اور دوسری حرف کی قوت بڑہاتی جاوین اور اگر اونکی بیچمین علامت جمع ہو تو سب جزون کی اول مین علامت جمع ہوگی اور اگر اونکی بیچمین علامت نفی ہی تو اول پر + دوسری پر - تیسری پر + چوتھی پر - اور علی ہذا القیاس اب ہم اس قاعدہ کی مثالین لکھتے ہین مثلاً ہم چاہتے ہین کہ اس قاعدہ کی موافق (لا + د) کا تین مرتبہ کا صعود لین تو اسطرح (لا + د)۳ = لا۳ + ۳ لا۲ د + ۳ لا د۲ + د۳ لکہنا چاہیئے پس علامت مساوات کی لا کا نشان وہ لکھا جو کل پر تہا یعنے لا۳ لکھا بعد اسکی + کی علامت

لکھہ کر نشان قوت یعنی عدد ۳ کا لکھا اور اوسکی اگلی حرف کا نشان قوت اول سی ایک کم لکھا یعنی $\text{لا}^{۲}$ لکھا پہر ۳ $\text{لا}^{۲}$ کے ساتھہ دوسرے حرف کو ضرب دیکر لکھہ دیا ۔ دوسرا جز ۳ $\text{لا}^{۲}$ د بعد اسکی علامت + کی لکھہ کر دوسری جز کی سر کو جو ۳ ہی لا کی نشان قوت مین جو ۲ ضرب کیا تو حاصل ضرب ۶ ہوا اسکو تعداد جزون پر کہ ۲ ہی تقسیم کیا خارج قسمت ۳ ہوا اس ۳ تیسری جز کا سر بنایا اور اسکی آگی لا کے نشان قوت ایک کم کرکی لکھا یعنے ۳ لا لکھا اور پہر دوسری حرف نشان قوت بقدر ایک کے زیادہ کرکی اسکی ساتھہ لکھدیا پس ۳ لا $\text{د}^{۲}$ ہوا بعد چوتھی جز کی لیئے بہی یہی قاعدہ کیا یعنی تیسری جز کی سر کو جو ۳ ہی نشان قوت لا مین جو ۱ ہی ضرب کیا تو حاصل ضرب ۳ ہوا اوسکو تعداد جزون پر جو تین ہی تقسیم کیا خارج قسمت ۱ ہوا اور لا کا نشان قوت کم کیا تو لا بالکل زائل ہوگیا سوا فقط د کا نشان قوت بقدر ۱ کی زیادہ کرکے اور اوسی ۱ مین ضرب کرکے لکھہ دیا یہہ قاعدہ بہت مفید ہی اسکو خوب یاد رکہنا چاہیئے

مثال

$$(\text{لا}+\text{د})^{۴} = \text{لا}^{۴} + ۴\,\text{لا}^{۳}\,\text{د} + ۶\,\text{لا}^{۲}\,\text{د}^{۲} + ۴\,\text{لا}\,\text{د}^{۳} + \text{د}^{۴}$$

مثال

$$(\text{لا}+\text{د})^{۵} = \text{لا}^{۵} + ۵\,\text{لا}^{۴}\,\text{د} + ۱۰\,\text{لا}^{۳}\,\text{د}^{۲} + ۱۰\,\text{لا}^{۲}\,\text{د}^{۳} + ۵\,\text{لا}\,\text{د}^{۴} + \text{د}^{۵}$$

مثال

$$(\text{لا}-\text{د})^{۳} = \text{لا}^{۳} - ۳\,\text{لا}^{۲}\,\text{د} + ۳\,\text{لا}\,\text{د}^{۲} - \text{د}^{۳}$$

مثال

$$(\text{لا}-\text{د})^{۴} = \text{لا}^{۴} - ۴\,\text{لا}^{۳}\,\text{د} + ۶\,\text{لا}^{۲}\,\text{د}^{۲} - ۴\,\text{لا}\,\text{د}^{۳} + \text{د}^{۴}$$

مثال

$$(\text{لا}+۱)^{۲} = \text{لا}^{۲} + ۲\,\text{لا} + ۱$$

مثال

$$(\text{لا}+۱)^{۳} = \text{لا}^{۳} + ۳\,\text{لا}^{۲} + ۳\,\text{لا} + ۱$$

مثال

$$(۱-\text{لا})^{۳} = ۱ - ۳\,\text{لا} + ۳\,\text{لا}^{۲} - \text{لا}^{۳}$$

مثال

$$(۲\,\text{لا}+۱)^{۳} = ۸\,\text{لا}^{۳} + ۱۲\,\text{لا}^{۲} + ۶\,\text{لا} + ۱$$

مثال

(٢ لا - ١)^{4} = ١٦ لا^{4} - ٣٢ لا^{3} + ٢٤ لا^{2} - ٨ لا + ١

چوتهی فصل قاعده تقسیم

جاننا چاهیے که جس رقم کو تقسیم کرتے هین اوسی مقسوم کهتے هین اور جس رقم پر تقسیم کرتے هین اوسی مقسوم علیه کهتے هین تقسیم مین کئی صورتین هین پهلی صورت یهه هی که مقسوم اور مقسوم علیه دونو ایک ایک رقم هون پس اس صورت مین یهه قاعده هی که مقسوم کو دو خطوط مقوس مثلا ( ) انکی درمیان مین لکهه دین اور مقسوم علیه کو ایک طرف خط کی لکهه کر علامتون کا لحاظ کرین اور خارج قسمت پر ایسی علامت لکهین که اگر اوسکو مقسوم علیه مین ضرب کرین تو حاصل ضرب پر وه علامت هو جو مقسوم پر هی بعد اسکے مقسوم کی سر کو مقسوم علیه کی سر پر تقسیم کرکے خارج قسمت کو اوس علامت کی آگی لکهه دین بعد اسکے جو حرف ایسا هو که مقسوم مین هی اور مقسوم علیه مین نهین اوسکو خارج قسمت مین عدد کی آگے لکهدین اور جو حرف مقسوم اور مقسوم علیه دونو مین مشترک هو اوسکو خارج قسمت مین نه لکهین بعد اسکے خارج قسمت کو مقسوم علیه مین ضرب دیکر مقسوم کی نیچے لکهین اور دونو مین تفریق کر دین اگر باقی نرهی تو تقسیم پوری هے اور جو کچهه باقی رهی اوسکو مقسوم علیه کی اوپر لکهدین اور اگر کوئی ایسا حرف هو که مقسوم علیه مین هی اور مقسوم مین نهین تو اس صورت مین تقسیم نهین هو سکتی یهه صورت کسور مین داخل هو جاتی هی

مثال ١

٤ ط) ٢٠ ط لا (٥ لا
٢٠ ط لا

مثلا ٢٠ ط لا کو ٤ ط پر تقسیم کیا چاہتے هین تو اوسکو اسطرح کے لکهه دین جسطرح مثال (١) هی اب چونکه علامتین مقسوم اور مقسوم علیه دونو کی + هین اسیواسطی خارج قسمت پر بهی علامت + هوگی بعد اسکی مقسوم کی سر کو جو ٢٠ هی مقسوم علیه کے سر پر جو ٤ هی تقسیم کیا تو خارج قسمت ٥ هوا پهر دیکها که ط دونون مین مشترک هی اسکو خارج قسمت مین نه لکها اور لا ایسا حرف هی که مقسوم مین هی اور مقسوم علیه مین نهین اسواسطی اوسکو خارج قسمت مین لکهدیا پهر ٥ لا کو ٤ ط مین ضرب کیا تو ٢٠ ط لا هوئی اسکو مقسوم علیه سے تفریق کیا تو کچهه باقی نرها

مثال ٢

- ٥ ص لا) ٢٥ ط ص لا (- ٥ ط
٢٥ ط ص لا

مثال ٣

- ٦ لا) ١٨ ط^{2} لا (- ٣ ط^{2}
١٨ ط^{2} لا

مثال ٤

- ٣ لا) - ١٢ لا (٤
- ١٢ لا

مثال ٥

- ٦ لا^{2}) - ٢٤ ص^{2} لا^{2} (+ ٤ ص^{2}
- ٢٤ ص^{2} لا^{2}

مثال ٦

- ٥ ص) - ٣٠ ص ر (٦ ر
- ٣٠ ص ر

مثال ٧

- ٦ ر^{2}) ١٨ لا^{2} ر^{2} (- ٣ لا^{2}
١٨ لا^{2} ر^{2}

اگر مقسوم اور مقسوم علیہ مین کوئی ایسا حرف مشترک ہو جسپر کچھ قوت پایا جاوی اور جو حرف مقسوم مین ہی اوسکا نشان قوت زیادہ ہے تو چاہیے کہ بڑی نشان قوت مین سے کم کو نکال کر باقی عدد کو نشان قوت اوسی حرف کا بناکر خارج قسمت مین لکھدین

مثال ۸

۲ لا^۲) ۸ لا^۳ (۴ لا
۸ لا^۳

اس صورت مین مقسوم لا^۳ کا ۳ نشان قوت ہی اور مقسوم علیہ مین لا^۲ کا ۲ نشان قوت ہی پس حاصل تفریق اسکا ۱ ہوا اور اوسکو نشان قوت لا کا بنایا پس لا ہوا اور اوسکو خارج قسمت میں ۴ کے آگے لکھا

مثال ۹

۷ لا ی) ۲۸ لا^۳ ی^۲ (۴ لا^۲ ی
۲۸ لا^۳ ی^۲

مثال ۱۰

۳ لا^۲ ی^۲) ۱۵ لا^۴ ی^۲ (۵ ی^۲
۱۵ لا^۴ ی^۲

مثال ۱۱

۶ ص لا) ۱۸ ص^۲ لا^۳ ی^۳ (۳ ص لا^۲ ی^۳
۱۸ ص^۲ لا^۳ ی^۳

مثال ۱۲

لا^۲) لا^۲ (۱
لا^۲

مثال ۱۳

ھ لا) ط ص^۲ لا (ط ص
ط ص لا

مثال ۱۴

ص^۲ لا) −۳ ص^۳ لا^۲ (−۳ ص لا
−۳ ص^۳ لا^۲

مثال ۱۵

−ی^۲ لا) ص لا^۳ ی^۵ (−ص ی^۳ لا^۲
ص ی^۵ لا^۳

مثال ۱۶

ط لا^۳ ی^۳) −ط لا^۴ ی^۳ (−لا ی
−ط لا^۴ ی^۳

مثال ۱۷

−د ص لا) د ص لا (−۱
د ص لا

مثال ۱۸

(ط − لا)) ۳ (ط − لا) (۳
۳ (ط − لا)

مثال ۱۹

۵ (ط + لا)^{۱/۲}) ۵ √(ط + لا) (۱
۵ √(ط + لا)

مثال ۲۰

ط لا^{۱/۲}) ط^۲ لا^{۳/۲} (ط لا
ط^۲ لا^{۳/۲}

مثال ۲۱

۳ ص لا^۲) ۶ ص^{۳/۲} لا^{۹/۴} (۲ ص^{۱/۲} لا^{۱/۴}
۶ ص^{۳/۲} لا^{۹/۴}

مثال ۲۲

لا^{۱/۲} ی^{۳/۴}) لا^{۵/۲} ی^{۵/۴} (لا^۲ ی^{۲/۴}
لا^{۵/۲} ی^{۵/۴}

مثال ۲۳

لا^{۱/۲} ص^{۱/۲}) −لا^{۳/۲} ص^{۳/۴} (−لا ص^{۱/۴}
−لا^{۳/۲} ص^{۳/۴}

مثال ۲۴

۴ ط لا^۳) ۱۷ ط^۲ لا^۴ (۴ ط لا + ط^۲ لا^۴ / ۴ ط لا^۳
۱۶ ط^۲ لا^۴
ط^۲ لا^۴

اس صورت مین ط^۲ لا^۴ باقی ہی اسکو نیچی مقسوم علیہ کی لکھ کر کسر کی موافق لکھ دیا

مثال ۲۵

۲ ص لا) ۳ ص لا − ۲ ص لا (ص لا + ص لا / ۲ ص لا

مثال ۲۶

* − ۴ لا) ۱۸ لا ی − ۱۶ لا ی (− ۴ لا ی + ۲ لا ی / ۴ لا

۲ لا ی

مثال ۲۷

۵ لا ی) − ۷ ۲ لا ی − ۵ ۲ لا ی (− ۵ ی − ۲ لا ی / ۵ لا ی

− ۲ لا ی

اب اگر مقسوم مین بہت رقمین ہون اور مقسوم علیہ مین ایک رقم ہو تو چاہیے کہ موافق قاعدہ اول کے
ہر رقم مقسوم کو مقسوم علیہ پر تقسیم کرین اور خارج قسمت دوسری طرف لکھتے جاوین

مثال ۱

۲ لا) ۶ لا + ۴ لا (۳ لا + ۲ لا
۶ لا
+ ۴ لا
۴ لا

مثال ۲

* − ۳ لا) ۱۸ لا − ۱۲ لا + ۳ لا (− ۶ لا + ۴ لا − ۱
۱۸ لا
− ۱۲ لا
− ۱۲ لا
×
۳ لا
۳ لا
×

مثال ۳

− ۴ لا ی) ۱۶ لا ی − ۱۲ لا ی + ۸ لا ی + ۴ لا ی (− ۴ لا ی + ۳ لا ی − ۲ لا − ۱
۱۶ لا ی
− ۱۲ لا ی
− ۱۲ لا ی
۸ لا ی
۸ لا ی
۴ لا ی
۴ لا ی
×

اگر مقسوم اور مقسوم علیہ دونو مین بہت بہت رقمین ہون تو چاہیے کہ اول دونو کو اس ترتیب سے
لکھین کہ جس جز مین نشان قوت کسی حرف کا سب سے بڑا ہو اوس جز کو اول اور جس جز مین نشان قوت اوس سے

حرف کا پہلے جزسی ایک کم ہو اوسی دوسرا جز بنادین اور علی ہذالقیاس ترتیب شان تو کسی حرف کی کہین اور یہہ بہی رعایت رکہین کہ جس حرف کی ترتیب کی موافق مقسوم لکہا ہی اوسی کی ترتیب کی موافق مقسوم علیہ بہی لکہا جاوے بعد اسکی موافق قواعد گذشتہ کی اول رقم مقسوم کو اول رقم مقسوم علیہ پر تقسیم کرین اور خارج قسمت کو ایک جگہہ لکہہ کر تمام مقدارون مقسوم علیہ مین ضرب کرین اور حاصل ضرب کو مقسوم کی نیچی لکہہ کر تفریق کرین جو باقی بچے اوسکی ساتہہ ایک اور رقم مقسوم مین سے اوتار کر اس باقی کے اول کو مقسوم علیہ کی اول رقم پر تقسیم کرین اور پہر خارج قسمت کو تمام رقمون مقسوم علیہ مین ضرب کر کر اور حاصل ضرب کو مقسوم سے نیچی لکہہ کر تفریق کرین اور اور اخیر تک یہی عمل جاری رکہین خارج قسمت معلوم ہو جاویگا

مثال ۱

$(\text{ل}+\text{د})\ \text{ل}^{2}+2\,\text{لد}+\text{د}^{2}\ (\text{ل}+\text{د}$

$\text{ل}^{2}+\text{لد}$

$\text{لد}+\text{د}^{2}$

$\text{لد}+\text{د}^{2}$

×

مثال ۲

$(\text{ل}-\text{د})\ \text{ل}^{2}-2\,\text{لد}+\text{د}^{2}\ (\text{ل}-\text{د}$

$\text{ل}^{2}-\text{لد}$

$-\text{لد}+\text{د}^{2}$

$-\text{لد}+\text{د}^{2}$

×

مثال ۳

$(\text{ل}+\text{د})\ \text{ل}^{3}+3\,\text{ل}^{2}\text{د}+3\,\text{ل}\text{د}^{2}+\text{د}^{3}\ (\text{ل}^{2}+2\,\text{لد}+\text{د}^{2}$

$\text{ل}^{3}+\text{ل}^{2}\text{د}$

$+2\,\text{ل}^{2}\text{د}+3\,\text{ل}\text{د}^{2}$

$2\,\text{ل}^{2}\text{د}+2\,\text{ل}\text{د}^{2}$

$\text{ل}\text{د}^{2}+\text{د}^{3}$

$\text{ل}\text{د}^{2}+\text{د}^{3}$

×

مثال ۴

$(\text{ل}-\text{د})\ \text{ل}^{3}-3\,\text{ل}^{2}\text{د}+3\,\text{ل}\text{د}^{2}-\text{د}^{3}\ (\text{ل}^{2}-2\,\text{لد}+\text{د}^{2}$

$\text{ل}^{3}-\text{ل}^{2}\text{د}$

$-2\,\text{ل}^{2}\text{د}+3\,\text{ل}\text{د}^{2}$

$-2\,\text{ل}^{2}\text{د}+2\,\text{ل}\text{د}^{2}$

$\text{ل}\text{د}^{2}-\text{د}^{3}$

$\text{ل}\text{د}^{2}-\text{د}^{3}$

×

مثال ۵

$(\text{ط}-\text{ل})\ \text{ط}^{5}-5\,\text{ط}^{4}\text{ل}+10\,\text{ط}^{3}\text{ل}^{2}-10\,\text{ط}^{2}\text{ل}^{3}+5\,\text{ط}\text{ل}^{4}-\text{ل}^{5}\ (\text{ط}^{4}-4\,\text{ط}^{3}\text{ل}+6\,\text{ط}^{2}\text{ل}^{2}-4\,\text{ط}\text{ل}^{3}+\text{ل}^{4}$

$\text{ط}^{5}-\text{ط}^{4}\text{ل}$

$-4\,\text{ط}^{4}\text{ل}+10\,\text{ط}^{3}\text{ل}^{2}$

$-4\,\text{ط}^{4}\text{ل}+4\,\text{ط}^{3}\text{ل}^{2}$

$6\,\text{ط}^{3}\text{ل}^{2}-10\,\text{ط}^{2}\text{ل}^{3}$

$6\,\text{ط}^{3}\text{ل}^{2}-6\,\text{ط}^{2}\text{ل}^{3}$

$-4\,\text{ط}^{2}\text{ل}^{3}+5\,\text{ط}\text{ل}^{4}$

$-4\,\text{ط}^{2}\text{ل}^{3}+4\,\text{ط}\text{ل}^{4}$

$\text{ط}\text{ل}^{4}-\text{ل}^{5}$

$\text{ط}\text{ل}^{4}-\text{ل}^{5}$

×

مثال ۶

۵ لا^{۳} − ۴ لا^{۲}) ۲۵ لا^{۶} − لا^{۴} − ۲ لا^{۳} − ۸ لا^{۲} (۵ لا^{۳} + ۴ لا^{۲} + ۳ لا + ۲

۲۵ لا^{۶} − ۲۰ لا^{۵}

\+ ۲۰ لا^{۵} − لا^{۴}

۲۰ لا^{۵} − ۱۶ لا^{۴}

۱۵ لا^{۴} − ۲ لا^{۳}

۱۵ لا^{۴} − ۱۲ لا^{۳}

\+ ۱۰ لا^{۳} − ۸ لا^{۲}

۱۰ لا^{۳} − ۸ لا^{۲}

مثال ۷

لا + د) لا^{۴} − د^{۴} (لا^{۳} − لا^{۲} د + لا د^{۲} − د^{۳}

لا^{۴} + لا^{۳} د

− لا^{۳} د − د^{۴}

− لا^{۳} د − لا^{۲} د^{۲}

\+ لا^{۲} د^{۲} − د^{۴}

\+ لا^{۲} د^{۲} + لا د^{۳}

− لا د^{۳} − د^{۴}

− لا د^{۳} − د^{۴}

مثال ۸

لا + د) لا^{۳} − د^{۳} (لا^{۲} − لا د + د^{۲} − $\frac{۲\,د^{۳}}{لا + د}$

لا^{۳} + لا^{۲} د

− لا^{۲} د − د^{۳}

− لا^{۲} د − لا د^{۲}

لا د^{۲} − د^{۳}

لا د^{۲} + د^{۳}

− ۲ د^{۳}

مثال ۹

۱ − لا) ۱ − ۲ لا + لا^{۲} (۱ − لا

۱ − لا

− لا + لا^{۲}

− لا + لا^{۲}

×

مثال ۱۰

۲ − لا) ۴ − ۴ لا + لا^{۲} (۲ − لا

۴ − ۲ لا

− ۲ لا + لا^{۲}

− ۲ لا + لا^{۲}

×

۱۱ تقسیم کرو لا^{۴} + ۴ لا^{۳} ص + ۶ لا^{۲} ص^{۲} + ۴ لا ص^{۳} + ص^{۴} کو لا + ص پر

جواب $لا^{3} + 3 لا^{2} ص + 3 لا ص^{2} + ص^{3}$

۱۲ تقسیم کرو $لا^{4} + 8 لا^{3} ء + 24 لا^{2} ء^{2} + 32 لا ء^{3} + 16 ء^{4}$ کو $لا + 2 ء$ پر

جواب $لا^{3} + 6 لا^{2} ء + 12 لا ء^{2} + 8 ء^{3}$

۱۳ تقسیم کرو $لا^{5} - ط^{5}$ کو $لا - ط$ پر **جواب** $لا^{4} + لا^{3} ط + لا^{2} ط^{2} + لا ط^{3} + ط^{4}$

۱۴ تقسیم کرو $6 لا^{4} + 9 لا^{3} - 15 لا$ کو $3 لا^{2} - 3 لا$ پر **جواب** $2 لا^{2} + 2 لا + 5$

۱۵ تقسیم کرو $9 لا^{6} - 46 لا^{5} + 95 لا^{2} + 150 لا$ کو $لا^{2} - 4 لا - 5$ پر

جواب $9 لا^{4} - 10 لا^{3} + 5 لا^{2} - 30 لا$

۱۶ تقسیم کرو لا کو لا − لا پر **جواب** ۱ + ۱ + ۱ + ۱ لانہایت

مثال ۱۷

$$(\tfrac{3}{2} لا - 2)\ لا^{4} - \tfrac{13}{6} لا^{3} + لا^{2} + \tfrac{4}{3} لا - 2\ (\tfrac{2}{3} لا^{3} - \tfrac{1}{2} لا^{2} + 1$$

$$لا^{4} - \tfrac{4}{3} لا^{3}$$

$$- \tfrac{5}{6} لا^{3} + لا^{2}$$

$$- \tfrac{5}{9} لا^{3} + لا^{2}$$

$$\tfrac{4}{3} لا - 2$$

$$\tfrac{4}{3} لا - 2$$

مثال ۱۸

$$(لا + ص)\ لا\ (1 - \tfrac{ص}{لا} + \tfrac{ص^{2}}{لا^{2}} - \tfrac{ص^{3}}{لا^{3}} + \tfrac{ص^{4}}{لا^{4}}\ وغیرہ$$

$$لا + ص$$

$$- ص$$

$$- ص - \tfrac{ص^{2}}{لا}$$

$$\tfrac{ص^{2}}{لا}$$

$$\tfrac{ص^{2}}{لا} + \tfrac{ص^{3}}{لا^{2}}$$

$$- \tfrac{ص^{3}}{لا^{2}}$$

$$- \tfrac{ص^{3}}{لا^{2}} - \tfrac{ص^{4}}{لا^{3}}$$

$$\tfrac{ص^{4}}{لا^{3}}$$

$$\tfrac{ص^{4}}{لا^{3}} + \tfrac{ص^{5}}{لا^{4}}$$

$$- \tfrac{ص^{5}}{لا^{4}}$$

*

مثال ۱۹

$$(لا - ص)\ لا\ (1 + \tfrac{ص}{لا} + \tfrac{ص^{2}}{لا^{2}} + \tfrac{ص^{3}}{لا^{3}} + وغیرہ$$

$$لا - ص$$

$$ص$$

$$ص - \tfrac{ص^{2}}{لا}$$

$$\tfrac{ص^{2}}{لا}$$

$$\tfrac{ص^{2}}{لا} - \tfrac{ص^{3}}{لا^{2}}$$

$$\tfrac{ص^{3}}{لا^{2}}$$

$$\tfrac{ص^{3}}{لا^{2}} - \tfrac{ص^{4}}{لا^{3}}$$

$$\tfrac{ص^{4}}{لا^{3}}$$

تقسیم کرو ۱ کو ۱ + لا پر جواب $1 - \text{لا} + \text{لا}^{2} - \text{لا}^{3} + \text{لا}^{4} -$ وغیرہ

تقسیم کرو ۲ کو ۲ − لا پر جواب $1 + \frac{\text{لا}}{2} + \frac{\text{لا}^{2}}{4} + \frac{\text{لا}^{3}}{8} +$ وغیرہ

تقسیم کرو ۳ کو ۳ + لا پر جواب $1 - \frac{\text{لا}}{3} + \frac{\text{لا}^{2}}{9} - \frac{\text{لا}^{3}}{27} +$ وغیرہ

تقسیم کرو ۴ کو ۴ − لا پر جواب $1 + \frac{\text{لا}}{4} + \frac{\text{لا}^{2}}{16} + \frac{\text{لا}^{3}}{64} +$ وغیرہ

دوسرا باب کسور کی قاعدی یعنی اختصار وغیرہ

جاننا چاہئی کہ کسور مین دو مقدار ہوتی ہین ایک تو خط عرضی کی اوپر اور ایک نیچی اوپر کی مقدار کو شمار کنندہ کہتی ہین اور نیچی کی مقدار کو نسب نما کہتے ہین مثلاً $\frac{\text{ط}}{\text{ح}}$ مین ط شمار کنندہ ہی اور ح نسب نما ہی اسیطرح $\frac{\text{لا} + \text{ط}}{2\,\text{لا} - \text{و}}$ مین لا + ط شمار کنندہ ہی اور ۲ لا − و نسب نما علی ہذا القیاس $\frac{\text{لا}}{\text{و}}$ مین لا شمار کنندہ ہی اور و نسب نما یہی حال ہر صورت کا ہی یہہ بہی جاننا چاہئے کہ کسور مین شمار کنندہ اور نسب نما سی یہہ مراد ہوتی ہی کہ شمار کنندہ نسب نما پر تقسیم کیا ہوا ہی اگر ایک کسر کی شمار کنندہ اور نسب نما کی علامتین تبدیل کیجائین تو کچہہ خلل واقع نہین ہوتا مثلاً $\frac{\text{لا}}{\text{و}}$ ایک کسر ہی اور ظاہر ہی کہ اسمین شمار کنندہ اور نسب نما دونو مثبت ہین پس اگر اسکے شمار کنندہ کو نسب نما پر تقسیم کرین اسطرح و) لا ($\frac{\text{لا}}{\text{و}}$ تو مثبت $\frac{\text{لا}}{\text{و}}$ خارج قسمت ہوتا ہی اب اگر شمار کنندہ اور نسب نما کی علامتین بدلین یعنی اسطرح $\frac{-\text{لا}}{-\text{و}}$ لکہین تو اس صورت مین بہی اگر شمار کنندہ کو نسب نما پر تقسیم کرین اسطرح −و) −لا ($\frac{\text{لا}}{\text{و}}$ تو بہی مثبت $\frac{\text{لا}}{\text{و}}$ خارج قسمت ہوتا ہی یہان سے معلوم ہوا کہ $\frac{\text{لا}}{\text{و}}$ اور $\frac{-\text{لا}}{-\text{و}}$ دونو ایک مقدار کی برابر ہین پس جب یہہ بات معلوم ہوئی کہ کسر $\frac{\text{لا}}{\text{و}}$ بعد تبدیلی علامت کی بہی اوسی مقدار کے برابر رہی جسکی پہلی تہی تو ثابت ہوا کہ علامت بدلنی سے کسر مین فرق نہین آتا اس صورت مین شمار کنندہ اور نسب نما کی علامتین یکسان تہین اگر مختلف ہون تو بہی ظاہر ہی کہ $\frac{-\text{لا}}{\text{و}} = -\frac{\text{لا}}{\text{و}}$ اور $\frac{\text{لا}}{-\text{و}} = -\frac{\text{لا}}{\text{و}}$ پس عموماً ثابت ہو گیا کہ کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما کی علامتین بدلین تو کچہہ فرق نہین آتا اگر کسی کسر کی شمار کنندہ اور نسب نما کو ایک ہی مقدار مین ضرب کرین تو قیمت مین کچہہ فرق نہین آتا اسواسطی کہ جب شمار کنندہ اور نسب نما دونو کو ایک ہی مقدار مین ضرب کیا تو ظاہر ہی کہ دونو ایک ہی نسبت پر زیادہ ہونگی پس جو نسبت کہ اونمین پہلی تہی وہی بعد ضرب کرنیکی رہیگی یعنی ایک مقدار مین ضرب کرنی سے کچہہ فرق نہین آتا

— اگر کسی کسر کی شمار کنندہ اور نسب نما کو ایک ہی مقدار پر تقسیم کرین تو بہی کچہہ فرق نہین آتا اسواسطی کہ جب ایک ہی مقدار پر دونو کو تقسیم کیا تو ظاہر ہی کہ دونو ایک ہی نسبت پر گہٹینگے پس جو نسبت کہ اونمین پہلی تہی وہی بعد تقسیم کی بہی رہیگی یعنی تقسیم کرنی سے کچہہ فرق نہین آتا ان دونو صورتون کے ثبوت کو مقادیر جبریہ مین اسطرح لکہتے ہین اول فرض کرو کہ $\frac{\text{لا}}{\text{ب}}$ ایک کسر ہی اگر اسکی شمار کنندہ اور نسب نما کو کسی مقدار مثلاً م مین ضرب کرین

تو $\frac{ط\,لا}{ط\,ی}$ کا جواب ہر جسکی شمار کنندہ کو نسب نما پر تقسیم کرین تو خارج قسمت $\frac{لا}{ی}$ ہوتا ہی یعنی $\frac{ط\,لا}{ط\,ی} = \frac{لا}{ی}$ پس معلوم ہوا کہ $\frac{لا}{ی}$ ایک کسر ہی جب اسکی شمار کنندہ اور نسب نما کو ط مین ضرب کیا تو بعد ضرب کرنیکی بہی $\frac{لا}{ی}$ کے برابر رہے یعنی ط مین ضرب کرنی سی کچھہ فرق نہ آیا اور یہی ثابت کرنا تہا

دوسری صورت فرض کرو کہ $\frac{ط\,لا}{ط\,ی}$ ایک کسر ہی اب اگر $\frac{ط\,لا}{ط\,ی}$ کے شمار کنندہ اور نسب نما کو علحدہ علحدہ ط پر تقسیم کرین تو $\frac{لا}{ی}$ رہجاویگا اور موافق (۱) کے بی تقسیم کرنی سے ط پر $\frac{ط\,لا}{ط\,ی} = \frac{لا}{ی}$ کے ہی تو معلوم ہوا کہ جو کچھہ مقدار $\frac{ط\,لا}{ط\,ی}$ کی ہی وہی ط پر تقسیم کرنی سے بعد رہتی ہی پس ثابت ہوا کہ کسی کسر کی شمار کنندہ اور نسب نما کو ایک مقدار پر تقسیم کرنی سے کچھہ فرق نہین آتا * اب ہم اس دوسری صورت کا فائدہ بیان کرتے ہین جب یہہ بات ثابت ہوئی کہ کسر کی شمار کنندہ اور نسب نما کو ایک مقدار پر تقسیم کرنی سے کچھہ فرق نہین آتا تو ظاہر ہی کہ اس کسر کا اختصار ہوسکتا ہی یعنی اگر کوئی کسر ایسی ہو کہ اوسکا شمار کنندہ اور نسب نما علحدہ علحدہ کسی مقدار پر پورا تقسیم ہوسکی تو از بسکہ تقسیم کرنی سی کچھہ فرق نہین آتا اور مقدار شمار کنندہ اور نسب نما کی تہوڑی ہوجاتی ہی تو وہ کسر بعد تقسیم کرنیکی مختصر ہوجاویگی اور کسر کا مختصر کرنا مساوات کی حل کرنے مین نہایت مفید اور ممد ہوتا ہی اب ہم چند مثالین اختصار کی لکھتے ہین

مثال ۱

$\frac{۳\,لا\,ی}{۳\,ط}$ اس کسر کا شمار کنندہ اور نسب نما ۳ پر تقسیم ہوسکتا ہی اسیواسطی بعد تقسیم کرنیکی $\frac{لا\,ی}{ط}$ رہجاویگا یعنی $\frac{۳\,لا\,ی}{۳\,ط} = \frac{لا\,ی}{ط}$ اور اسیطرح

مثال ۲

$\frac{۲\,لا\,ی}{۳\,لا\,ط} = \frac{۲\,ی}{۳\,ط}$ اسواسطی کہ لا پر شمار کنندہ اور نسب نما کو تقسیم کر لیا پس جو مقدار شمار کنندہ اور نسب نما مین مشترک ہوتی ہی اوس پر تقسیم کردیتے ہین

۳ $\frac{۳\,لا^۲}{۳\,ی\,لا} = \frac{لا}{ی}$ ۴ $\frac{۴\,لا\,ط}{۲\,لا\,ص} = \frac{۲\,ط}{ص}$ ۵ $\frac{۶\,لا^۲\,ی}{۹\,ی^۲\,لا} = \frac{۲\,لا}{۳\,ی}$

۶ $\frac{۷\,ص^۲\,ی^۴}{۱۴\,ی^۲\,ص^۳} = \frac{ی^۲}{۲\,ص}$ ۷ $\frac{۳\,لا^۲\,ی}{۹\,ص\,لا^۲\,ی} = \frac{۱}{۳\,ص}$ ۸ $\frac{۱۵\,ط^۲\,ص^۲}{۵\,ط^۲\,لا^۲} = \frac{۳\,ص^۲}{لا^۲}$

۹ $\frac{۳\,\overline{۴\,لا}}{۲\,\overline{۴\,لا}} = \frac{۳}{۲}$ ۱۰ $\frac{ص^۲\,\overline{۴\,ص}}{ص} = \frac{لا^۲}{۴\,ص}$ ۱۱ $\frac{۷\,لا^۲\,ی}{۲۱\,لا\,ی^۲} = \frac{لا}{۳\,ی}$

۱۲ $\frac{۲۵\,لا^۲\,ی^۲}{۵\,لا\,ی} = ۵\,لا\,ی$ ۱۳ $\frac{۶\,لا\,ص^۲}{۱۸\,لا^۲\,ص} = \frac{ص}{۳\,لا}$ ۱۴ $\frac{۸\,لا^۳\,ط^۲}{۴\,ط^۳\,لا} = \frac{۲\,لا^۲}{ط}$

١٥ $\frac{\sqrt[3]{س\, ص^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt[3]{ص^{\frac{1}{2}}\, س}} = ١$

١٦ $\frac{\sqrt[4]{س}\, \sqrt{ص}}{\sqrt[4]{ص}\, س} = \frac{\sqrt[4]{س}\sqrt[4]{ص}\sqrt[4]{ص}}{\sqrt[4]{س}\sqrt[4]{س}\sqrt[4]{س}\,\sqrt[4]{ص}} = \frac{\sqrt[4]{ص}}{\sqrt[4]{س}}$

١٧ $\frac{\sqrt{ع\, س^{٢}}}{\sqrt{ع^{٢}\, س}} = \frac{س^{\frac{٤}{٢}}\; ع^{\frac{١}{٢}}}{ع^{\frac{٤}{٢}}\; س^{\frac{١}{٢}}} = \frac{س^{\frac{٣}{٢}}\; س^{\frac{١}{٢}}\; ع^{\frac{١}{٢}}}{ع^{\frac{٣}{٢}}\; ع^{\frac{١}{٢}}\; س^{\frac{١}{٢}}} = \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{ع^{\frac{٣}{٢}}}$

١٨ $\frac{\sqrt{س^{٣}}}{\sqrt{س^{٥}}} = \frac{س\; س^{\frac{٣}{٢}}}{س^{٣}\; س^{\frac{١}{٢}}} = \frac{س\; س\; س^{\frac{١}{٢}}}{س^{٣}\; س^{\frac{١}{٢}}} = \frac{س^{٢}\; س^{\frac{١}{٢}}}{س^{٣}\; س^{\frac{١}{٢}}} = \frac{١}{س}$

١٩ $\frac{ص^{٢}\sqrt{س}}{ص^{\frac{١}{٢}}\sqrt{س}} = \frac{ص^{\frac{١}{٢}}\; ص^{\frac{٣}{٢}}\sqrt{س}}{ص^{\frac{١}{٢}}\sqrt{س}} = ص^{\frac{٣}{٢}}$

٢٠ $\frac{\sqrt{٣}\; س^{٢}}{٦\, س} = \frac{\sqrt{٣}\; س\, س}{٢ \times ٣\, س} = \frac{\sqrt{٣}\; س\, س}{٢\sqrt{٣}\sqrt{٣}\; س} = \frac{س}{٢\sqrt{٣}}$

٢١ $\frac{(س+ع)}{٦س+٦ع} = \frac{(س+ع)}{٦(س+ع)} = \frac{١}{٦}$

٢٢ $\frac{٣س^{٢}+٣ع^{٢}}{٩س^{٢}+٩ط^{٢}} = \frac{٣(س^{٢}+ع^{٢})}{٩(س^{٢}+ط^{٢})} = \frac{س^{٢}+ع^{٢}}{٣(س^{٢}+ط^{٢})}$

٢٣ $\frac{ط\, س\, ع - ط\, س}{ط^{٢}\, س\, ع + ط^{٢}\, س} = \frac{ط\, س\, (ع-١)}{ط^{٢}\, س\, (ع+١)} = \frac{(ع-١)}{ط\,(ع+١)}$

٢٤ $\frac{٩س^{٢}+٩س}{ب\, س\, ط - ب\, س} = \frac{٩\, س\, (س+١)}{ب\, س\, (ط-١)} = \frac{٩\,(س+١)}{ب\,(ط-١)}$

٢٥ $\frac{١٥س^{٣}-١٠س^{٢}+٥س}{٢٥س^{٣}-٢٠س^{٢}+١٥س} = \frac{٥س\,(٣س^{٢}-٢س+١)}{٥س\,(٥س^{٢}-٤س+٣)} = \frac{٣س^{٢}-٢س+١}{٥س^{٢}-٤س+٣}$

٢٦ $\frac{٦س^{٢}-٦ع^{٢}}{٣س+٣ع} = \frac{٦(س^{٢}-ع^{٢})}{٣(س+ع)} = \frac{٣\times٢\,(س+ع)(س-ع)}{٣(س+ع)} = ٢\,(س-ع)$

٢٧ $\frac{٤س^{٢}-٤}{٣س+٣} = \frac{٤(س^{٢}-١)}{٣(س+١)} = \frac{٤(س-١)(س+١)}{٣(س+١)} = \frac{٤(س-١)}{٣}$

٢٨ $\frac{٤س^{٢}-١}{٢س+١} = \frac{(٢س+١)(٢س-١)}{(٢س+١)} = ٢س-١$

٢٩ $$\frac{\sqrt{ل^2-1}}{\sqrt{ل+1}}=\frac{\sqrt{(ل+1)(ل-1)}}{\sqrt{ل+1}}=\frac{\sqrt{ل+1}\sqrt{ل-1}}{\sqrt{ل+1}}=\sqrt{ل-1}$$

٣٠ $$\frac{\sqrt{ل^2-ط^2}}{\sqrt{ل+ط}}=\frac{\sqrt{(ل+ط)(ل-ط)}}{\sqrt{ل+ط}}=\frac{\sqrt{ل+ط}\sqrt{ل-ط}}{\sqrt{ل+ط}}=\sqrt{ل-ط}$$

٣١ $$\frac{2ل-1}{1+\sqrt{2ل}}=\frac{(\sqrt{2ل}+1)(\sqrt{2ل}-1)}{\sqrt{2ل}+1}=\sqrt{2ل}-1$$

٣٢ $$\frac{\sqrt{3ل}+1}{3ل-1}=\frac{\sqrt{3ل}+1}{(\sqrt{3ل}+1)(\sqrt{3ل}-1)}=\frac{1}{\sqrt{3ل}-1}$$

٣٣ $$\frac{1+2ل}{1-4ل^2}=\frac{1+2ل}{(1+2ل)(1-2ل)}=\frac{1}{1-2ل}$$

٣٤ $$\frac{ل+\sqrt{3}}{ل^2-3}=\frac{ل+\sqrt{3}}{(ل+\sqrt{3})(ل-\sqrt{3})}=\frac{1}{ل-\sqrt{3}}$$

٣٥ $$\frac{1-\sqrt{ل}}{1-ل}=\frac{1-\sqrt{ل}}{(1-\sqrt{ل})(1+\sqrt{ل})}=\frac{1}{1+\sqrt{ل}}$$

٣٦ $$\frac{ل-\sqrt{ط}}{ل^2-ط}=\frac{ل-\sqrt{ط}}{(ل-\sqrt{ط})(ل+\sqrt{ط})}=\frac{1}{ل+\sqrt{ط}}$$

٣٧ $$\frac{(ل-ط)\sqrt{2ط ل^2-2ط^2 ل}}{\sqrt{2ط ل^3-2ط^3 ل}}=\frac{(ل-ط)\sqrt{2ط ل}\sqrt{ل-ط}}{\sqrt{2ط ل}\sqrt{ل^2-ط^2}}=\frac{(ل-ط)\sqrt{2ط ل}\sqrt{ل-ط}}{\sqrt{2ط ل}\sqrt{ل-ط}\sqrt{ل+ط}}=\frac{(ل-ط)}{\sqrt{ل+ط}}$$

٣٨ $$\frac{12ط^3ل^4+2ط^2ل^5}{18ط ص^2 ل+3ص^2 ل^2}=\frac{2ط^2ل^3(6ط ل+ل^2)}{3ص^2(6ط ل+ل^2)}=\frac{2ط^2 ل^3}{3ص^2}$$

٣٩ $$\frac{ل^2+(ط+س)ل+ط س}{ل^2+(ص+س)ل+ص س}=\frac{ل^2+ط ل+ل س+ط س}{ل^2+ص ل+س ل+ص س}=\frac{ل^2+ط ل+(ل+ط)س}{ل^2+ص ل+(ل+ص)س}$$

$$=\frac{ل(ل+ط)+(ل+ط)س}{ل(ل+ص)+(ل+ص)س}=\frac{(ل+ط)(ل+س)}{(ل+ص)(ل+س)}=\frac{ل+ط}{ل+ص}$$

٤٠ $$\frac{ط س+ص س+ط ء+ص ء}{ط ع+2ص ل+2ط ل+ص ع}=\frac{(ط+ص)س+(ط+ص)ء}{(ط+ص)ع+2ل(ط+ص)}=\frac{(س+ء)(ط+ص)}{(ع+2ل)(ط+ص)}=\frac{س+ء}{ع+2ل}$$

(۱۳) $\frac{3\text{لا}^2\text{ء} - 3\text{لا}^2}{\text{لا}\text{ء} - \text{لا}} = \frac{3\text{لا}^2(\text{ء}-1)}{\text{لا}(\text{ء}-1)} = 3\text{لا}$

جاننا چاہیئے کہ اختصار کی مشق سے اعمال جبریہ مین بڑی استعداد حاصل ہوتی ہے اسواسطے اسکی مشق بہت کرنی چاہیئے یہان فقط اکتالیس مثالین لکھی ہین تاکہ طالب علم کو طریقہ حل کرنیکا معلوم ہوجاوے اس جبر و مقابلہ کے آخر مین مثالین بہت ہین اونکو حل کرنی سے بڑی استعداد ہوگی

دوسری فصل تحویل کسور

بہت سی کسرون کے مخرج مشترک کرنی کو تحویل کہتے ہین یعنی جن کسرون کی مخرج مختلف ہون اگر اونکی مخرج اسطرح یکسان کرین کہ اونکی قیمت مین کچھہ فرق نہ آوے تو اس عمل کو تحویل کسور کہتی ہین قاعدہ تحویل کا یہہ ہی کہ جتنی کسرہ ہون اونمین سے اول کی شمار کنندہ کو باقیون کی نسب نما مین ضرب کر کر شمار کنندہ مقرر کرین اور تمام نسب نمایون کے حاصل ضرب کو نسب نما مقرر کرین اسیطرح دوسری کسر کے شمار کنندہ کو باقیون کے نسب نما مین ضرب کر کر شمار کنندہ مقرر کرین اور سب نسب نمایون کی حاصل ضرب کو نسب نما مقرر کرین اور علی القیاس سب کسرون مین یہی عمل جاری رکھین اسطرح جو کسرین حاصل ہونگی اون سب کے نسب نما یکسان ہونگی مثلاً $\frac{\text{لا}}{\text{ء}}$ اور $\frac{3\text{ء}}{2\text{ط}}$ اور $\frac{\text{ط}}{2\text{ء}}$ تین کسرین ہین اور انکی نسب نما مختلف ہین پس نسب نما یکسان کرنی کو اول کسر کے شمار کنندہ یعنی لا کو باقیون کے نسب نما مین یعنی 2ط اور 2ء مین ضرب کیا اسطرح کہ لا کو ط مین ضرب کیا تو $\text{لا}\,\text{ط}$ ہوا اور اس حاصل ضرب کو ء مین ضرب کیا تو $\text{لا}\,\text{ط}\,\text{ء}$ ہوا اسکو شمار کنندہ بنایا اب اول کی مخرج یعنی ء کو دوسری کسر کی مخرج مین یعنی ط مین ضرب کیا پس $\text{ط}\,\text{ء}$ ہوا اسکو تیسری کسر کے مخرج یعنی ء مین ضرب کیا تو $\text{ط}\,\text{ء}^2$ ہوا پس اسکو نسب نما مقرر کیا تو اول کسر $\frac{\text{لا}\,\text{ط}\,\text{ء}}{\text{ط}\,\text{ء}^2}$ ہوئے اسیطرح دوسری کسر کے شمار کنندہ یعنی 3ء کو باقیون کے نسب نما مین ضرب کیا یعنی پہلے 3 کو ء مین ضرب کیا اور 3ء کو تیسری کسر کے مخرج ء مین ضرب کیا تو 3ء^2 ہوا اسکو شمار کنندہ مقرر کیا اور تمام کسرون کی حاصل ضرب یعنی $\text{ط}\,\text{ء}^2$ کو نسب نما بنایا پس دوسری کسر $\frac{3\text{ء}^2}{\text{ط}\,\text{ء}^2}$ ہوئی اسیطرح تیسری کسر کے شمار کنندہ یعنی ط کو پہلی اور دوسری کسر کی مخرجون مین ضرب کیا یعنی ط کو ط مین ضرب کیا تو ط^2 ہوا اور اسکو ء مین ضرب کیا تو $\text{ط}^2\text{ء}$ ہوا اسکو شمار کنندہ بنایا اور سب مخرجون کی حاصل ضرب کو نسب نما بنایا پس تیسری $\frac{\text{ط}^2\text{ء}}{\text{ط}\,\text{ء}^2}$ ہوئی پس ان تینون کسرون $\frac{\text{لا}}{\text{ء}}$ $\frac{3\text{ء}}{\text{ط}}$ $\frac{\text{ط}}{\text{ء}}$ کی مخرج مشترک کیئے تو تین کسرین $\frac{\text{لا}\,\text{ط}\,\text{ء}}{\text{ط}\,\text{ء}^2}$ $\frac{3\text{ء}^2}{\text{ط}\,\text{ء}^2}$ $\frac{\text{ط}^2\text{ء}}{\text{ط}\,\text{ء}^2}$ ہوگئین اور ان تینون کے مخرج یکسان ہین یعنے سب کا مخرج $\text{ط}\,\text{ء}^2$ ہی اور انکا اختصار کرین تو وہی اصلی تینون کسرین ہوجاتی ہین پس معلوم ہوا کہ اس عمل کرنی سے مخرج تو یکسان ہوگئی اور کسر کی قیمت مین کچھہ فرق نہ آیا

مثال ۲ $\frac{2\text{لا}+3}{\text{لا}}$ اور $\frac{5\text{لا}+1}{3}$ کا مخرج مشترک کیا چاہتے ہین پس $\overline{2\text{لا}+3}$ کو 3 مین ضرب کیا پس $6\text{لا}+9$ حاصل ضرب ہوا اور نسب نمایون کے حاصل ضرب یعنی 3لا کو نسب نما بنایا پس اول کسر یہہ ہوئی $\frac{6\text{لا}+9}{3\text{لا}}$ اور دوسری کسر کی شمار کنندہ کو یعنے $5\text{لا}+1$ کو لا مین ضرب کیا تو $5\text{لا}^2+\text{لا}$ حاصل ہوا اور 3لا کو

نسب نما بنایا تو دوسری کسر $\frac{5ل^2+ل}{3ل}$ ہوئی یعنی دونوں کسریں $\frac{6ل+9}{3ل}$ اور $\frac{5ل^2+ل}{3ل}$ ہیں نئی اُن دونوں کے نسب نما یکساں ہیں

۳ $\frac{2+ل}{د}$ اور $\frac{3+ل}{ل}$ مخرج مشترک کرو جواب $\frac{2ل+ل^2}{دل}$ اور $\frac{3د+دل}{دل}$

۴ $\frac{ل-1}{ل+1}$ اور $\frac{2ل}{ط}$ جواب $\frac{طل-ط}{طل+ط}$ اور $\frac{2ل^2+2ل}{طل+ط}$

۵ $\frac{1-ط}{ل+1}$ اور $\frac{2ل-1}{د}$ جواب $\frac{د-دط}{دل+د}$ اور $\frac{2ل^2+ل-1}{دل+د}$

۶ $\frac{ل-د}{ل+د}$ اور $\frac{ل+د}{ل-د}$ جواب $\frac{(ل-د)^2}{ل^2-د^2}$ اور $\frac{(ل+د)^2}{ل^2-د^2}$

۷ $\frac{1-3ل}{1+3ل}$ اور $\frac{1-2ل}{1+2ل}$ جواب $\frac{1-ل-6ل^2}{1+5ل+6ل^2}$ اور $\frac{1+ل-6ل^2}{1+5ل+6ل^2}$

۸ $\frac{2}{ل+1}$ $\frac{3}{ل-1}$ $\frac{4}{3}$ جواب $\frac{6(ل-1)}{3(ل^2-1)}$ اور $\frac{9(ل+1)}{3(ل^2-1)}$ اور $\frac{4(ل^2-1)}{3(ل^2-1)}$

۹ $\frac{ل}{ل-ط}$ $\frac{د}{ل+ط}$ $\frac{ل^2}{3}$ جواب $\frac{3ل(ل+ط)}{3(ل^2-ط^2)}$ اور $\frac{3د(ل-ط)}{3(ل^2-ط^2)}$ اور $\frac{ل^2(ل^2-ط^2)}{3(ل^2-ط^2)}$

۱۰ $\frac{2ل}{\sqrt{ل+1}}$ اور $\frac{\sqrt{3}(ل+1)}{\sqrt{ل-1}}$ جواب $\frac{2ل\sqrt{ل-1}}{\sqrt{ل^2-1}}$ اور $\frac{\sqrt{3}(ل+1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{ل^2-1}}$

۱۱ $\frac{\sqrt{ل}+2}{\sqrt{ل}-2}$ اور $\frac{3-\sqrt{ل}}{2+\sqrt{ل}}$ جواب $\frac{ل+4\sqrt{ل}+4}{ل-4}$ اور $\frac{6-5\sqrt{ل}+ل}{ل-4}$

تیسری فصل قاعدہ جمع کرنی کسور کا

کسور کی جمع کرنی کا قاعدہ یہہ ہی کہ جن کسروں کا جمع کرنا مطلوب ہی پہلی سب کا مخرج مشترک کرنا چاہیئے بعد اسکی صورتوں کی شمار کنندوں کو جمع کرکر حاصل جمع کو شمار کنندہ بنانا چاہیئے اور اس حاصل جمع کے نیچے وہ نسب نما لکھنا چاہیئے جو مشترک ہی پس یہہ کسر حاصل جمع سب کسروں کا ہی مثلاً $\frac{د}{ل-1}$ اور $\frac{3}{ل}$ کو جمع کرنا چاہتے ہیں پس تحویل کے قاعدی کے موافق سب کا مخرج مشترک کیا تو $\frac{دل}{ل^2-ل}$ $\frac{3ل-3}{ل^2-ل}$ ہوا

اب ان شمار کنندون کو جمع کیا تو ۲لا + ۳لا − ۳ ہوا انکے نیچی اسکی لا² − لا لکہا تو حاصل جمع یہہ کسر ہوئے

$$\frac{\text{۲لا} + \text{۳لا} - ۳}{\text{لا}^{۲} - \text{لا}}$$

مثال ۲ $\frac{\text{۳لا}}{\text{۲ء}} + \frac{\text{۲لا}}{۳} + \frac{۱۳}{\text{۴ط}}$ پہلی اسکا مخرج مشترک کیا تو یہہ تین کسرین حاصل ہوئین

$\frac{\text{۳۶ طلا}}{\text{۲۴ طء}} + \frac{\text{۱۶ لاءط}}{\text{۲۴ طء}} + \frac{\text{۱۸ ء}^{۲}}{\text{۲۴ طء}}$ ان کسرون کے شمار کنندون کو جمع کیا اور انکے نیچی ۲۴ طء لکہا

تو یہہ $\frac{\text{۳۶ طلا} + \text{۱۶ لاءط} + \text{۱۸ ء}^{۲}}{\text{۲۴ طء}}$ حاصل جمع ہوا

۳ $\frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}-۱} + \frac{\text{لا}-۱}{\text{لا}+۱} + \frac{\text{ء}+۱}{\text{ء}-۱}$ مخرج مشترک کیا

تو $\frac{(\text{لا}+۱)^{۲}(\text{ء}-۱)}{(\text{لا}^{۲}-۱)(\text{ء}-۱)} + \frac{(\text{لا}-۱)^{۲}(\text{ء}-۱)}{(\text{لا}^{۲}-۱)(\text{ء}-۱)} + \frac{(\text{لا}^{۲}-۱)(\text{ء}+۱)}{(\text{ء}-۱)(\text{لا}^{۲}-۱)}$ شمار کنندون کو جمع کیا اور مشترک نسب نما لکہا

تو حاصل جمع یہہ $\frac{(\text{لا}+۱)^{۲}(\text{ء}-۱) + (\text{لا}-۱)^{۲}(\text{ء}-۱) + (\text{لا}^{۲}-۱)(\text{ء}+۱)}{(\text{لا}^{۲}-۱)(\text{ء}-۱)} = \frac{(\text{ء}-۱)\left((\text{لا}+۱)^{۲}+(\text{لا}-۱)^{۲}\right) + (\text{لا}^{۲}-۱)(\text{ء}+۱)}{(\text{لا}^{۲}-۱)(\text{ء}-۱)}$ ہوا

۴ $\frac{\text{۲لا}-۱}{\text{۲لا}+۱} + \frac{\text{۲لا}+۱}{\text{۲لا}-۱}$ مخرج مشترک کیا تو یہہ حاصل ہوا

$\frac{(\text{۲لا}-۱)^{۲}}{\text{۴لا}^{۲}-۱} + \frac{(\text{۲لا}+۱)^{۲}}{\text{۴لا}^{۲}-۱}$ شمار کنندون کو جمع کیا اور نسب نما مشترک لکہا تو $\frac{(\text{۲لا}-۱)^{۲}+(\text{۲لا}+۱)^{۲}}{\text{۴لا}^{۲}-۱}$

۵ $\frac{۲}{\text{ط}-۱} + \frac{\text{ط}-۱}{\text{ط}+۱}$ جواب $\frac{۲(\text{ط}+۱)+(\text{ط}-۱)^{۲}}{\text{ط}^{۲}-۱}$

۶ $\frac{\text{لا}-\text{ء}^{۲}}{۳} + \frac{\text{ء}^{۲}}{\text{۲لا}} + \frac{۲}{\text{لا}}$ جواب $\frac{\text{۲لا}^{۳}+(\text{۳لا}-\text{۲لا}^{۲})\text{ء}^{۲}+\text{۲۴لا}}{\text{۶لا}^{۲}}$

۷ $\frac{\text{۲لا}-۱}{\text{لا}+۱} + \frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}+۱}$ جواب $\frac{\text{۳لا}}{\text{لا}+۱}$

۸ $\frac{\text{ط}-۱}{\text{لا}+\text{ط}} + \frac{\text{لا}-\text{ط}}{\text{ط}+۱}$ جواب $\frac{\text{لا}^{۲}-۱}{(\text{لا}+\text{ط})(\text{ط}+۱)}$

٩ $\frac{ل}{ل-١} + \frac{ل^٢}{ل+١} + \frac{ل^٣}{١-ل}$ جواب $\frac{ل^٥ - ل^٤}{ل + ل^٢ - ل^٣ - ١}$

١٠ $\frac{١ - ٣ل}{ل} + \frac{٣ل + ١}{٣ل - ١}$ جواب $\frac{٧ل - ٦ل^٢ - ١}{٣ل^٢ - ل}$

١١ $\frac{٣ل}{٧} + \frac{٥ل}{٩} + \frac{٤ل}{١١}$ جواب $\frac{٩٣٤ل}{٦٩٣}$

١٢ $\frac{٣ط^٢}{٢ص} + \frac{٢ط}{٥} + \frac{٢ص}{٧ط}$ جواب $\frac{١٠٥ط^٣ + ٢٨ط^٢ص + ٢٠ص^٢}{٧٠ط ص}$

١٣ $\frac{٢ل+١}{٣} + \frac{٤ل+٢}{٥} + \frac{ل}{٧}$ جواب $\frac{١٦٩ل + ٧٧}{١٠٥}$

١٤ $\frac{ل+١}{ل+٢} + \frac{ل}{٣} + \frac{٢ل}{٥}$ جواب $\frac{١١ل^٢ + ٣٧ل + ١٥}{١٥ل + ٣٠}$

١٥ $\frac{ط+ل}{ط-ل} + \frac{ط-ل}{ط+ل}$ جواب $\frac{٢(ط^٢ + ل^٢)}{ط^٢ - ل^٢}$

١٦ $ل ی + \frac{٢ل^٢ ی}{ل-١}$ جواب $\frac{٣ل^٢ی - ل ی}{ل-١}$

١٧ $\frac{١}{ل ی - ل} + ٣ل$ جواب $\frac{٣ل^٢ی - ٣ل^٢ + ١}{ل ی - ل}$

١٨ $\frac{\sqrt{ل} - \sqrt{ی}}{\sqrt{ل} + \sqrt{ی}} + \frac{٢\sqrt{ی} - ٢\sqrt{ل}}{\sqrt{ی} + \sqrt{ل}}$ جواب $\frac{ی - ل}{ی + ٢\sqrt{ی ل} + ل}$

١٩ $\frac{\sqrt{ط+ل}}{\sqrt{ل}} + \frac{\sqrt{ل}}{\sqrt{ط+ل}}$ جواب $\frac{ط + ٢ل}{\sqrt{ط ل + ل^٢}}$

٢٠ $\frac{\sqrt{٢ل - ل^٢}}{\sqrt{٢ل + ل^٢}} + \frac{\sqrt{٢ل + ل^٢}}{\sqrt{٢ل - ل^٢}}$ جواب $\frac{٤ل}{\sqrt{٤ل^٢ - ل^٤}} = \frac{٤}{\sqrt{٤ - ل^٢}}$

٢١ $\frac{\sqrt{ل}}{\sqrt{ل-١}} + \frac{\sqrt{ل-١}}{٢\sqrt{ل}} + \frac{٣\sqrt{ل}}{٢}$ جواب $\frac{١ + ل + ٣ل\sqrt{ل-١}}{٢\sqrt{ل - ل^٢}}$

٢٢ $\frac{\sqrt{ل-٥}}{\sqrt{ل-٣}} + \frac{\sqrt{ل-٣}}{\sqrt{ل-٥}}$ جواب $\frac{٢(ل - ٤)}{\sqrt{١٥ - ٨ل + ل^٢}}$

۲۳ $\frac{\sqrt{\text{۲}}+\sqrt{\text{لا}}}{\sqrt{\text{۲}}-\sqrt{\text{لا}}}+\frac{\sqrt{\text{۳}}+\sqrt{\text{لا}}}{\sqrt{\text{۳}}-\sqrt{\text{لا}}}$ جواب $\frac{\text{۲}(\sqrt{\text{۶}}-\text{لا})}{\sqrt{\text{۶}}-\sqrt{\text{۲لا}}-\sqrt{\text{۳لا}}+\text{لا}}$

۲۴ $\frac{\sqrt{\text{۵}}\ \text{لا}}{\sqrt{\text{لا}}}+\frac{\sqrt{\text{۵لا}}}{\text{لا}}$ جواب $\frac{\sqrt{\text{۵}}\ (\text{لا}+\text{۱})}{\sqrt{\text{لا}}}$

۲۵ $\frac{\text{لا}-\text{۱}}{\text{لا}}+\text{۱}$ جواب $\frac{\text{۲لا}-\text{۱}}{\text{لا}}$ ۲۶ $\frac{\text{ط}-\text{لا}}{\text{لا}}+\text{۱}$ جواب $\frac{\text{ط}}{\text{لا}}$

چوتھی فصل قاعدہ تفریق کسور کا

کسور کی تفریق کا قاعدہ یہہ ہی کہ مفروق اور مفروق منہ کا مخرج مشترک کرین بعد اسکی مفروق منہ کی شمار کنندہ مین سے مفروق کی شمار کنندہ کو نکال کر باقی کو شمار کنندہ بناوین اور اسکی نیچی نسب نما جو مخرج مشترک کرنی سے حاصل ہوا ہی لکھین یہہ کسر حاصل تفریق مطلوب ہی

مثلا $\frac{\text{۳ لا}}{\text{ء}}$ مین سی $\frac{\text{۴ لا}}{\text{۳ ء}}$ کو تفریق کرین پس بعد مخرج مشترک کرنی کی یہہ دونو کسرین یہہ ہو جاتی ہین $\frac{\text{۹ لا ء}}{\text{۳ ء}^{\text{۲}}}-\frac{\text{۴ لا ء}}{\text{۳ ء}^{\text{۲}}}$ اب ۹ لا ء مین سے ۴ لا ء کو نکالا تو ۵ لا ء رہی اسکے نیچی ۳ ء۲ لکھا تو حاصل تفریق یہہ $\frac{\text{۵ لا ء}}{\text{۳ ء}^{\text{۲}}}$ حاصل ہوا

۲ مثال $\frac{\text{۴ ط}}{\text{۳ لا}}-\frac{\text{۵ ء}}{\text{۲ ص}}$ بعد مخرج مشترک کرنی کے $\frac{\text{۸ ط ص}}{\text{۶ لا ص}}-\frac{\text{۱۵ لا ء}}{\text{۶ لا ص}}$

شمار کنندونین تفریق کی اور مخرج مشترک لکھا تو حاصل تفریق مطلوب یہہ $\frac{\text{۸ ط ص}-\text{۱۵ لا ء}}{\text{۶ لا ص}}$ ہوا

۳ $\frac{\text{لا}-\text{ط}}{\text{لا}}-\frac{\text{۲ لا}}{\text{لا}+\text{ط}}$ مخرج مشترک کیا تو یہہ $\frac{\text{لا}^{\text{۲}}-\text{ط}^{\text{۲}}}{\text{لا}^{\text{۲}}+\text{ط لا}}-\frac{\text{۲ لا}^{\text{۲}}}{\text{لا}^{\text{۲}}+\text{ط لا}}$ حاصل ہوا

شمار کنندون مین تفریق کی اور نسب نما لکھا تو یہہ $\frac{-\text{لا}^{\text{۲}}-\text{ط}^{\text{۲}}}{\text{لا}^{\text{۲}}+\text{ط لا}}=\frac{-(\text{لا}^{\text{۲}}+\text{ط}^{\text{۲}})}{\text{لا}^{\text{۲}}+\text{ط لا}}$

۴ $\frac{\text{۳ لا}}{\text{لا}-\text{۱}}-\frac{\text{لا}+\text{۱}}{\text{۳ لا}}$ جواب $\frac{\text{۱۰ لا}^{\text{۲}}-\text{۱}}{\text{۳ لا}^{\text{۲}}-\text{۳ لا}}$

۵ $\frac{\text{۴ لا}}{\text{۵}}-\frac{\text{۳ لا}+\text{۱}}{\text{لا}+\text{۱}}$ جواب $\frac{\text{۴ لا}^{\text{۲}}-\text{۱۱ لا}-\text{۵}}{\text{۵}(\text{لا}+\text{۱})}$

۶ $\frac{۴ط+ک}{۳} - \frac{۲ط-۱}{۳ط}$ جواب $\frac{۴ط^۲+۱}{۳ط}$

۷ $\frac{۱}{ل-د} - \frac{۱}{ل+د}$ جواب $\frac{۲د}{ل^۲-د^۲}$

۸ $\frac{۴ل}{۷} - \frac{۳ل-۷}{۸}$ جواب $\frac{۱۱ل+۴۹}{۵۶}$

۹ $\frac{۲طل+ل^۲}{۲ل+۱} - \frac{۲ط+ل}{۲}$ جواب $\frac{-(۲ط+ل)}{۴ل+۲}$

۱۰ $\frac{ل^۲+۲لد}{۳ل} - \frac{ل+د}{۵}$ جواب $\frac{۲ل+۷د}{۱۵}$

۱۱ $\frac{۲\sqrt{۱-ل}}{\sqrt{۱+ل}} - \frac{\sqrt{۱+ل}}{\sqrt{۱-ل}}$ جواب $\frac{۱-۳ل}{\sqrt{۱-ل^۲}}$

۱۲ $\frac{\sqrt{ط}}{\sqrt{ط}-\sqrt{ل}} - \frac{\sqrt{ل}}{\sqrt{ل}-\sqrt{ط}}$ جواب $\frac{ط-ل}{۲\sqrt{طل}-ل-ط}$

۱۳ $\frac{\sqrt{۲}-۱}{ل} - \frac{۱+\sqrt{۲}}{ل}$ جواب $\frac{-۲}{ل}$

۱۴ $\frac{۳ل-۱}{۱+\sqrt{۳ل}} - \frac{۲ل-۱}{۱+\sqrt{۲ل}}$ جواب $\sqrt{۳ل}-\sqrt{۲ل}$

۱۵ $\frac{ل}{\sqrt{۵}-۱} - \frac{ل}{\sqrt{۵}+۱}$ جواب $\frac{\sqrt{۵}\,ل}{-۲}$

۱۶ $۴ل - \frac{د}{ل}$ جواب $\frac{۴ل^۲-د}{ل}$ ۱۷ $۵ل - \frac{۲}{ل-۱}$ جواب $\frac{۶ل-۵ل^۲-۲}{ل-۱}$

۱۸ $\frac{ل+د}{ل} - ۱$ جواب $\frac{د}{ل}$ ۱۹ $\frac{۳+دل}{۲دل} - ۱$ جواب $\frac{۳-دل}{۲دل}$

۲۰ $\frac{ل+\sqrt{ل}}{ل-\sqrt{ل}} - ۱$ جواب $\frac{۲\sqrt{ل}}{ل-\sqrt{ل}}$

پانچوین فصل قاعدہ ضرب کسور کا

کسور کی ضرب کرنیکا قاعدہ یہہ ہی کہ سب کسرون کی شمار کنندون کو اپسمین ضرب کرکی حاصل ضرب کو شمار کنندہ مقرر کرین اور اون کسرون کی نسب نمایون کو باہم ضرب کرکی نسب نما مقرر کرین پس یہہ کسر حاصل ضرب سب کسرون کی ہوگی اور اگر کسی مقدار صحیح کو کسر مین ضرب کرنا مطلوب ہو تو اوس صحیح یعنی عدد کا نسب نما ا کا فرض کرین بعد اوسکی قاعدہ مذکورہ بالا جاری کرین

مثال $\frac{\text{ل}}{\text{۳}} \times \frac{\text{ی}}{\text{ل}} \times \frac{\text{ط}}{\text{ی}}$ ان تین کسرون کو ضرب کرنا چاہتے ہین پس سب شمار کنندون کو ضرب کیا لا ی ط حاصل ہوا اسکو شمار کنندہ مقرر کرکے نسب نمایون کی حاصل ضرب کو یعنی ۳ ل ی کو نسب نما مقرر کیا پس حاصل ضرب یہہ کسر $\frac{\text{ل ی ط}}{\text{۳ ل ی}}$ ہوئے

مثال ۲ $\frac{\text{۳ل}}{\text{ی}^{۲}} \times \frac{\text{۵ی}}{\text{ل}^{۲}\text{ط}} \times \frac{\text{۲ل}^{۲}}{\text{ط}^{۲}}$ اسکی شمار کنندون کو ضرب کیا تو $\text{۳۰ ل}^{۳}\text{ ی}$ ہوا اور نسب نمایون کو ضرب کیا تو $\text{ی}^{۲}\text{ ل}^{۲}\text{ ط}^{۳}$ ہوا اور جب $\text{۳۰ ل}^{۳}\text{ ی}$ کو شمار کنندہ مقرر کیا اور $\text{ی}^{۲}\text{ ل}^{۲}\text{ ط}^{۳}$ کو نسب نما بنایا تو حاصل ضرب یہہ کسر $\frac{\text{۳۰ ل}^{۳}\text{ ی}}{\text{ی}^{۲}\text{ ل}^{۲}\text{ ط}^{۳}}$ ہوئی اور اسکا اختصار کیا تو یہہ $\frac{\text{۳۰ ل}}{\text{ی ط}^{۳}}$ حاصل ہوا

مثال ۳ $\frac{\text{ل} - \text{۱}}{\text{ل} + \text{۱}} \times \frac{\text{۲ل} + \text{۲}}{\text{ل} - \text{۱}}$ **جواب** $\frac{\text{۲}(\text{ل}+\text{۱})(\text{ل}-\text{۱})}{(\text{ل}+\text{۱})(\text{ل}-\text{۱})} = \text{۲}$

مثال ۴ $\frac{\text{۳ل} + \text{۱}}{\text{ل}} \times \frac{\text{ل}^{۲}}{\text{۲ل} - \text{۱}}$ **جواب** $\frac{\text{۳ل}^{۲} + \text{ل}}{\text{۲ل} - \text{۱}}$

مثال ۵ $\frac{\text{ل} + \text{ط}}{\text{ل} - \text{ط}} \times \frac{\text{۲ط ل}}{\text{ل} + \text{ط}}$ **جواب** $\frac{\text{۲ط ل}}{\text{ل} - \text{ط}}$

مثال ۶ $\frac{\text{ل} + \text{۱}}{\text{ل}} \times \frac{\text{ل}}{\text{ل} - \text{۱}} \times \frac{\text{ل} - \text{۱}}{\text{۲ل}}$ **جواب** $\frac{\text{ل} + \text{۱}}{\text{۲ل}}$

مثال ۷ $\frac{\text{۳ل} - \text{۶}}{\text{ل}} \times \frac{\text{ل}^{۲}}{\text{ل}^{۲} - \text{۴ل} + \text{۴}}$ **جواب** $\frac{\text{۳ل}^{۲} - \text{۶ل}}{(\text{ل} - \text{۲})^{۲}}$

مثال ۸ $\frac{\text{۲ط}}{\text{ل} - \text{ط}} \times \frac{\text{ل}^{۲} - \text{ط}^{۲}}{\text{۸}}$ **جواب** $\frac{\text{ط}^{۲} + \text{ط ل}}{\text{۴}}$

۹ $\frac{3\text{ل}^2}{5\text{ل}+10} \times \frac{15\text{ل}-30}{2\text{ل}}$ جواب $\frac{9\text{ل}^2-18\text{ل}}{2\text{ل}+4}$

۱۰ $\frac{\sqrt{\text{ط}+\text{ل}}}{\sqrt{\text{ل}}-1} \times \frac{\sqrt{\text{ط}+\text{ل}}}{\sqrt{\text{ل}}+1}$ جواب $\frac{\text{ط}+\text{ل}}{\text{ل}-1}$

۱۱ $\frac{\sqrt{\text{ل}}}{1+\text{ل}} \times \frac{(\text{ل}+1)\sqrt{\text{د}}}{\sqrt{\text{ل}}} \times \frac{3}{\text{ل}-1}$ جواب $\frac{3\sqrt{\text{د}}}{\text{ل}-1}$

۱۲ $\frac{\sqrt{4+\text{ل}^2}}{\sqrt{\text{ل}}} \times \frac{\text{ل}\sqrt{3\text{د}}}{\sqrt{\text{ل}^2+4}}$ جواب $\sqrt{3\text{ل}\text{د}}$

۱۳ $4\text{ل} \times \frac{3\text{ل}}{\text{ل}-1}$ جواب $\frac{12\text{ل}^2}{\text{ل}-1}$

۱۴ $\frac{\text{ل}\text{د}}{\text{ل}-2} \times 3\text{ل}$ جواب $\frac{3\text{ل}^2\text{د}}{\text{ل}-2}$

۱۵ $\frac{\text{ط}\,\text{ل}}{2(\text{ل}-\text{ط})} \times (\text{ل}-\text{ط})$ جواب $\frac{\text{ط}\,\text{ل}}{2}$

چھٹی فصل کسور کی تقسیم کرنیکا قاعدہ

کسور کی تقسیم کرنی مین ضرب ہی کا قاعدہ کرنا پڑتا ہی صرف اتنا فرق ہی کہ مقسوم علیہ کو اولٹ کر عمل ضرب کا جاری کرتے ہین یعنی جس کسر پر تقسیم کرنا ہوتا ہی اوسکی شمار کنندہ کو نسب نما کر لیتے ہین اور نسب نما کو شمار کنندہ بنا لیتی ہین بعد اسکی مقسوم کی کسر کو اس اولٹی ہوئی کسر مین ضرب کر دیتے ہین حاصل ضرب خارج قسمت مطلوب ہوتا ہی

مثال $\frac{2}{\text{ل}}$ کو $\frac{3}{\text{د}}$ پر تقسیم کرنا چاہتے ہین یعنی $\frac{2}{\text{ل}} \div \frac{3}{\text{د}}$ مطلوب ہی پس ۳ کو نسب نما بنایا اور د کو شمار کنندہ تو یہہ حاصل ہوا $\frac{\text{د}}{3}$ اسکو $\frac{2}{\text{ل}}$ مین ضرب کیا اسطرح

$\frac{2}{\text{ل}} \times \frac{\text{د}}{3}$ تو یہہ $\frac{2\text{د}}{3\text{ل}}$ خارج قسمت ہوا

مثال ۲ $\frac{4\text{ل}^2}{3\text{د}} \div \frac{2\text{د}^2}{\text{ط}}$ اسیواسطی مقسوم علیہ کو اولٹا اور عمل ضرب کیا تو

یہہ $\frac{4\text{ل}^2}{3\text{د}} \times \frac{\text{ط}}{2\text{د}^2} = \frac{4\text{ل}^2\text{ط}}{6\text{د}^3}$ حاصل ہوا

۳ $\frac{\text{ل}}{\text{ل}+2} \div \frac{\text{د}}{\text{ل}} = \frac{\text{ل}}{\text{ل}+2} \times \frac{\text{ل}}{\text{د}} = \frac{\text{ل}^2}{\text{ل}\text{د}+2\text{د}}$

۴ $\frac{\text{ل}^2}{\text{ل}-1} \div \frac{2\text{ل}-2}{\text{ل}} = \frac{\text{ل}^2}{\text{ل}-1} \times \frac{\text{ل}}{2\text{ل}-2} = \frac{\text{ل}^3}{2(\text{ل}-1)^2}$

٥) ١/(١+ل) ÷ (١−ل)/(١+ل) = ١/(١+ل) × (١+ل)/(١−ل) = (١+ل)/((١−ل)(١+ل)) = ١/(١−ل)

٦) ٣/(ل+٢) ÷ (ل−٢)/٤ = ٣/(ل+٢) × ٤/(ل−٢) = ١٢/((ل−٢)(ل+٢)) = ١٢/(ل² − ٤)

٧) ٢ط ل/(١+ل) ÷ (١+ل)/(٢ط ل) = ٢ط ل/(١+ل) × ٢ط ل/(١+ل) = ٤ط² ل²/(ل² + ٢ل + ١)

٨) (٧ل − ١)/٥ ÷ (٣ل + ١)/٧ = (٧ل − ١)/٥ × ٧/(٣ل + ١) = (٤٩ل − ٧)/(١٥ل + ٥)

٩) (١ − ل²)/٧ ÷ (١ + ل)/٥ = (١ − ل²)/٧ × ٥/(١ + ل) = ((١ − ل)(١ + ل)٥)/((١ + ل)٧) = (٥ − ٥ل)/٧

١٠) (ل + ط)/(ل − ط) ÷ (٤ل + ٤ط)/(ل² − ط²) = (ل + ط)/(ل − ط) × (ل² − ط²)/((ل + ط)٤) = ((ل − ط)(ل + ط)(ل + ط))/((ل − ط)(ل + ط)٤) = (ل + ط)/٤

١١) √(ل − ١)/√ط ÷ √(ل − ١)/ط = √(ل − ١)/√ط × ط/√(ل − ١) = √(ل − ١) ط/(√(ل − ١) √ط) = √(ل − ١) √ط/√(ل − ١) = √(ل ط − ط)/√(ل − ١)

١٢) √(ل + ٣)/ل ÷ √ل/√(ل − ٣) = √(ل + ٣)/ل × √(ل − ٣)/√ل = √(ل² − ٩)/(ل√ل)

١٣) (ل² − ١)/(ل + ١) ÷ (ل + ١)/(ل − ١) = (ل² − ١)/(ل + ١) × (ل − ١)/(ل + ١) = ((ل − ١)(ل − ١)(ل + ١))/((ل + ١)(ل + ١)) = (ل − ١)²/(ل + ١)

١٤) ٧ل ÷ ٥ل/٧ = ٧ل/١ × ٧/٥ل = ٤٩ل/٥ل = ٤٩/٥

١٥) ل² − ١ ÷ ٣/(ل² + ١) = (ل² − ١)/١ × (ل² + ١)/٣ = (ل⁴ − ١)/٣

١٦) ٦ل/٧ ÷ ٩ل/٥ = ٦ل/٧ × ٥/٩ل = ٣٠ل/٦٣ل = ٣٠/٦٣

فصل جذر کا قاعدہ

یہہ بات حدود مین بیان کی گئی ہی کہ اگر کسی مقدار کو نفسہ ضرب کرین تو حاصل ضرب کو مجذور اوسی مقدار کا کہتے ہین اور وہ مقدار جذر ہوتی ہی اوس حاصل ضرب کی مثلاً لا کو لا مین ضرب کرین تو لا^{2} ہوتا ہی پس لا^{2} مجذور لا کا ہی اور لا جذر ہی لا^{2} کا یہان سے معلوم ہوا کہ جذر ایسی مقدار ہی کہ اگر اوسکو اوسی مین ضرب کرین تو حاصل ضرب مجذور کی برابر ہوجاتا ہی اسیواسطی ٤ لا جذر ١٦ لا^{2} کا ہی اسواسطے کہ ٤ لا کو ٤ لا مین ضرب کرین تو ١٦ لا^{2} ہوجاتا ہی اور لا^{2} جذر لا^{4} کا ہی کیونکہ لا^{2} کو لا^{2} مین ضرب کرین تو لا^{4} ہوتی ہی اوسیطرح علی ہذالقیاس لا جذر ہی لا^{2} کا اور لا^{3} جذر ہی لا^{6} اور لا^{4} جذر ہی لا^{8} کا اور لا$^{\frac{m}{2}}$ جذر ہی لا^{m} کا اور لا$^{\frac{1}{2}}$ جذر ہی لا کا اور لا$^{\frac{1}{4}}$ جذر ہی لا$^{\frac{1}{2}}$ کا ان مثالون سے دیکھنی سیے یہہ بات معلوم ہوتی ہی کہ جذر کا نشان قوت مجذور کی نشان قوت سی نصف ہوتا ہی پس مفرد مقدار کی جذر لینے کا یہہ قاعدہ نکلا کہ اوسکی نشان قوت کو نصف کرکے اوسی حرف کا نشان قوت مقرر کرین پس یہہ جذر ہوگا ✦ یہہ بات ظاہر ہی کہ لا + ط کو لا + ط مین ضرب کرین تو لا^{2} + ٢ ط لا + ط^{2} ہوتا ہی یعنی لا^{2} + ٢ ط لا + ط^{2} مجذور لا + ط کا ہی اور لا + ط جذر ہے لا^{2} + ٢ ط لا + ط^{2} کا اب اگر کوئی ترکیب ایسی کرین کہ لا^{2} + ٢ ط لا + ط^{2} سے لا + ط حاصل ہوجاوے تو ظاہر ہی کہ یہی ترکیب قاعدہ جذر نکالنی کا ہوگا اب جاننا چاہیئے کہ وہ ترکیب یہہ ہی کہ جس مقدار کا جذر نکالنا ہے اوسکو ایک جگہ بترتیب نشان قوت کسی حرف کی لکھین مثلاً لا^{2} + ٢ ط لا + ط^{2} کا جذر نکالنا ہی اوسکو بترتیب نشان قوت لا کی لکھا) لا^{2} + ٢ ط لا + ط^{2} (لا + ط بعد اسکے اول مقدار کا جذر لی کر خط قوسی کے

لا + ط) لا^{2} + ٢ ط لا + ط^{2} (لا + ط

لا^{2}

٢ لا) ٢ ط لا + ط^{2}

٢ ط لا + ط^{2}

آگی دیا مثلاً اس صورت مین لا^{2} کا جذر لا لکھا اور اس جذر کا مجذور کرکی اول مقدار مین سی تفریق کیا حاصل تفریق کچھہ نہوا اور ہر صورت مین حاصل تفریق کچھہ نہین ہونیکا بعد اسکی دوسرے اور تیسری مقدار کو نیچی اوتارا اور اوسکو مقسوم مقرر کیا اور اول مقدار کی جذر کو دوچند کرکے مقسوم علیہ بنایا مثلاً اس صورت مین ٢ ط لا + ط^{2} کو نیچی اوتارا اور ٢ لا کو مقسوم علیہ بناکر تقسیم کیا تو ط خارج قسمت نکلا بعد اسکی جو خارج قسمت نکلا اسکو مقسوم علیہ مین ضرب دیا اور خارج قسمت کا مجذور کیا اور اس حاصل ضرب کی ساتھہ مجذور کو جمع کرکے مقسوم کی نیچی لکھا اور تفریق کیا حاصل تفریق کچھہ نہوگا مثلاً ط کو ٢ لا مین ضرب کیا تو ٢ ط لا ہوا اور ط کا مجذور کیا تو ط^{2} ہوا پس ٢ ط لا + ط^{2} کو مقسوم کی نیچے لکھہ کر تفریق کیا تو کچھہ حاصل نہوا اگر اسی عمل سی ساری مقدارین مجذور کی تمام ہوجاوین تو خیر نہین تو یہی عمل جاری رکھین جب تک ساری مقدارین

مجذور کی تمام ہوون بعد تمامی کے جو کچھ خط کی آگی ہو وہی جذر مطلوب ہی مثلا اس صورت مین خط قوسی کی آگی لا + ط ہی پس لا + ط جذر مطلوب ہی

مثال ۲ ہم چاہتے ہیں کہ لا^2 − ۲ د لا + د^2 کا جذر نکالین پس موافق ترکیب گذشتہ کی اس طرح عمل کرنا چاہئے

لا^2 − ۲ د لا + د^2 (لا − د پس لا − د جذر مطلوب ہی

لا^2

۲ لا) − ۲ د لا + د^2

− ۲ د لا + د^2

×

۳

جذر — مجذور

لا^4 − ۲ لا^2 ط + ط^2 (لا^2 − ط پس لا^2 − ط جذر مطلوب ہے

لا^4

۲ لا^2) − ۲ لا^2 ط + ط^2

− ۲ لا^2 ط + ط^2

×

۴

جذر — مجذور

لا^6 + ۲ ط^2 لا^3 + ط^4 (لا^3 + ط^2 جذر مطلوب ہی

لا^6

۲ لا^3) ۲ ط^2 لا^3 + ط^4

۲ ط^2 لا^3 + ط^4

×

۵

جذر — مجذور

لا^8 − ۲ لا^4 د^3 + د^6 (لا^4 − د^3 جذر مطلوب ہی

لا^8

۲ لا^4) − ۲ لا^4 د^3 + د^6

− ۲ لا^4 د^3 + د^6

×

٦

مجذور: لا^٢ ى^٢ + ٢ ط لا ى + ط^٢

جذر: لا ى + ط

لا^٢ ى^٢

٢ لا ى) ٢ ط لا ى + ط^٢

٢ ط لا ى + ط^٢

×

٧

مجذور: لا^٢ ى^٢ + ٢ لا ى^٢ ط + ى^٢ ط^٢

جذر: لا ى + ى ط

لا^٢ ى^٢

٢ لا ى) ٢ لا ى^٢ ط + ى^٢ ط^٢

٢ لا ى^٢ ط + ى^٢ ط^٢

×

٨

مجذور: ٤ − ٤ لا + لا^٢

جذر: ٢ − لا

٤

٤) − ٤ لا + لا^٢

− ٤ لا + لا^٢

×

٩

مجذور: ٩ + ٦ لا ى + لا^٢ ى^٢

جذر: ٣ + لا ى

٩

٦) ٦ لا ى + لا^٢ ى^٢

٦ لا ى + لا^٢ ى^٢

×

١٠

مجذور: ط^٢ − ٦ ط + ٩

جذر: ط − ٣

ط^٢

٢ ط) − ٦ ط + ٩

− ٦ ط + ٩

×

١١

مجذور: لا − ٢ ط √لا + ط^٢

جذر: √لا − ط

لا

٢ √لا) − ٢ ط √لا + ط^٢

− ٢ ط √لا + ط^٢

×

١٢

مجذور: لا + ٢ √ى لا + ى

جذر: √لا + √ى

لا

٢ √لا) ٢ √ى لا + ى

٢ √ى لا + ى

×

١٣

مجذور: لا − ٢ √لا ط + ط

جذر: √لا − √ط

لا

٢ √لا) − ٢ √لا ط + ط

− ٢ √لا ط + ط

×

١٤

مجذور: لا^٢/٤ + ٢ لا/٢ ى/٢ + ى^٢/٤

جذر: لا/٢ + ى/٢

لا^٢/٤

٢ لا/٢) ٢ لا/٢ ى/٢ + ى^٢/٤

٢ لا/٢ ى/٢ + ى^٢/٤

×

١٥

مجذور: لا^٢/٤ − ٢ لا/٢ ط/٢ + ط^٢/٤

جذر: لا/٢ − ط/٢

لا^٢/٤

٢ لا/٢) − ٢ لا/٢ ط/٢ + ط^٢/٤

− ٢ لا/٢ ط/٢ + ط^٢/٤

×

١٦ ٣ + ٦ √ط + ٣ط) ٣ √ + ط√ ٣ + ١٧

جذر: د + (ل + ط)) (ل + ط)٢ + ٢ (ل + ط) د + د٢ — مجذور

٢√٣ (٣
٦√ط + ٣ط
٦√ط + ٣ط
×

(ل + ط)٢
٢ (ل + ط)) ٢ (ل + ط) د + د٢
٢ (ل + ط) د + د٢
×

١٨ (١ − ل)٢ + ٢ (١ − ل٢) + (١ + ل)٢ — مجذور) (١ − ل) + (١ + ل) — جذر

(١ − ل)٢
٢ (١ − ل)) ٢ (١ − ل٢) + (١ + ل)٢
٢ (١ − ل٢) + (١ + ل)٢
×

١٩ ط + ل + ٢ √ط ل + ل٢ + ل — مجذور) √ط + ل + √ل

ط + ل
٢ √ط + ل) ٢ √ط ل + ل٢ + ل
٢ √ط ل + ل٢ + ل
×

٢٠ ٢ ل + ١ − ٢ √٤ ل٢ − ١ + ٢ ل − ١) √٢ ل + ١ − √٢ ل − ١

٢ ل + ١
٢ √٢ ل + ١) − ٢ √٤ ل٢ − ١ + ٢ ل − ١
− ٢ √٤ ل٢ − ١ + ٢ ل − ١
×

٢١

مجذور: لا^{٢م} + ٢ لا^{م} ط^{ن} + ط^{٢ن}) لا^{م} + ط^{ن} :جذر

لا^{٢م}

٢ لا^{م}) ٢ لا^{م} ط^{ن} + ط^{٢ن}

٢ لا^{م} ط^{ن} + ط^{٢ن}

×

٢٢

مجذور: لا^{٢} + ٢ لا د + د^{٢} + ٢ لا ط + ٢ ط د + ط^{٢}) لا + د + ط :جذر

لا^{٢}

٢ لا) ٢ لا د + د^{٢}

٢ لا د + د^{٢}

٢ لا + ٢ د) ٢ لا ط + ٢ ط د + ط^{٢}

٢ لا ط + ٢ ط د + ط^{٢}

×

٢٣

د^{٢} + ٢ ط د + ط^{٢} − ٢ د لا − ٢ لا ط + لا^{٢}) د + ط − لا

د^{٢}

٢ د) ٢ ط د + ط^{٢}

٢ ط د + ط^{٢}

٢ د + ٢ ط) − ٢ د لا − ٢ لا ط + لا^{٢}

− ٢ د لا − ٢ لا ط + لا^{٢}

×

٢٤

٢٥ + ١٠ لا + لا^{٢} + ١٠ د + ٢ لا د + د^{٢}) ٥ + لا + د

٢٥

١٠) ١٠ لا + لا^{٢}

١٠ لا + لا^{٢}

١٠ + ٢ لا) ١٠ د + ٢ لا د + د^{٢}

١٠ د + ٢ لا د + د^{٢}

×

فصل کعب نکالنی کا قاعدہ

جاننا چاہیے کہ تیسری مرتبہ کی صعود کو مکعب کہتی ہین اور تیسری مرتبہ کی نزول کو کعب کہتے ہین مثلاً لا^{۳} مکعب لا کا ہی اور لا کعب لا^{۳} کا ہی اور اسیطرح لا^{۲} کعب لا^{۶} کا ہی اور لا^{۳} کعب لا^{۹} کا ہی اور لا$^{\frac{۱}{۳}}$ کعب لا کا ہی اور لا$^{\frac{۲}{۳}}$ کعب لا^{۲} کا ہی اور لا$^{\frac{۱}{۲}}$ کعب لا$^{\frac{۳}{۲}}$ کا ہی ان مثالون سے معلوم ہوتا ہی کہ کعب کا نشان قوت تہائی ہوتا ہی مکعب کے نشان قوت سی * صعود کی قاعدہ سی ظاہر ہی کہ (لا + ط) کا تین مرتبہ کا صعود یعنی (لا + ط)^{۳} = لا^{۳} + ۳ لا^{۲} ط + ۳ لا ط^{۲} + ط^{۳} پس معلوم ہوا کہ (لا + ط) کعب ہے لا^{۳} + ۳ لا^{۲} ط + ۳ لا ط^{۲} + ط^{۳} کا اب ہم کعب نکالنی کا قاعدہ بیان کرتے ہین یعنی ایسا قاعدہ بیان کرتے ہین کہ اگر اوسکو لا^{۳} + ۳ لا^{۲} ط + ۳ لا ط^{۲} + ط^{۳} پر جاری کرین تو لا + ط حاصل ہو جاوے قاعدہ یہہ ہی کہ جس مقدار کا کعب لینا ہی پہلی اوسکو ایک جگہ بترتیب نشان قوت کسی حرف کی لکھنا چاہیے بعد اسکے اول جز کا کعب نکال کر خط قوسی کے آگی لکھہ دین اس کعب کا مکعب کرکے اول جز مین سے تفریق کرین باقی کچھہ نرہیگا بعد اسکی اگلی تین جزون کو نیچی اوتار کر مقسوم بنا دین اور اول جز کی کعب کو مجذور کرین اور اس مجذور کو ۳ مین ضرب کرکی مقسوم علیہ بنا دین جو کچھہ خارج قسمت ہو اوسکو مقسوم علیہ مین ضرب کرین اور اس حاصل ضرب کو اول رقم مقسوم کی نیچی لکھین اور پہر خارج قسمت کی مجذور کو تگنا کرکے ضرب کرین اول جز کی کعب مین اور اس حاصل ضرب کو مقسوم کی دوسری مقدار کے نیچی لکھین اور پہر خارج قسمت کا مکعب کرکر مقسوم کی تیسری رقم کی نیچی لکھین اور پہر تفریق کرین اگر عمل تمام ہو جاوی تو فبہا نہین تو پہر اگلی رقمون کو اوتار کر یہی عمل جاری رکھین جب تک کہ عمل تمام ہو بعد اسکی جو کچھہ خط قوسی کی آگے ہو وہی کعب مطلوب ہی مثلاً اس قاعدہ کو لا^{۳} + ۳ لا^{۲} ط + ۳ لا ط^{۲} + ط^{۳} پر جاری کرین

اسطرح

کعب		مکعب
لا + ط	)	لا^{۳} + ۳ لا^{۲} ط + ۳ لا ط^{۲} + ط^{۳}
		لا^{۳}
	۳ لا^{۲})	۳ لا^{۲} ط + ۳ لا ط^{۲} + ط^{۳}
		۳ لا^{۲} ط + ۳ لا ط^{۲} + ط^{۳}
		×

کہ اول جز کا کعب لیا تو لا ہوا اسکو خط قوسی کی آگے لکھا پہر اسکا مکعب کرکے اول جز مین سے تفریق کیا تو کچھہ نہ بچا بعد اسکی تینون رقمون باقی کو نیچی اوتار کر لکھا یعنی ۳ لا^{۲} ط + ۳ لا ط^{۲} + ط^{۳} کو نیچی اوتار کر لکھا

اور اسکو مقسوم بنایا پہر اول جزکی کعب کا مجذور کیا یعنی لا کو مجذور کیا تو لا^۲ مجذور ہوا اسکو تین مین ضرب
تو ۳ لا^۲ ہوا اس ۳ لا^۲ کو مقسوم علیہ بنایا خارج قسمت ط ہوا ط کو مقسوم علیہ مین ضرب دیا تو ۳ لا^۲ ط ہوا
اسکو اول رقم مقسوم کی نیچی لکہا پہر خارج قسمت کا مجذور کیا اور اس مجذور کو تگنا کیا تو ۳ ط^۲ ہوا اسکو اول جز
سے کے کعب مین ضرب کیا تو ۳ لا ط^۲ ہوا اس حاصل ضرب کو دوسری رقم مقسوم کی نیچی لکہا پہر خارج قسمت کا مکعب
کیا اور اس مکعب کو تیسری رقم مقسوم کی نیچی لکہا اور پہر تفریق کی تو کچہہ نہ بچا اور عمل تمام ہوگیا اور خط قوسی کی آگے
لا + ط ہوا پس لا + ط کعب مطلوب ہی

مثال ۲

ط^۳ + ۳ ط^۲ د + ۳ ط د^۲ + د^۳) ط + د

ط^۳

۳ ط^۲) ۳ ط^۲ د + ۳ ط د^۲ + د^۳

۳ ط^۲ د + ۳ ط د^۲ + د^۳

مثال ۳

لا^۳ − ۳ لا^۲ د + ۳ لا د^۲ − د^۳) لا − د

لا^۳

۳ لا^۲) − ۳ لا^۲ د + ۳ لا د^۲ − د^۳

− ۳ لا^۲ د + ۳ لا د^۲ − د^۳

×

مثال ۴

ط^۳ + ۳ ط^۲ ص + ۳ ط ص^۲ + ص^۳) ط + ص

ط^۳

۳ ط^۲) ۳ ط^۲ ص + ۳ ط ص^۲ + ص^۳

۳ ط^۲ ص + ۳ ط ص^۲ + ص^۳

×

مثال ۵

مکعب ۱ − ۳ لا + ۳ لا^۲ − لا^۳) ۱ − لا کعب

۱

۳) − ۳ لا + ۳ لا^۲ − لا^۳

− ۳ لا + ۳ لا^۲ − لا^۳

×

مثال ۶

مکعب ۸ لا^۳ + ۱۲ لا^۲ + ۶ لا + ۱) ۲ لا + ۱ کعب

۸ لا^۳

۳ × ۴ لا^۲) ۱۲ لا^۲ + ۶ لا + ۱

۱۲ لا^۲ + ۶ لا + ۱

×

۶

لا^۳ + ۳ لا^۲ ص + ۳ لا ص^۲ + ص^۳ + ۳ لا^۲ س + ۶ لا ص س + ۳ ص^۲ س + ۳ لا س^۲ + ۳ ص س^۲ + س^۳) لا + ص + س

لا^۳

۳ لا^۲) ۳ لا^۲ ص + ۳ لا ص^۲ + ص^۳

۳ لا^۲ ص + ۳ لا ص^۲ + ص^۳

۳ لا^۲ + ۶ ص لا + ۳ ص^۲) ۳ لا^۲ س + ۶ لا ص س + ۳ ص^۲ س + ۳ لا س^۲ + ۳ ص س^۲ + س^۳

۳ لا^۲ س + ۶ لا ص س + ۳ ص^۲ س + ۳ لا س^۲ + ۳ ص س^۲ + س^۳

×

۷ مثال مکعب کی . $\text{ل}^{6} - 6\text{ل}^{5} + 15\text{ل}^{4} - 20\text{ل}^{3} + 15\text{ل}^{2} - 6\text{ل} + 1 \;\big)\; \text{ل}^{2} - 2\text{ل} + 1$

$$\text{ل}^{6}$$

$$3\text{ل}^{4} \;\big)\; -6\text{ل}^{5} + 15\text{ل}^{4} - 20\text{ل}^{3}$$

$$-6\text{ل}^{5} + 12\text{ل}^{4} - 8\text{ل}^{3}$$

$$3\text{ل}^{4} - 12\text{ل}^{3} + 12\text{ل}^{2} \;\big)\; 3\text{ل}^{4} - 12\text{ل}^{3} + 15\text{ل}^{2} - 6\text{ل} + 1$$

$$3\text{ل}^{4} - 12\text{ل}^{3} + 15\text{ل}^{2} - 6\text{ل} + 1$$

$$\times$$

۸ $\text{ل}^{6} - 9\text{ل}^{5} + 39\text{ل}^{4} - 99\text{ل}^{3} + 156\text{ل}^{2} - 144\text{ل} + 64 \;\big)\; \text{ل}^{2} - 3\text{ل} + 4$

$$\text{ل}^{6}$$

$$3\text{ل}^{4} \;\big)\; -9\text{ل}^{5} + 39\text{ل}^{4} - 99\text{ل}^{3}$$

$$-9\text{ل}^{5} + 27\text{ل}^{4} - 27\text{ل}^{3}$$

$$3\text{ل}^{4} - 18\text{ل}^{3} + 27\text{ل}^{2} \;\big)\; 12\text{ل}^{4} - 72\text{ل}^{3} + 156\text{ل}^{2} - 144\text{ل} + 64$$

$$12\text{ل}^{4} - 72\text{ل}^{3} + 156\text{ل}^{2} - 144\text{ل} + 64$$

$$\times$$

تیسرا باب مساوات کی بیان مین

علوم متعارفہ

واضح ہو کہ مساوات مین چند باتون کا کام پڑتا ہی اسواسطی اول اون باتون کا لکھنا ضرور ہی اور یہہ باتین ظاہر اور بدیہی ہین اسواسطی ہم اونکو علوم متعارفہ کہتے ہین وہ باتین یہہ ہین

١ اگر دو مقدار آپسمین برابر ہون اور پہر دونو پر برابر برابر زیادہ کردین تو بعد زیادتی کی بہی باہم برابر رہینگے

٢ اگر دو مقدار آپسمین برابر ہون اور دونومین سے برابر برابر کم کرلین تو بعد نقصان کی بہی باہم برابر رہینگے

٣ اگر دو مقدار آپسمین برابر ہون اور اون دونو کو کسی ایک مقدار مین ضرب کرلین تو بعد ضرب دینی کی بہی باہم برابر رہینگی

٤ اگر دو مقدار باہم برابر ہون اور اون دونو کو کسی ایک مقدار پر تقسیم کردین تو بعد تقسیم کے جو خارج قسمت ہونگی وہ بہی باہم برابر ہونگی

٥ اگر ایک مقدار پر کسی ایک مقدار کو زیادہ کرین اور جسکو زیادہ کیا ہی اوسیکو یا اوسکی برابر کو کم بہی کرین تو مقدار اول اپنی حال پر رہیگی یعنے نہ تو زیادہ ہوگی اور نہ کم ہوگی

٦ اگر ایک مقدار کو کسی مقدار مین ضرب کرین اور جسمین ضرب کیا ہی اوسی پر تقسیم کردین تو مقدار اول جیسی تہی اوسی طرح رہیگی یعنے کم و بیش نہین ہونگی

مساوات اول درجہ کی

جاننا چاہیئے کہ جب دو مقدار باہم برابر ہون اور ان مقدارونمین حرف مجہول کا نشان قوت آ ہو تو اُس صورت کو اول درجہ کی مساوات کہتے ہین مثلاً ۲ لا + ۳ = ۱۱ اول درجہ کی مساوات ہے کیونکہ اسمین لاَ کا نشان قوت آ ہے اور معنی اسکی یہہ ہین کہ لاَ ایک ایسا عدد مجہول ہے کہ اگر اوسکی دو چند پر ۳ زیادہ کردین تو مجموعہ اُنکی برابر [illegible]

اسیطرح ۵ لا − ۳ = ۲۲ بہی اول درجہ کی مساوات ہے اور اسکی معنی یہہ ہین کہ لا ایسا عدد مجہول ہے کہ اگر اوسکو پانچ مین ضرب کرین اور حاصل ضرب مین سے ۳ نکال ڈالین تو باقی ۲۲ کی برابر رہی

اور اسیطرح ۳ لا + ۲ لا = ۳۰ اول درجہ کی مساوات ہے اسکی یہہ معنی ہین کہ لاَ ایک ایسا مجہول عدد ہے کہ اگر اوسکا تگنا اور دوگنا جمع کرین تو ۳۰ ہو جاتے ہین

علیٰ ہذا القیاس ۸ لا − ۳ لا = ۲۵ اول درجہ کی مساوات ہے اور اسکی معنی یہہ ہین کہ لاَ کوئی ایسا عدد ہے کہ اگر اوسکو ۸ مین ضرب کرین اور حاصل ضرب مین سے تگنا اوس عدد کا نکال ڈالین تو باقی ۲۵ رہجاتی ہین

اسیطرح لا/۲ + لا/۳ = ۱۰ مساوات اول درجہ کی ہے اور اسکی یہہ معنی ہین کہ لاَ کوئی ایسا عدد ہے کہ اگر اوسکی نصف اور تہائی کو جمع کرین تو ۱۰ ہو جاتی ہین اسیطرح ہر ایک مساوات سی کوئی نہ کوئی سوال تعبیر ہوتا ہے اب ظاہر ہے کہ اگر اسیطرح مساوات مین سے حرف مجہول کی مقدار معلوم ہو جاوی تو جو سوال اوس مساوات سی تعبیر ہوتا ہے وہ معلوم ہو جاویگا پس بڑا مطلب مساوات سی یہہ ہے کہ مجہول کی مقدار معلوم ہو جاوی ✲ اب جاننا چاہیئے کہ ۶ علوم متعارفہ جو پہلی بیان کیئے ہین اگر اونکا خیال کرین تو مساوات سی مجہول کی مقدار معلوم ہو جاتی ہے

مثلاً ۲ لا + ۳ = ۱۱ ایک مساوات ہے اور اسمین دو طرفین ہین یعنے علامت مساوات کی دونو طرف دو مقدار ہین جو اسمین برابر ہین ان دونو طرفون کو مساوی اور مساوی لہ بہی کہتے ہین اب اگر اس مساوات کی دونو طرفون سے ۳ کا عدد کم کرین تو موافق (۲) کے مساوات مین کچہہ فرق نہ آویگا لیکن یہہ ظاہر ہے کہ جب ۳ کا عدد طرفین سے نفی کردین تو یہہ مساوات حاصل ہوگی ۲ لا + ۳ − ۳ = ۱۱ − ۳ اور چونکہ اول طرف مین ۲ لا کی ساتھہ ۳ کا عدد جمع بہی ہے اور نفی بہی ہے تو موافق (۵) کی اول طرف مین سے ۳ کا عدد زایل ہو جاویگا اور ۲ لا رہجاویگی پس یہہ مساوات حاصل ہوگی ۲ لا = ۱۱ − ۳ اب ظاہر ہے کہ اگر اول مساوات یعنی ۲ لا + ۳ = ۱۱ مین ۳ کی عدد کو علامت بدل کر دوسری طرف لیجاوین تو بہی یہی ۲ لا = ۱۱ − ۳ مساوات حاصل ہوتی ہے اس سے معلوم ہوا کہ اگر ایک مساوات مین کسی عدد کو ایک طرف سی دوسری طرف علامت بدل کر لکھہ دین تو مساوات مین کچہہ فرق نہین آتا اب مساوات ۲ لا = ۱۱ − ۳ سے یہہ حاصل ہوتا ہے ۲ لا = ۸ اسواسطی کہ ۱۱ مین سے جسوقت ۳ کو نکال ڈالا تو ۸ باقی رہی پس اس مساوات ۲ لا = ۸ کے دونو طرفون کو ۲ پر تقسیم کرین تو موافق

(۴) بعد تقسیم کی بہی مساوات مین کچھ فرق نہین ایگا اور یہہ مساوات حاصل ہوگی لا = ۴ یعنی مقدار مجہول ۴
ہی پس بیان بالا سی یہہ قاعدہ نکلا کہ جسوقت مساوات مین کسور نہون تو اوسوقت مقادیر معلومہ کو ایکطرف لیجا دین
اور جنمین مقادیر مجہول ملی ہوئی ہین اونکو ایکطرف رہنی دین بعد اسکی جنمین مقدار مجہول ملی ہوئی ہی انکو اسطرح لکھین کہ
مقدار معلوم سر پر جاوی مقدار مجہول کی بعد اسکی مقدار مجہول کے سر پر طرفین مساوات کو تقسیم کر دین اس عمل سے
مجہول مقدار ایکطرف رہجائیگی اور مقدار معلوم دوسری طرف یعنی مقدار مجہول مقدار معلوم کے برابر ہوجاویگی اور
یہی مقدار معلوم قیمت مقدار مجہول کی ہوگی

مثلاً ۳ لا + ۵ لا − ۱۰ = ۳۰ پس اس مساوات کی اول طرف سی ۱۰ اکو علامت بدل کر دوسری طرف
لکھہ دیا تاکہ مقادیر مجہول ایکطرف ہوجاوین اور مقدار معلوم دوسری طرف پس یہہ مساوات ۳ لا + ۵ لا = ۳۰ + ۱۰
حاصل ہوئے اور جب اول طرف کے مقدارون کو جمع کیا تو ۸ لا ہوئی اور دوسری طرف کو جمع کیا تو ۴۰ ہوئے اور
اسیواسطی یہہ مساوات ۸ لا = ۴۰ حاصل ہوئی اور طرفین مساوات کو لا کی سر پر تقسیم کیا یعنی ۸ پر
۸ لا کو بہی تقسیم کیا اور ۴۰ کو بہی تقسیم کیا اب ظاہر ہی کہ جب ۸ لا کو ۸ پر تقسیم کرین تو فقط لا رہیگا کیونکہ
موافق (۶) کے لا مین ۸ ضرب کیا ہوا ہی اور ۸ ہی پر تقسیم ہوگا تو عدد ۸ کا زایل ہوجاویگا اور فقط لا رہیگا
اور دوسری طرف ۴۰ کو جو ۸ پر تقسیم کیا تو ۵ خارج قسمت ہوگا اسیواسطی طرفین مساوات کو مقدار مجہول
کے سر پر تقسیم کرنی سے یہہ مساوات حاصل ہوگی لا = ۵ یعنی مقدار مجہول ۵ ہی لیکن اسکے صحت اور غلطی
مساوات مین رکہنی سے معلوم ہوگی اسواسطی کہ مساوات ۳ لا + ۵ لا − ۱۰ = ۳۰ کی یہہ معنی ہین کہ لا ایسا عدد مجہول
ہی کہ اگر اوسکی تگنی اور پانچ گنی کو جمع کرین اور اس حاصل جمع مین سے ۱۰ کم کرین تو باقی ۳۰ کی برابر ہوا ہی
اب ہمنی جو قیمت مجہول کی نکالی ہی وہ ۵ ہی پس ۵ کا تگنا کیا تو ۱۵ ہوا اور پانچ گنا کیا تو ۲۵ ہوئے انکو جمع کیا تو ۴۰ ہوا اور ۴۰ مین سے
۱۰ کم کیئے تو باقی ۳۰ رہی پس معلوم ہوا کہ ہمنی جو قیمت مجہول کی ۵ دریافت کی تہی صحیح ہی کیونکہ اوس سے شرط
سوال کی پوری ہوگئی * چونکہ مساوات حل کرنیمین بہت عبارت لکھنی سے ترتیب عمل کی بگڑجاتی ہی اور ذہن منتشر
ہوتا ہی اسواسطی مساوات حل کرنیمین ہم فقط علامتون کا استعمال کرینگی

مثال ۳

۶ لا + ۳ لا − ۷ = ۱۱
∴ ۶ لا + ۳ لا = ۱۱ + ۷
= ۱۸
∴ ۶ لا + ۳ لا = ۱۸
یعنے ۹ لا = ۱۸
∴ لا = ۲ یعنی قیمت مجہول کی ۲ ہی

مثال ۴

۷ لا − لا + ۸ = ۴۴
∴ ۷ لا − لا = ۴۴ − ۸
∴ ۷ لا − لا = ۳۶
∴ ۶ لا = ۳۶
∴ لا = ۳۶/۶ = ۶
∴ لا = ۶

۵   ۵ ل − ۲ ل + ۴ = ۷

∴ ۵ ل − ۲ ل = ۷ − ۴

∴ ۵ ل − ۲ ل = ۳

∴ ۳ ل = ۳

ل = ۳/۳ = ۱

∴ ل = ۱

۶   ل − ۱۳ + ۴ ل = ۶۲

∴ ل + ۴ ل = ۶۲ + ۱۳

∴ ۵ ل = ۷۵

∴ ل = ۷۵/۵ = ۱۵

∴ ل = ۱۵

۷   ل + ۳ = ۱۵ − ل

∴ ل + ل = ۱۵ − ۳

∴ ۲ ل = ۱۲

∴ ل = ۱۲/۲ = ۶

∴ ل = ۶

۸   ۳ ل − ۱۸ + ۷ ل = ۹ ل + ۷ − ۱۸

∴ ۳ ل + ۷ ل − ۹ ل = ۷ + ۱۸ − ۱۸

∴ ۱۰ ل − ۹ ل = ۷

∴ ل = ۷

۹   ۶ ل − ۷ = ۲ ل + ۱۳

∴ ۶ ل − ۲ ل = ۱۳ + ۷

∴ ۴ ل = ۲۰

∴ ل = ۲۰/۴ = ۵

∴ ل = ۵

۱۰   ۲ ل + ۳ = ل + ۱۷

∴ ۲ ل − ل = ۱۷ − ۳

∴ ل = ۱۴

۱۱   ۵ ل − ۴ = ۴ ل + ۲۵

∴ ۵ ل − ۴ ل = ۲۵ + ۴

∴ ل = ۲۹

اگر کوئی ایسی مساوات ہو کہ اوسمین بجای اعداد کی حروف ہی ہون تو وہ بہی اسیطرح حل ہو سکتی ہی جسطرح مساواتین بالا حل ہوئی ہین مثلاً ط ل + ب = ص اسمین سوای لا کی اور حرف مقادیر معلومہ ہین یعنے ط اور ب اور ص معلوم ہین پس موافق قواعد گذشتہ کی یہہ مساوات اسطرح حل ہوتی ہی

۱   ط ل + ب = ص

∴ ط ل = ص − ب

∴ ل = (ص − ب)/ط   یہہ قیمت مجہول کی ہی

۲   ط ل + ب ل − س = ص

∴ ط ل + ب ل = ص + س

∴ (ط + ب) ل = ص + س

∴ ل = (ص + س)/(ط + ب)

۳ ص لا - س لا = ۱۳ + ۳ س لا

∴ ص لا - س لا - ۳ س لا = ۱۳

∴ ص لا - ۴ س لا = ۱۳

∴ (ص - ۴ س) لا = ۱۳

∴ لا = ۱۳ / (ص - ۴ س)

* ۴ س لا + ۲ ص لا = س + ص لا + ص

∴ س لا + ۲ ص لا - ص لا = س + ص

∴ س لا + ص لا = س + ص

∴ (س + ص) لا = س + ص

∴ لا = (س + ص) / (س + ص) = ۱

∴ لا = ۱

۵ ۴ لا + ۶ ط = ۳ لا - ۲ ط + ۹ ب

∴ ۴ لا - ۳ لا = -۶ ط - ۲ ط + ۹ ب

∴ لا = ۹ ب - ۸ ط

* ۶ ۳ لا - ۵ س + ۶ لا = ۲ س - ۴ لا + ۱

∴ ۳ لا + ۶ لا + ۴ لا = ۲ س + ۵ س + ۱

∴ ۱۳ لا = ۷ س + ۱

∴ لا = (۷ س + ۱) / ۱۳

۷ ۲ لا + ط ص - لا = ط + ط ص

∴ ۲ لا - لا = ط + ط ص - ط ص

∴ لا = ط

* (۸) ا لا + ط لا + س = ۳ ط + س + ۳ ا

∴ ا لا + ط لا = ۳ ط + س - س + ۳ ا

= ۳ ط + ۳ ا

= ۳ (ط + ا)

∴ ا لا + ط لا = ۳ (ط + ا)

∴ (ا + ط) لا = ۳ (ط + ا)

∴ لا = ۳ (ط + ا) / (ا + ط) = ۳

∴ لا = ۳

۹ ۲ ص لا - س لا = ص لا - ۲ س لا

∴ ۲ ص لا - ص لا - س لا + ۲ س لا = ۰

∴ ص لا + س لا = ۰

∴ (ص + س) لا = ۰

∴ لا = ۰ / (ص + س) = ۰

∴ لا = ۰

اگر مساوات مین کسور هون تو چاهیئے که پهلی اول کسر کی نسب نما کو طرفین مساوات مین ضرب کرین بعد اسکی دوسری کسر کی نسب نما کو طرفین مساوات مین ضرب کرین اور اسیطرح جتنی کسرین هون سب کے نسب نماین طرفین مساوات کو ضرب کرین اس قاعده سی مساوات مین کسر نهین رهینی کی اور پهر اول قاعده کی موافق مساوات حل هوسکتی هی اور یهه بهی بات ظاهر هی که اس قاعده سی مساوات مین کچهه خلل نهین آتا اسواسطی سے که موافق (۳) سے کے دو مقدارون متساوی کو ایک مقدار مین ضرب کرین تو بعد ضرب کرنے کی بهی باهم برابر رهتے هین

مثال ۱

۲ل/۳ − ل/۴ = ۱۰ — طرفین کو ۳ مین ضرب کیا

∴ ۲ل − ۳ل/۴ = ۳۰ — پہر طرفین کو ۴ مین ضرب کیا

∴ ۸ل − ۳ل = ۱۲۰

∴ ۵ل = ۱۲۰

∴ ل = ۱۲۰/۵ = ۲۴

∴ ل = ۲۴

۲

۷ل/۴ − ۵ل/۶ = ۵۵/۶ — طرفین کو ۴ مین ضرب کیا

∴ ۷ل − ۲۰ل/۶ = ۲۲۰/۶ — پہر طرفین کو ۶ مین ضرب کیا

∴ ۴۲ل − ۲۰ل = ۲۲۰

∴ ۲۲ل = ۲۲۰

∴ ل = ۲۲۰/۲۲ = ۱۰

∴ ل = ۱۰

۳

ل/۲ + ل/۳ + ل/۵ = ۳۱ — طرفین کو ۲ مین ضرب کیا

∴ ل + ۲ل/۳ + ۲ل/۵ = ۶۲ — پہر طرفین کو ۳ مین ضرب کیا

۳ل + ۲ل + ۶ل/۵ = ۱۸۶ — پہر طرفین کو ۵ مین ضرب کیا

∴ ۱۵ل + ۱۰ل + ۶ل = ۹۳۰

∴ ۳۱ل = ۹۳۰

∴ ل = ۹۳۰/۳۱ = ۳۰

∴ ل = ۳۰

۴

ل + ل/۲ + ل/۳ = ۱۱۰ — طرفین کو ۲ مین ضرب کیا

∴ ۲ل + ل + ۲ل/۳ = ۲۲۰ — پہر طرفین کو ۳ مین ضرب کیا

۶ل + ۳ل + ۲ل = ۶۶۰

∴ ۱۱ل = ۶۶۰

∴ ل = ۶۶۰/۱۱ = ۶۰

∴ ل = ۶۰

۵ $\frac{\text{لا}}{5}+\frac{\text{لا}}{4}+\frac{\text{لا}}{3}=\frac{\text{لا}}{2}+17$ طرفین کو ۵ میں ضرب کیا

$\therefore \text{لا}+\frac{5\text{لا}}{4}+\frac{5\text{لا}}{3}=\frac{5\text{لا}}{2}+85$ طرفین کو ۴ میں ضرب کیا

$\therefore 4\text{لا}+5\text{لا}+\frac{20\text{لا}}{3}=10\text{لا}+340$ طرفین کو ۳ میں ضرب کیا

$\therefore 12\text{لا}+15\text{لا}+20\text{لا}=30\text{لا}+1020$

$\therefore 47\text{لا}=30\text{لا}+1020$

$\therefore 47\text{لا}-30\text{لا}=1020$

$\therefore 17\text{لا}=1020$

$\therefore \text{لا}=\frac{1020}{17}=60$

۶ $\frac{\text{لا}}{2}+\frac{\text{لا}}{3}-\frac{\text{لا}}{4}=\frac{1}{2}$ طرفین کو ۲ میں ضرب کیا

$\therefore \text{لا}+\frac{2\text{لا}}{3}-\frac{\text{لا}}{2}=1$ طرفین کو ۳ میں ضرب کیا

$3\text{لا}+2\text{لا}-\frac{3\text{لا}}{2}=3$ طرفین کو ۲ میں ضرب کیا

$\therefore 6\text{لا}+4\text{لا}-3\text{لا}=6$

$\therefore 10\text{لا}-3\text{لا}=6$

$\therefore 7\text{لا}=6$

$\therefore \text{لا}=\frac{6}{7}$

۷ $6\text{لا}-\frac{3\text{لا}}{4}-9=5\text{لا}$ طرفین کو ۴ میں ضرب کیا

$\therefore 24\text{لا}-3\text{لا}-36=20\text{لا}$

$\therefore 24\text{لا}-3\text{لا}-20\text{لا}=36$

$\therefore 24\text{لا}-23\text{لا}=36$

$\therefore \text{لا}=36$

۸ $4\text{لا}-20=\frac{3\text{لا}}{7}+\frac{110}{7}$

$\therefore 28\text{لا}-140=3\text{لا}+110$ طرفین کو ۷ میں ضرب کیا

$\therefore 28\text{لا}-3\text{لا}=110+140$

$\therefore 25\text{لا}=250$

$\therefore \text{لا}=\frac{250}{25}=10$

$\therefore \text{لا}=10$

۹ $2\text{لا}-\frac{\text{لا}+3}{3}+15=\frac{12\text{لا}+26}{5}$ ۳ سے طرفین کو ضرب کیا

$\therefore 6\text{لا}-\text{لا}-3+45=\frac{36\text{لا}+78}{5}$ طرفین کو ۵ میں ضرب کیا

$\therefore 30\text{لا}-5\text{لا}-15+225=36\text{لا}+78$

$\therefore 25\text{لا}+210=36\text{لا}+78$

$\therefore 210-78=36\text{لا}-25\text{لا}$

$\therefore 132=11\text{لا}$

یا $11\text{لا}=132$

$\therefore \text{لا}=\frac{132}{11}=12$

$\therefore \text{لا}=12$

۱۰ $\text{لا}-7=\frac{\text{لا}}{5}+\frac{\text{لا}}{3}$ طرفین کو ۵ میں ضرب کیا

$\therefore 5\text{لا}-35=\text{لا}+\frac{5\text{لا}}{3}$ طرفین کو ۳ میں ضرب کیا

$15\text{لا}-105=3\text{لا}+5\text{لا}$

$\therefore 15\text{لا}-8\text{لا}=105$

$\therefore 7\text{لا}=105$

$\therefore \text{لا}=\frac{105}{7}=15$

$\text{لا}=15$

بعضی مساواتین ایسی ہوتی ہین کہ اونمین حرف مجہول کا نشان قوت آسی زیادہ ہوتا ہی لیکن اول درجہ کے مساوات کی موافق اونمین سے قیمت مجہول کی معلوم ہوجاتی ہی مثلا یہہ مساوات ہی

۱۱ ۳ل۲ − ۱۰ل = ۸ل + ل۲ طرفین مساوات کو ل سے تقسیم کیا

∴ ۳ل − ۱۰ = ۸ + ل

∴ ۳ل − ل = ۸ + ۱۰

∴ ۲ل = ۱۸

∴ ل = ۹

۱۲ (ل − ۵)/۴ + ۶ل = (۲۸۴ − ل)/۵ طرفین کو ۴ مین ضرب کیا

∴ ل − ۵ + ۲۴ل = (۱۱۳۶ − ۴ل)/۵ طرفین کو ۵ مین ضرب کیا

∴ ۵ل − ۲۵ + ۱۲۰ل = ۱۱۳۶ − ۴ل

∴ ۵ل + ۱۲۰ل + ۴ل = ۱۱۳۶ + ۲۵

∴ ۱۲۹ل = ۱۱۶۱

∴ ل = ۱۱۶۱/۱۲۹ = ۹

۱۳ ل + (۱۱ − ل)/۳ = (۱۹ − ل)/۲ طرفین کو ۳ مین ضرب کیا

∴ ۳ل + ۱۱ − ل = (۵۷ − ۳ل)/۲ طرفین کو ۲ مین ضرب کیا

۶ل + ۲۲ − ۲ل = ۵۷ − ۳ل

∴ ۶ل + ۳ل − ۲ل = ۵۷ − ۲۲

∴ ۷ل = ۳۵

ل = ۵

۱۴ ۳ل − (ل − ۴)/۴ − ۴ = (۱۴ + ۵ل)/۳ − ۱/۱۲

∴ ۱۲ل − ل + ۴ − ۱۶ = (۵۶ + ۲۰ل)/۳ − ۴/۱۲ طرفین کو ۴ مین ضرب کیا

∴ ۳۶ل − ۳ل + ۱۲ − ۴۸ = ۲۰ل + ۵۶ − ۱

∴ ۳۶ل − ۳ل − ۲۰ل = ۵۶ − ۱ − ۱۲ + ۴۸

∴ ۳۶ل − ۲۳ل = ۵۵ − ۱۲ + ۴۸

∴ ۱۳ل = ۹۱

∴ ل = ۹۱/۱۳ = ۷

۱۵ (ل − ۱)/۷ + (۲۳ − ل)/۵ = ۷ − (۴ + ل)/۴ طرفین کو ۷ مین ضرب کیا

∴ ل − ۱ + ۷(۲۳ − ل)/۵ = ۴۹ − ۷(۴ + ل)/۴ طرفین کو ۵ مین ضرب کیا

∴ ۵(ل − ۱) + ۷(۲۳ − ل) = ۲۴۵ − ۳۵(۴ + ل)/۴ طرفین کو ۴ مین ضرب کیا

∴ ۲۰(ل − ۱) + ۲۸(۲۳ − ل) = ۹۸۰ − ۳۵(۴ + ل)

∴ ۲۰ل − ۲۰ + ۶۴۴ − ۲۸ل = ۹۸۰ − ۱۴۰ − ۳۵ل

∴ ۲۰ل + ۳۵ل − ۲۸ل = ۹۸۰ − ۱۴۰ + ۲۰ − ۶۴۴

∴ ۲۷ل = ۲۱۶

∴ ل = ۲۱۶/۲۷

∴ ل = ۸

مساوات مین جتنی کسرین ہون اگر اونکی نسب نمایون کو باہم ضرب کرین اور اس حاصل ضرب کو طرفین مین ضرب کرین تو بہی کسر دور ہوجاتی ہی مثلا (۱۶) مثال مین ظاہر ہی

۱۶ (۷ل + ۵)/۳ − (۱۶ + ۴ل)/۵ + ل = (۳ل + ۹)/۲

اسکے نسب نمایون کا حاصلضرب یعنی ۳ × ۵ × ۲ عدد ۳۰ ہوتا ہی پس جب ۳۰ کو طرفین مساوات مین ضرب کرین

تو ۷۰ل + ۵۰ − ۹۶ − ۲۴ل + ۱۸۰ = ۴۵ل + ۱۳۵

∴ ۷۰ل − ۲۴ل − ۴۵ل = ۱۳۵ + ۹۶ − ۵۰ − ۱۸۰

∴ ل = ۱

۱۷ (۳ل + ۴)/۵ − (۷ل − ۳)/۲ = (ل − ۱۶)/۴ اس مساوات کی نسب نمایون کا حاصل ضرب ۴۰ ہوتا ہی لیکن عدد ۲۰ کا ان سب نمایون پر تقسیم ہوسکتا ہی پس اگر ۲۰ کو طرفین مین ضرب کرین تو بھی کسر مساوات مین نہین رہنی کی اور ہمیشہ خیال کرنا چاہیئے کہ وہ عدد چہوتی سیسے چہوٹا کونسا ہی جو سب نسب نمایون پر پورا تقسیم ہوسکتا ہی پس جو عدد ایسا دریافت ہو اوسکو طرفین مین ضرب کرنا چاہیئے اسطرح مساوات مین کسر بہی نہین رہنی کی او عمل بہی مختصر رہیگا اب ہم (۱۷) مثال کو ۲۰ مین ضرب کر کے حل کرتے ہین ظاہر ہی کہ بعد ضرب کرنی کی یہہ حاصل ہوگا

۱۲ل + ۱۶ − ۷۰ل + ۳۰ = ۵ل − ۸۰

∴ ۱۶ + ۳۰ + ۸۰ = ۷۰ل + ۵ل − ۱۲ل ※

∴ ۱۲۶ = ۶۳ل

یا ۶۳ل = ۱۲۶

∴ ل = ۱۲۶/۶۳ = ۲

∴ ل = ۲

۱۸ (۱۷ − ۳ل)/۵ − (۴ل + ۲)/۳ = ۵ − ۶ل + (۷ل + ۱۴)/۳

طرفین کو ۱۵ مین ضرب کیا

∴ ۵۱ − ۹ل − ۲۰ل − ۱۰ = ۷۵ − ۹۰ل + ۳۵ل + ۷۰

∴ ۹۰ل − ۳۵ل − ۹ل − ۲۰ل = ۷۵ + ۷۰ + ۱۰ − ۵۱

∴ ۲۶ل = ۱۰۴

∴ ل = ۱۰۴/۲۶ = ۴

∴ ل = ۴

۱۹ ل − (۳ل − ۳)/۵ + ۴ = (۲۰ − ل)/۲ − (۶ل − ۸)/۷ + (۴ل − ۴)/۵

اس مساوات کی دونو طرفون کو ضرب کیا حاصل ضرب ۵ × ۲ × ۷ مین یعنی ۷۰ مین تو حاصل ہوا یہہ

۷۰ل − ۴۲ل + ۴۲ + ۲۸۰ = ۷۰۰ − ۳۵ل − ۶۰ل + ۸۰ + ۵۶ل − ۵۶

∴ ۶۷ل = ۴۰۲

∴ ل = ۴۰۲/۶۷ = ۶

∴ ل = ۶

۲۰ (۴ل − ۲۱)/۹ + ۳ ۳/۴ + (۵۷ − ۳ل)/۴ = ۲۴۱ − (۵ل − ۹۶)/۱۲ − ۱۱ل

اس مساوات کو ضرب کیا ۹ × ۴ یعنی ۳۶ مین تو حاصل ہوئی یہہ مساوات

۱۶لا − ۸۴ + ۱۳۵ + ۵۱۳ − ۲۷لا = ۸۶۷۶ − ۱۵لا + ۲۸۸ − ۳۹۶لا

∴ ۱۶لا + ۱۵لا + ۳۹۶لا − ۲۷لا = ۸۶۷۶ + ۲۸۸ − ۸۴ − ۱۳۵ − ۵۱۳

∴ ۴۰۰لا = ۸۴۰۰

∴ لا = ۸۴۰۰/۴۰۰ = ۲۱

∴ لا = ۲۱

۲۱ طلا − (ط² − ۳صلا)/ط − طص² = صلا + (۶صلا − ۵ط²)/۲ط − (صلا + ۴ط)/۴

طرفین کو ۴ط میں ضرب کیا

∴ ۴ط²لا − ۴ط² + ۱۲صلا − ۴ط²ص² = ۴طصلا + ۱۲صلا − ۱۰ط² − طصلا − ۴ط²

∴ ۴ط²لا − ۴ط²ص² = ۳طصلا − ۱۰ط²

∴ ۴ط²لا − ۳طصلا = ۴ط²ص² − ۱۰ط²

∴ (۴ط² − ۳طص) لا = ۴ط²ص² − ۱۰ط²

∴ لا = (۴ط²ص² − ۱۰ط²)/(۴ط² − ۳طص) = (۴طص² − ۱۰ط)/(۴ط − ۳ص)

۲۲ (۷لا + ۱۶)/۲۱ − (لا + ۸)/(۴لا − ۱۱) = لا/۳ طرفین کو ۲۱ میں ضرب کیا

∴ ۷لا + ۱۶ − (۲۱لا + ۱۶۸)/(۴لا − ۱۱) = ۷لا ۷لا کو طرفین سے دور کیا

∴ ۱۶ − (۲۱لا + ۱۶۸)/(۴لا − ۱۱) = ۰

∴ ۱۶ = (۲۱لا + ۱۶۸)/(۴لا − ۱۱) طرفین کو ۴لا − ۱۱ میں ضرب کیا

∴ ۶۴لا − ۱۷۶ = ۲۱لا + ۱۶۸

∴ ۶۴لا − ۲۱لا = ۱۷۶ + ۱۶۸

∴ ۴۳لا = ۳۴۴

∴ لا = ۳۴۴/۴۳ = ۸

∴ لا = ۸

۲۳ (۶لا + ۷)/۹ + (۷لا − ۱۳)/(۶لا + ۳) = (۲لا + ۴)/۳ طرفین کو ۹ میں ضرب کیا

∴ ۶لا + ۷ + (۲۱لا − ۳۹)/(۲لا + ۱) = ۶لا + ۱۲ طرفین سے (۶لا+۷) کو کم کیا

∴ (۲۱لا − ۳۹)/(۲لا + ۱) = ۵ ۲لا + ۱ کو طرفین میں ضرب کیا

∴ ۲۱لا − ۳۹ = ۱۰لا + ۵

∴ ۲۱لا − ۱۰لا = ۳۹ + ۵

∴ ۱۱لا = ۴۴

∴ لا = ۴

۲۴ (۴لا + ۳)/۹ + (۷لا − ۲۹)/(۵لا − ۱۲) = (۸لا + ۱۹)/۱۸ طرفین کو ۱۸ میں ضرب کیا

بعضی مساواتین اول درجہ کی ایسی ہوتی ہیں کہ ان میں بعضی مقدار اون پر نشان جذر یا کعب وغیرہ کا ہوتا ہے سو ایسی صورت میں چاہیے کہ اون مقداروں کو ایک طرف رکھیں جن پر نشان جذر وغیرہ کا ہے اور جو مقدار ایسی ہیں کہ نشان جذر وغیرہ سے پاک ہیں ان کو دوسری طرف رکھیں بعد اسکی اگر نشان جذر کا ہو تو طرفین کا مجذور کر لیں اس ترکیب سے مساوات ایسی حاصل ہوگی جیسی اب تک حل ہوتی ہیں اور اگر نشان کعب کا ہو تو مکعب کر لیں اور علی ہذا القیاس جس مرتبہ کا جذر ہو اوسی مرتبہ کا مضروب لیں چنانچہ مثالوں آئندہ سے ظاہر ہوتا ہے

۲۹   √(۲لا) = ۴   طرفین کا مجذور کیا

∴ ۲لا = ۱۶

∴ لا = ۸

۳۰   √(لا − ۱) = ۲   طرفین کا مجذور کیا

∴ لا − ۱ = ۴

∴ لا = ۵

۳۱   √(۴لا + ۱۶) = ۱۲   طرفین کا مجذور کیا

∴ ۴لا + ۱۶ = ۱۴۴

∴ ۴لا = ۱۴۴ − ۱۶ = ۱۲۸

∴ ۴لا = ۱۲۸

∴ لا = ۳۲

۳۲   ∛(۲لا + ۳) + ۴ = ۷

∴ ∛(۲لا + ۳) = ۳   طرفین کا مکعب کیا

∴ ۲لا + ۳ = ۲۷

∴ ۲لا = ۲۷ − ۳ = ۲۴

∴ ۲لا = ۲۴

∴ لا = ۱۲

۳۳   √(۱۲ + لا) = ۲ + √لا   طرفین کا مجذور کیا

∴ ۱۲ + لا = ۴ + ۴√لا + لا   طرفین سے لا کم کیا

∴ ۱۲ = ۴ + ۴√لا

∴ ۱۲ − ۴ = ۴√لا

∴ ۸ = ۴√لا   ۴ پر طرفین کو تقسیم کیا

∴ ۲ = √لا   مجذور کیا طرفین کو

∴ ۴ = لا

۳۴   √(لا + ۴۰) = ۱۰ − √لا   طرفین کا مجذور کیا

∴ لا + ۴۰ = ۱۰۰ − ۲۰√لا + لا   طرفین سے لا کم کیا

∴ ۴۰ = ۱۰۰ − ۲۰√لا

∴ ۲۰√لا = ۱۰۰ − ۴۰ = ۶۰

∴ ۲۰√لا = ۶۰   ۲۰ پر طرفین کو تقسیم کیا

∴ √لا = ۳   طرفین کا مجذور کیا

∴ لا = ۹

۳۵   √(لا − ۱۶) = ۸ − √لا   طرفین کا مجذور کیا

لا − ۱۶ = ۶۴ − ۱۶√لا + لا   طرفین سے لا کم کیا

∴ −۱۶ = ۶۴ − ۱۶√لا

∴ ۱۶√لا = ۱۶ + ۶۴ = ۸۰

∴ ۱۶√لا = ۸۰   ۱۶ پر طرفین کو تقسیم کیا

√لا = ۵   طرفین کا مجذور کیا

∴ لا = ۲۵

۳۶   √(لا − ۲۴) = √لا − ۲   طرفین کا مجذور کیا

∴ لا − ۲۴ = لا − ۴√لا + ۴   طرفین سے لا کم کیا

[illegible] مقدار [illegible] ... [illegible] مساوات [illegible] ... کا مکعب [illegible] ... [illegible]

۲۹ $\sqrt{۲ل} = ۴$ طرفین کا مجذور کیا

$\therefore ۲ل = ۱۶$

$\therefore ل = ۸$

۳۰ $\sqrt{ل - ۱} = ۲$ طرفین کا مجذور کیا

$\therefore ل - ۱ = ۴$

$\therefore ل = ۵$

۳۱ $\sqrt{۴ل + ۱۶} = ۱۲$ طرفین کا مجذور کیا

$\therefore ۴ل + ۱۶ = ۱۴۴$

$\therefore ۴ل = ۱۴۴ - ۱۶ = ۱۲۸$

$\therefore ۴ل = ۱۲۸$

$\therefore ل = ۳۲$

۳۲ $\sqrt[۳]{۲ل + ۳} + ۴ = ۷$

$\therefore \sqrt[۳]{۲ل + ۳} = ۳$ طرفین کا مکعب کیا

$\therefore ۲ل + ۳ = ۲۷$

$\therefore ۲ل = ۲۷ - ۳ = ۲۴$

$\therefore ۲ل = ۲۴$

$\therefore ل = ۱۲$

۳۳ $\sqrt{ل + ۱۲} = ۲ + \sqrt{ل}$ طرفین کا مجذور کیا

$\therefore ل + ۱۲ = ۴ + ۴\sqrt{ل} + ل$ طرفین سے ل کم کیا

$\therefore ۱۲ = ۴ + ۴\sqrt{ل}$

$\therefore ۱۲ - ۴ = ۴\sqrt{ل}$

$\therefore ۸ = ۴\sqrt{ل}$ ۴ پر طرفین کو تقسیم کیا

$\therefore ۲ = \sqrt{ل}$ مجذور کیا طرفین کو

$\therefore ۴ = ل$

۳۴ $\sqrt{ل + ۴۰} = ۱۰ - \sqrt{ل}$ طرفین کا مجذور کیا

$\therefore ل + ۴۰ = ۱۰۰ - ۲۰\sqrt{ل} + ل$ طرفین سے ل کم کیا

$\therefore ۴۰ = ۱۰۰ - ۲۰\sqrt{ل}$

$\therefore ۲۰\sqrt{ل} = ۱۰۰ - ۴۰ = ۶۰$

$\therefore ۲۰\sqrt{ل} = ۶۰$ ۲۰ پر طرفین کو تقسیم کیا

$\therefore \sqrt{ل} = ۳$ طرفین کا مجذور کیا

$\therefore ل = ۹$

۳۵ $\sqrt{ل - ۱۶} = ۸ - \sqrt{ل}$ طرفین کا مجذور کیا

$ل - ۱۶ = ۶۴ - ۱۶\sqrt{ل} + ل$ طرفین سے ل کم کیا

$\therefore -۱۶ = ۶۴ - ۱۶\sqrt{ل}$

$\therefore ۱۶\sqrt{ل} = ۶۴ + ۱۶ = ۸۰$

$\therefore ۱۶\sqrt{ل} = ۸۰$ ۱۶ پر طرفین کو تقسیم کیا

$\sqrt{ل} = ۵$ طرفین کا مجذور کیا

$ل = ۲۵$

۳۶ $\sqrt{ل - ۲۴} = \sqrt{ل} - ۲$ طرفین کا مجذور کیا

$\therefore ل - ۲۴ = ل - ۴\sqrt{ل} + ۴$ طرفین سے ل کم کیا

∴ ۴ √لا = ۲۸ طرفین ۴ پر تقسیم کیا

√لا = ۷

لا = ۴۹ طرفین کا مجذور کیا

۷ سوال √(لا − ط) = √لا − ½ √ط طرفین کا مجذور کیا

∴ لا − ط = لا − √(طلا) + ط/۴ طرفین سی لا کم کیا

∴ − ط = − √(طلا) + ط/۴

∴ √(طلا) = ط + ط/۴ = ۵ط/۴ طرفین کا مجذور کیا

∴ ط لا = ۲۵ط²/۱۶ ط پر طرفین کو تقسیم کیا

∴ لا = ۲۵ط/۱۶

۸ سوال √۵ √(لا + ۲) = √(۵لا) + ۲

∴ √(۵لا + ۱۰) = √(۵ لا) + ۲ طرفین کا مجذور کیا

∴ ۵لا + ۱۰ = ۵لا + ۴√(۵ لا) + ۴

∴ ۱۰ = ۴√(۵ لا) + ۴ ۵لا طرفین سے کم کیے

∴ ۴√(۵لا) = ۶ طرفین کو ۴ پر تقسیم کیا

∴ √(۵لا) = ۶/۴ = ۳/۲

∴ ۵لا = ۹/۴ طرفین کا مجذور کیا

∴ لا = ۹/(۴×۵) طرفین کو ۵ پر تقسیم کیا

= ۹/۲۰

∴ لا = ۹/۲۰

۹ سوال √(لا + ۴ط) = ۲√(ص + لا) − √لا کیا طرفین کا مجذور

۴ط + لا = ۴(ص + لا) − ۴√لا √(ص + لا) + لا طرفین سے لا کم کیا

∴ ۴ط = ۴(ص + لا) − ۴√(ص لا + لا²) طرفین کو ۴ پر تقسیم کیا

∴ ط = ص + لا − √(ص لا + لا²)

∴ √(ص لا + لا²) = ص − ط + لا = (ص − ط) + لا

∴ √(ص لا + لا²) = (ص − ط) + لا طرفین کا مجذور کیا

∴ ص لا + لا² = (ص − ط)² + ۲(ص − ط) لا + لا² طرفین سی لا² کم کیا

∴ ص لا = (ص − ط)² + ۲(ص − ط) لا

∴ ص لا − ۲(ص − ط) لا = (ص − ط)²

∴ (ص − ۲(ص − ط)) لا = (ص − ط)²

∴ (ص − ۲ص + ۲ط) لا = (ص − ط)²

∴ (۲ط − ص) لا = (ص − ط)² طرفین ۲ط − ص پر تقسیم کیا

∴ لا = (ص − ط)² / (۲ط − ص)

۱۰ سوال لا + ط + √(۲ط لا + لا²) = ص

∴ √(۲ط لا + لا²) = ص − ط − لا

∴ √(۲ط لا + لا²) = (ص − ط) − لا طرفین کا مجذور کیا

∴ ۲ط لا + لا² = (ص − ط)² − ۲(ص − ط) لا + لا² طرفین سی لا² کم کیا

∴ ٢ط لا = (ص − ط)^٢ − ٢(ص − ط) لا

∴ ٢ط لا + ٢(ص − ط) لا = (ص − ط)^٢

∴ (٢ط + ٢(ص − ط)) لا = (ص − ط)^٢

∴ (٢ط + ٢ص − ٢ط) لا = (ص − ط)^٢

∴ ٢ص لا = (ص − ط)^٢ — طرفین کو تقسیم کیا ٢ص پر

∴ لا = (ص − ط)^٢ / ٢ص

١٤ — (لا − ط لا) / √لا = √لا / لا — طرفین مساوات کو √لا میں ضرب کیا

∴ لا − ط لا = لا / لا = ١

∴ لا − ط لا = ١

∴ (١ − ط) لا = ١ — طرفین کو ١ − ط پر تقسیم کیا

∴ لا = ١ / (١ − ط)

٢٤ — (√لا + ٢٨) / (√لا + ٤) = (√لا + ٣٨) / (√لا + ٦) — طرفین کو √لا + ٤ میں ضرب کیا

∴ √لا + ٢٨ = (لا + ٤٢√لا + ١٥٢) / (√لا + ٦) — طرفین کو √لا + ٦ میں ضرب کیا

∴ لا + ٣٤√لا + ١٦٨ = لا + ٤٢√لا + ١٥٢

طرفین میں سے (لا + ٣٤√لا + ١٥٢) کو کم کیا تو حاصل ہوا یہ

∴ ١٦ = ٨√لا — طرفین کو ٨ پر تقسیم کیا

∴ √لا = ٢ — طرفین کا مجذور کیا

∴ لا = ٤

٣٤ — (√لا + ٢ط) / (√لا + ص) = (√لا + ٣ط) / (√لا + ٣ص) * — طرفین کو (√لا + ص) میں ضرب کیا

∴ √لا + ٢ط = (لا + (٤ط + ص)√لا + ٤طص) / (√لا + ٣ص) — طرفین کو √لا + ٣ص میں ضرب کیا

∴ لا + (٢ط + ٣ص)√لا + ٦طص = لا + (٤ط + ص)√لا + ٤طص — طرفین سے لا + ٤طص کو کم کیا

∴ (٢ط + ٣ص)√لا + ٢طص = (٤ط + ص)√لا

∴ (٤ط + ص)√لا − (٢ط + ٣ص)√لا = ٢طص

∴ ((٤ط + ص) − (٢ط + ٣ص))√لا = ٢طص

∴ (٤ط + ص − ٢ط − ٣ص)√لا = ٢طص

∴ (٢ط − ٢ص)√لا = ٢طص

∴ √لا = ٢طص / (٢ط − ٢ص) = طص / (ط − ص)

∴ لا = (طص / (ط − ص))^٢

٤٤ — (√(ط لا) − ص) / (√(ط لا) + ص) = (٣√(ط لا) − ٢ص) / (٣√(ط لا) + ٥ص)

طرفین مساوات کو √(ط لا) + ص میں ضرب کیا

∴ √(ط لا) − ص = (٣√(ط لا) − ٢ص)(√(ط لا) + ص) / (٣√(ط لا) + ٥ص)

یا √(ط لا) − ص = (٣ط لا + ص√(ط لا) − ٢ص^٢) / (٣√(ط لا) + ٥ص)

طرفین کو (٣√(ط لا) + ٥ص) میں ضرب کیا

∴ ٣ط لا + (٥ص − ٣ص)√(ط لا) − ٥ص^٢ = ٣ط لا + ص√(ط لا) − ٢ص^٢

∴ ٣ط لا + ٢ص√(ط لا) − ٥ص^٢ = ٣ط لا + ص√(ط لا) − ٢ص^٢

طرفین سے ٣ط لا − ٢ص^٢ کم کیا

∴ ٢ص√(ط لا) − ٣ص^٢ = ص√(ط لا)

$∴ ۲ص\sqrt{لط} - ص\sqrt{لط} = ۳ص^۲$

$∴ (۲ص - ص)\sqrt{لط} = ۳ص^۲$

$∴ ص\sqrt{لط} = ۳ص^۲$

$∴ \sqrt{لط} = ۳ص$

$∴ لط = ۹ص^۲$

$∴ ل = \frac{۹ص^۲}{ط}$

۴۵ $\frac{ل^۲ - ط^۲}{ل + ط} = ص$

چونکہ $ل^۲ - ط^۲ = (ل + ط)(ل - ط)$ یعنی جب $ل + ط$ کو $(ل - ط)$ میں ضرب کرتے ہیں تو $ل^۲ - ط^۲$ ہوتا ہے $ل^۲ - ط^۲$ کی جگہ حاصل ضرب $(ل + ط)(ل - ط)$ رکھا تو حاصل ہوا $\frac{(ل+ط)(ل-ط)}{ل+ط} = ص$

بعد اختصار کی یہہ ہوتا ہے

$ل - ط = ص$

$∴ ل = ص + ط$

۴۶ $\frac{ل - ط}{\sqrt{ل} + \sqrt{ط}} = س$

چونکہ موافق صورت گذشتہ کی

$ل - ط = (\sqrt{ل} + \sqrt{ط})(\sqrt{ل} - \sqrt{ط})$

$∴ \frac{(\sqrt{ل} + \sqrt{ط})(\sqrt{ل} - \sqrt{ط})}{\sqrt{ل} + \sqrt{ط}} = س$

بعد اختصار کی یہہ ہوتا ہے

$∴ \sqrt{ل} - \sqrt{ط} = س$

$∴ \sqrt{ل} = س + \sqrt{ط}$

$∴ ل = (س + \sqrt{ط})^۲$

۴۷ $ل - ۱ = ۲ل - \frac{۲ل}{\sqrt{ل}}$

چونکہ $ل - ۱ = (\sqrt{ل} + ۱)(\sqrt{ل} - ۱)$

$∴ (\sqrt{ل} + ۱)(\sqrt{ل} - ۱) = ۲ل - \frac{۲ل}{\sqrt{ل}}$

$= \frac{۲ل\sqrt{ل} - ۲ل}{\sqrt{ل}}$

$= \frac{۲ل(\sqrt{ل} - ۱)}{\sqrt{ل}}$

$∴ (\sqrt{ل} + ۱)(\sqrt{ل} - ۱) = \frac{۲ل(\sqrt{ل} - ۱)}{\sqrt{ل}}$

طرفین کو $(\sqrt{ل} - ۱)$ پر تقسیم کیا

$∴ \sqrt{ل} + ۱ = \frac{۲ل}{\sqrt{ل}}$

$= ۲\sqrt{ل}$

$∴ ۱ = ۲\sqrt{ل} - \sqrt{ل}$

$= \sqrt{ل}$

$∴ \sqrt{ل} = ۱$

$∴ ل = ۱$

۴۸ $\frac{۲ل - ۱}{\sqrt{۲ل} + ۱} = ص$

چونکہ $۲ل - ۱ = (\sqrt{۲ل} + ۱)(\sqrt{۲ل} - ۱)$

$∴ \frac{(\sqrt{۲ل} + ۱)(\sqrt{۲ل} - ۱)}{\sqrt{۲ل} + ۱} = ص$

بعد اختصار کی

$∴ \sqrt{۲ل} - ۱ = ص$

$∴ \sqrt{۲ل} = ص + ۱$

$∴ ۲ل = (ص + ۱)^۲ \quad ∴ ل = \frac{(ص + ۱)^۲}{۲}$

۴۹ $\frac{٣\text{لا}-١}{\sqrt{٣\text{لا}}+١} = ١ + \frac{\sqrt{٣\text{لا}}-١}{٢}$

چونکہ $٣\text{لا}-١ = (\sqrt{٣\text{لا}}+١)(\sqrt{٣\text{لا}}-١)$

$\therefore \frac{(\sqrt{٣\text{لا}}+١)(\sqrt{٣\text{لا}}-١)}{\sqrt{٣\text{لا}}+١} = ١ + \frac{\sqrt{٣\text{لا}}-١}{٢}$

اول طرف کا اختصار کیا

$\therefore \sqrt{٣\text{لا}}-١ = ١ + \frac{\sqrt{٣\text{لا}}-١}{٢}$

طرفین کو ٢ میں ضرب کیا

$\therefore ٢\sqrt{٣\text{لا}}-٢ = ٢ + \sqrt{٣\text{لا}}-١$

$\therefore ٢\sqrt{٣\text{لا}}-\sqrt{٣\text{لا}} = \sqrt{٣\text{لا}} = ٢+٢-١ = ٣$

$\therefore \sqrt{٣\text{لا}} = ٣$ طرفین کا مجذور کیا

$\therefore ٣\text{لا} = ٩$

$\therefore \text{لا} = ٣$

۵۰ $\frac{\text{ط}\text{لا}-\text{ص}^٢}{\sqrt{\text{ط}\text{لا}}+\text{ص}} = \text{س} + \frac{\sqrt{\text{ط}\text{لا}}-\text{ص}}{\text{س}}$

چونکہ $\text{ط}\text{لا}-\text{ص}^٢ = (\sqrt{\text{ط}\text{لا}}+\text{ص})(\sqrt{\text{ط}\text{لا}}-\text{ص})$

$\therefore \frac{(\sqrt{\text{ط}\text{لا}}+\text{ص})(\sqrt{\text{ط}\text{لا}}-\text{ص})}{\sqrt{\text{ط}\text{لا}}+\text{ص}} = \text{س} + \frac{\sqrt{\text{ط}\text{لا}}-\text{ص}}{\text{س}}$

اول طرف کا اختصار کیا

$\therefore \sqrt{\text{ط}\text{لا}}-\text{ص} = \text{س} + \frac{\sqrt{\text{ط}\text{لا}}-\text{ص}}{\text{س}}$

$= \frac{\text{س}^٢+\sqrt{\text{ط}\text{لا}}-\text{ص}}{\text{س}}$

طرفین کو س میں ضرب کیا

$\therefore \text{س}\sqrt{\text{ط}\text{لا}}-\text{س}\text{ص} = \text{س}^٢+\sqrt{\text{ط}\text{لا}}-\text{ص}$

$\therefore \text{س}\sqrt{\text{ط}\text{لا}}-\sqrt{\text{ط}\text{لا}} = \text{س}^٢+\text{س}\text{ص}-\text{ص}$

$= \text{س}^٢+\text{ص}(\text{س}-١)$

$\therefore (\text{س}-١)\sqrt{\text{ط}\text{لا}} = \text{س}^٢+\text{ص}(\text{س}-١)$

طرفین کو س − ١ پر تقسیم کیا

$\therefore \sqrt{\text{ط}\text{لا}} = \frac{\text{س}^٢}{\text{س}-١}+\text{ص}$

طرفین کا مجذور کیا

$\therefore \text{ط}\text{لا} = \left(\frac{\text{س}^٢}{\text{س}-١}+\text{ص}\right)^٢$

طرفین کو ط پر تقسیم کیا

$\therefore \text{لا} = \frac{١}{\text{ط}}\left(\frac{\text{س}^٢}{\text{س}-١}+\text{ص}\right)^٢$

۵۱ $\text{لا} = \sqrt{\text{ط}^٢+\text{لا}\sqrt{\text{ص}^٢+\text{لا}^٢}}-\text{ط}$

$\therefore \text{لا}+\text{ط} = \sqrt{\text{ط}^٢+\text{لا}\sqrt{\text{ص}^٢+\text{لا}^٢}}$

طرفین کا مجذور کیا

$\text{لا}^٢+٢\text{ط}\text{لا}+\text{ط}^٢ = \text{ط}^٢+\text{لا}\sqrt{\text{ص}^٢+\text{لا}^٢}$

ط² طرفین سے کم کیا

$\therefore \text{لا}^٢+٢\text{ط}\text{لا} = \text{لا}\sqrt{\text{ص}^٢+\text{لا}^٢}$

طرفین کو لا پر تقسیم کیا

$\therefore \text{لا}+٢\text{ط} = \sqrt{\text{ص}^٢+\text{لا}^٢}$

طرفین کا مجذور کیا

$\therefore \text{لا}^٢+٤\text{ط}\text{لا}+٤\text{ط}^٢ = \text{ص}^٢+\text{لا}^٢$

طرفین سے لا² کم کیا

$\therefore ٤\text{ط}\text{لا} = \text{ص}^٢-٤\text{ط}^٢$

$\therefore \text{لا} = \frac{\text{ص}^٢-٤\text{ط}^٢}{٤\text{ط}}$

۵۲ $\sqrt{٢+\text{لا}}+\sqrt{\text{لا}} = \frac{٤}{\sqrt{٢+\text{لا}}}$

طرفین کو $\sqrt{٢+\text{لا}}$ میں ضرب کیا

$\therefore ٢+\text{لا}+\sqrt{٢\text{لا}+\text{لا}^٢} = ٤$

$\therefore \sqrt{ل+ل^{٢}} = ٤ - ٢ - ل = ٢ - ل$

طرفین کا مجذور کیا

$\therefore ٢ل + ل^{٢} = (٢ - ل)^{٢} = ٤ - ٤ل + ل^{٢}$

طرفین سی $ل^{٢}$ کم کیا

$\therefore ٢ل = ٤ - ٤ل$ طرفین کو ٢ پر تقسیم کیا

$\therefore ل = ٢ - ٢ل$

$\therefore ٣ل = ٢$

$\therefore ل = \frac{٢}{٣}$

(٥٣) $\sqrt{٥+ل} + \sqrt{ل} = \frac{١٥}{\sqrt{٥+ل}}$ طرفین کو $\sqrt{٥+ل}$ مین ضرب کیا

$\therefore ٥ + ل + \sqrt{٥ل + ل^{٢}} = ١٥$

$\therefore \sqrt{٥ل + ل^{٢}} = ١٥ - ٥ - ل = ١٠ - ل$ طرفین کا مجذور کیا

$\therefore ٥ل + ل^{٢} = (١٠ - ل)^{٢} = ١٠٠ - ٢٠ل + ل^{٢}$

طرفین سے $ل^{٢}$ کم کیا

$\therefore ٥ل = ١٠٠ - ٢٠ل$

$\therefore ٢٥ل = ١٠٠$

$\therefore ل = \frac{١٠٠}{٢٥} = ٤$

$\therefore ل = ٤$

(٥٤) $\sqrt{ل+\sqrt{ل}} - \sqrt{ل-\sqrt{ل}} = \frac{٣}{٢}\sqrt{\frac{ل}{ل+\sqrt{ل}}}$

طرفین کو $\sqrt{ل+\sqrt{ل}}$ مین ضرب کیا

$\therefore ل + \sqrt{ل} - \sqrt{ل^{٢} - ل} = \frac{٣\sqrt{ل}}{٢}$

$\therefore ل + \sqrt{ل} - \frac{٣}{٢}\sqrt{ل} = \sqrt{ل^{٢} - ل}$

$\therefore ل - \frac{\sqrt{ل}}{٢} = \sqrt{ل^{٢} - ل}$ طرفین کو $\sqrt{ل}$ پر تقسیم کیا

$\therefore \sqrt{ل} - \frac{١}{٢} = \sqrt{ل - ١}$ طرفین کا مجذور کیا

$\therefore ل - \sqrt{ل} + \frac{١}{٤} = ل - ١$ طرفین سی ل کم کیا

$\therefore -\sqrt{ل} + \frac{١}{٤} = -١$

$\therefore \frac{١}{٤} + ١ = \sqrt{ل}$

$\therefore \frac{٥}{٤} = \sqrt{ل}$ طرفین کا مجذور کیا

$\therefore \frac{٢٥}{١٦} = ل$

(٥٥) $\frac{١}{ل} + \frac{١}{ط} = \sqrt{\frac{١}{ط^{٢}} + \sqrt{\frac{٤}{ط^{٢}ل^{٢}} + \frac{٩}{ل^{٤}}}}$

طرفین کا مجذور کیا

$\therefore \frac{١}{ل^{٢}} + \frac{٢}{لط} + \frac{١}{ط^{٢}} = \frac{١}{ط^{٢}} + \sqrt{\frac{٤}{ط^{٢}ل^{٢}} + \frac{٩}{ل^{٤}}}$

$\therefore \frac{١}{ل^{٢}} + \frac{٢}{لط} = \sqrt{\frac{٤}{ط^{٢}ل^{٢}} + \frac{٩}{ل^{٤}}} = \frac{١}{ل}\sqrt{\frac{٤}{ط^{٢}} + \frac{٩}{ل^{٢}}}$

طرفین کو $\frac{١}{ل}$ پر تقسیم کیا

$\therefore \frac{١}{ل} + \frac{٢}{ط} = \sqrt{\frac{٤}{ط^{٢}} + \frac{٩}{ل^{٢}}}$ طرفین کا مجذور کیا

$\therefore \frac{١}{ل^{٢}} + \frac{٤}{لط} + \frac{٤}{ط^{٢}} = \frac{٤}{ط^{٢}} + \frac{٩}{ل^{٢}}$

$\therefore \frac{١}{ل^{٢}} + \frac{٤}{لط} = \frac{٩}{ل^{٢}}$ طرفین کو ل مین ضرب کیا

$\therefore \frac{١}{ل} + \frac{٤}{ط} = \frac{٩}{ل}$

$\therefore \frac{٤}{ط} = \frac{٩}{ل} - \frac{١}{ل}$

$\therefore \frac{٤}{ط} = \frac{٨}{ل}$

$\therefore \frac{١}{ط} = \frac{٢}{ل}$ طرفین کو ل مین ضرب کیا

$\therefore \frac{ل}{ط} = ٢$ طرفین کو ط مین ضرب کیا

$\therefore ل = ٢ط$

$$٥٦ \quad \sqrt{ط+ل} + \sqrt{ط-ل} = ٢\sqrt{ل}$$

$$\therefore \sqrt{ط+ل} = ٢\sqrt{ل} - \sqrt{ط-ل}$$

طرفین کا مجذور کیا

$$\therefore ط + ل = ٤ل - ٤\sqrt{طل - ل^2} + ط - ل$$

$$ط + ل - ط + ل - ٤ل = -٤\sqrt{طل - ل^2}$$ تحلیل کرکے

$$\therefore -٢ل = -٤\sqrt{طل - ل^2}$$ علامتین طرفین کی تبدیل کین

$$\therefore ل = ٢\sqrt{طل - ل^2}$$ مجذور کیا طرفین کو

$$\therefore ل^2 = ٤(طل - ل^2)$$ طرفین کو ل سے تقسیم کیا

$$\therefore ل = ٤(ط - ل)$$

$$= ٤ط - ٤ل$$

$$\therefore ٥ل = ٤ط$$

$$\therefore ل = \frac{٤ط}{٥}$$

$$٥٧ \quad \sqrt{ط+ل} = \sqrt[٤]{ل^2 + ٥طل + ص^2}$$

اس مساوات کو اسطرح لکھہ سکتی ہین

$$(ط+ل)^{\frac{١}{٢}} = (ل^2 + ٥طل + ص^2)^{\frac{١}{٤}}$$

طرفین کا ٤ مرتبہ کا صعود کیا

$$\therefore ط + ل = (ل^2 + ٥طل + ص^2)^{\frac{١}{٢}}$$

طرفین کو مجذور کیا

$$\therefore ط^2 + ٢طل + ل^2 = ل^2 + ٥طل + ص^2$$ طرفین سے ل² کم کیا

$$\therefore ط^2 + ٢طل = ٥طل + ص^2$$

$$\therefore ط^2 - ص^2 = ٥طل - ٢طل$$

$$= ٣طل$$

$$\therefore ط^2 - ص^2 = ٣طل$$

$$یا \ ٣طل = ط^2 - ص^2$$

$$\therefore ل = \frac{ط^2 - ص^2}{٣ط}$$

بعضی مساوات ایسی ہوتی ہین کہ خاص ترکیب سی حل ہوتی ہین اور انشا اللہ تعالی ایسی مساواتین درجہ دویم کی مساوات مین بہت لکھی جاوینگی یہان فقط دو مثالین لکھی جاتی ہین اور انمین خاص ترکیب یہہ ہی کہ عدد ١ کا زیادہ اور کم کیا جاتا ہی

$$٥٨ \quad \frac{\sqrt{ط} + \sqrt{ط-ل}}{\sqrt{ط} - \sqrt{ط-ل}} = \frac{١}{ط}$$ عدد ١ کا طرفین پر زیادہ کیا

$$\therefore \frac{\sqrt{ط} + \sqrt{ط-ل}}{\sqrt{ط} - \sqrt{ط-ل}} + ١ = \frac{١}{ط} + ١$$ طرفین کا مخرج علحدہ علحدہ مشترک کیا

$$\therefore \frac{\sqrt{ط} + \sqrt{ط-ل} + \sqrt{ط} - \sqrt{ط-ل}}{\sqrt{ط} - \sqrt{ط-ل}} = \frac{ط+١}{ط}$$

$$\therefore \frac{٢\sqrt{ط}}{\sqrt{ط} - \sqrt{ط-ل}} = \frac{ط+١}{ط} \quad \ldots\ldots (١)$$

اب پہر اصلی مساوات کی دونو طرفون سے عدد ١ کا کم کیا

$$یعنی \quad \frac{\sqrt{ط} + \sqrt{ط-ل}}{\sqrt{ط} - \sqrt{ط-ل}} - ١ = \frac{١}{ط} - ١$$ طرفین کا مخرج علحدہ علحدہ مشترک کیا

$$\therefore \frac{\sqrt{ط} + \sqrt{ط-ل} - \sqrt{ط} + \sqrt{ط-ل}}{\sqrt{ط} - \sqrt{ط-ل}} = \frac{١-ط}{ط}$$

$$\therefore \frac{٢\sqrt{ط-ل}}{\sqrt{ط} - \sqrt{ط-ل}} = \frac{١-ط}{ط} \quad \ldots\ldots (١')$$

اب اس مساوات کو جس پر نشان (١) کا ہی تقسیم کیا اوس مساوات پر جسپر نشان (١') کا ہی تو چونکہ ان مساواتونکی نسب نما یکسان ہین تو ظاہر ہی کہ نسب نما دونو مساواتون کے

زائل ہو جائیگی اور یہہ مساوات حاصل ہوگی

$\frac{\sqrt{ط}}{\sqrt{ط-ل}} = \frac{ط+1}{ط-1}$ طرفین کا مجذور کیا

∴ $\frac{ط}{ط-ل} = \left(\frac{ط+1}{ط-1}\right)^2$ یا $\frac{ط-ل}{ط} = \left(\frac{ط-1}{ط+1}\right)^2$

∴ $ط-ل = ط\left(\frac{ط-1}{ط+1}\right)^2$

∴ $ط - ط\left(\frac{ط-1}{ط+1}\right)^2 = ل$

۵۹ $\frac{\sqrt[3]{ل+1} - \sqrt[3]{ل-1}}{\sqrt[3]{ل+1} + \sqrt[3]{ل-1}} = \frac{1}{2}$

طرفین پر آ زیادہ کیا

∴ $\frac{2\sqrt[3]{ل+1}}{\sqrt[3]{ل+1} + \sqrt[3]{ل-1}} = \frac{3}{2}$ .....(۱)

پھر اصلی مساوات کی طرفین سے آ کم کیا

∴ $\frac{-2\sqrt[3]{ل-1}}{\sqrt[3]{ل+1} + \sqrt[3]{ل-1}} = -\frac{1}{2}$ ....(۲)

مساوات (۱) کو مساوات (۲) پر تقسیم کیا

∴ $\frac{\sqrt[3]{ل+1}}{\sqrt[3]{ل-1}} = 3$ طرفین کا مکعب کیا

$\frac{ل+1}{ل-1} = 27$ (۱) طرفین پر آ کو زیادہ کیا

$\frac{ل+1}{ل-1} + 1 = 28$

∴ $\frac{ل+1+ل-1}{ل-1} = 28$

∴ $\frac{2ل}{ل-1} = 28$ .....(ط)

مساوات (۱) کی طرفین سی آ کم کیا

∴ $\frac{ل+1}{ل-1} - 1 = 26$

∴ $\frac{ل+1-ل+1}{ل-1} = 26$

∴ $\frac{2}{ل-1} = 26$ .... (طً)

اب مساوات (ط) کو مساوات (طً) پر تقسیم کیا

∴ $\frac{2ل}{2} = \frac{28}{26}$

یعنی $ل = \frac{28}{26} = 1\frac{1}{13}$

اب تک ایک مجہول کی مساواتین حل ہوئی ہین یعنی ایک مقدار مجہول کی قیمت ایک مساوات کی وسیلہ سی معلوم کی ہی پس اگر دو مقدار مجہول ہون تو دو مساواتون سے اونکی قیمتین معلوم ہونگی اور اگر تین مجہول ہون تو تین مساواتون سے اونکی قیمتین دریافت ہونگی اور علی ہذا القیاس اب ہم دو مقدارون مجہول کے دریافت کرنیکا قاعدہ بیان کرتے ہین جاننا چاہیئے کہ اگر دونو مساوات جنمین یہہ دو مجہول ہین ایسی ہون کہ اونمین کوئی کسر نہو تو اول ہر ایک کو اسطرح لکھنا چاہیئے کہ مقادیر معلومہ ایک طرف ہو جاوین اور مجہول کی رقمین ایک طرف ہو جاوین پھر دیکھنا چاہیئے کہ کسی حرف مجہول کا سر دونو مساواتون مین یکسان ہی یا نہین اگر ہی تو اوسکی دو صورتین ہین ایک تو یہہ کہ جن دونو جزدون مین یہہ حرف مجہول پایا جاتا ہی اونکی علامتین یکسان ہون دوسری یہہ کہ اون دونو جزدون کی علامتین مختلف ہون پس اگر علامتین یکسان ہون تو بڑی مساوات مین سے چھوٹی کو تفریق کرنا چاہیئے اور اگر علامتین مختلف ہون

ہون تو دو نو مساواتون کو جمع کرنا چاہیے ان دونون کیونکہ
سی وہ مجہول جسکا سر دو نو مساواتونمین یکسان ہی زائل
ہوجاویگا اور فقط ایک مجہول کی مساوات رہجاویگی اور وہ
مساوات موافق امثلہ گذشتہ کی حل ہوسکتی ہی اور اگر
دونو مساواتون مین کسی حرف مجہول سر یکسان نہو تو
اس صورت مین چاہیے کہ کسی ایک مساوات مین سے ایک
مجہول کے سر کو دوسری مساوات کی دو نو طرفونمین ضرب
کرین پہر دوسری مساوات مین سے اوسی حرف مجہول کے
سر کو اول مساوات کی دو نو طرفونمین ضرب کرین یہہ دو دو
مساواتین جو ضرب کرنی سے حاصل ہونگی ان دونو
مین ایک مجہول کا سر یکسان ہوگا اور یہہ مجہول موافق
صورت بالا کی زائل ہوسکتا ہی یعنے ان مساواتونمین بلا
تو تفریق کرنی سے زائل ہوجاویگا اور اگر مساواتونمین
کسور ہون تو کسورکو دور کرنی کے یہی ترکیب کرنی چاہیے

مثال ۱ لا = ی + ۴ ...... (۱)

۲ی = ۱۹ - لا ...... (۲)

ان دونو مساواتون سے یہہ دو مساوات حاصل ہوتی ہیں

لا - ی = ۴ ... (۱)

لا + ۲ی = ۱۹ .... (۲)

مساوات (۱) کو (۲) مین سے تفریق کیا تو یہہ مساوات حاصل ہو

۳ی = ۱۹ - ۴ = ۱۵

∴ ۳ی = ۱۵

∴ ی = ۵

اور چونکہ لا = ی + ۴ = ۵ + ۴ = ۹

یعنے لا = ۹

مثال ۲ ۲لا - ی = ۵

لا + ی = ۷ دونو مساواتونکو جمع کی

۳لا = ۱۲

∴ لا = ۴

اور چونکہ لا + ی = ۷ جب اسمین لا کی قیمت لگئی تو

∴ ۴ + ی = ۷

∴ ی = ۷ - ۴

= ۳

∴ ی = ۳

۳ ط لا + ص ی = ۲س

ط ی = س - ط لا

ان دونو مساواتون سی یہہ دو مساوات حاصل ہوتے ہین

ط لا + ص ی = ۲س

ط لا + ط ی = س تفریق کا عمل کیا

ص ی - ط ی = س

∴ (ص - ط) ی = س

∴ ی = س / (ص - ط)

اور اول مساوات سی یہہ حاصل ہوتا ہی

ط لا = ۲س - ص ی = ۲س - ص س / (ص - ط)

∴ ط لا = ۲س - ص س / (ص - ط)

∴ ط لا = (۲س ص - ۲س ط - س ص) / (ص - ط)

∴ ط لا = س (۲ص - ۲ط - ص) / (ص - ط)

∴ لا = س (ص - ۲ط) / ط (ص - ط)

٤ ی − ط لا = ص

لا − ی = س   دونوکو جمع کیا

∴ لا − ط لا = ص + س

∴ لا (١ − ط) = ص + س

∴ لا = (ص + س) / (١ − ط)

اور دوسری مساوات سی ی کی قیمت یہہ حاصل ہوتی ہی

ی = لا − س = (ص + س) / (١ − ط) − س

∴ ی = (ص + س) / (١ − ط) − س

= (ص + س + ط س − س) / (١ − ط)

= (ص + ط س) / (١ − ط)

٥   ٣ ی = ٢ لا − ٣ ... (١)

لا + ی = ٤ .... (٢)

ان مساواتوں سی یہہ حاصل ہوتا ہی

٣ ی − ٢ لا = − ٣ .... (١)

ی + لا = ٤ ... (٢)

مساوات (١) مین ی کا سر ٣ ہی تو (٢) مساوات مین ضرب کیا

اور (٢) مساوات مین ی کا سر ١ ہی اسکو (١) مساوات مین ضرب کیا

تو ٣ ی + ٣ لا = ١٢

٣ ی − ٢ لا = − ٣   اینمین تفریق کی

∴ ٥ لا = ١٥

∴ لا = ٣

اور چونکہ (٢) مساوات سی یہہ حاصل ہوتا ہی

ی = ٤ − لا = ٤ − ٣ = ١

∴ ی = ١

٦   ٤ لا + ٣ ی = ٣١ ... (١)

٣ لا + ٢ ی = ٢٢ .... (٢)

(١) مساوات کو ٣ مین ضرب کیا اور (٢) کو ٤ مین ضرب کیا

∴ ١٢ لا + ٩ ی = ٩٣

١٢ لا + ٨ ی = ٨٨   تفریق کی

∴ ی = ٥

اور چونکہ مساوات (١) سی

٤ لا + ٣ ی = ٣١

∴ ٤ لا + ٣ × ٥ = ٣١

∴ ٤ لا + ١٥ = ٣١

∴ ٤ لا = ٣١ − ١٥ = ١٦

∴ لا = ٤

٧   ٣ لا + ٢ ی = ٤٠ .... (١)

٢ لا + ٣ ی = ٣٥ .... (٢)

مساوات (١) کو ٢ مین ضرب کیا اور مساوات (٢) کو ٣ مین ضرب کیا

∴ ٦ لا + ٩ ی = ١٠٥

٦ لا + ٤ ی = ٨٠   تفریق کی

٥ ی = ٢٥

∴ ی = ٥

اور اول مساوات سی یہہ حاصل ہوتا ہی

٣ لا = ٤٠ − ٢ × ی = ٤٠ − ٢ × ٥

= ٤٠ − ١٠

∴ ٣ لا = ٣٠

∴ لا = ١٠

۸ ۵ لا − ۴ ی = ۱۹ ......(۱)

۴ لا + ۳ ی = ۳۶ ....(۲)

اول مساوات کو ۴ مین ضرب کیا اور (۲) کو ۵ مین ضرب کیا تو

۲۰ لا + ۱۰ ی = ۱۸۰

۲۰ لا − ۱۶ ی = ۷۶ تفریق کا عمل کیا

۲۶ ی = ۱۰۴

∴ ی = $\frac{۱۰۴}{۲۶}$ = ۴

اور مساوات (۱) سی یہہ حاصل ہوتا ہی

۵ لا = ۴ ی + ۱۹ = ۱۶ + ۱۹ = ۳۵

∴ ۵ لا = ۳۵ ∴ لا = ۷

۹ ۳ لا + ۷ ی = ۷۹ ....(۱)

۲ ی − $\frac{لا}{۲}$ = ۹ (۲)

دوسری مساوات کو کسر سے خالص کیا تو یہہ حاصل ہوا

۴ ی − لا = ۱۸ پھر اول مساوات کو اس مساوات کی ساتھ لکھا

∴ ۷ ی + ۳ لا = ۷۹ اور دوسری کو ۳ مین ضرب کر کی لکھا

اوپر کی مساوات کو ۴ مین ضرب کر کے نیچے لکھا اور دوسری مساوات

∴ ۲۸ ی + ۱۲ لا = ۳۱۶

۲۸ ی − ۷ لا = ۱۲۶ تفریق سے

۱۹ لا = ۱۹۰

∴ لا = ۱۰

اور بوسیلہ مساوات دوسری کے ۲ ی = ۹ + $\frac{لا}{۲}$

= ۹ + ۵

۲ ی = ۱۴

∴ ی = ۷

۱۰ $\frac{لا + ی}{۳}$ + لا = ۱۶ ... (۱)

$\frac{لا − ی}{۷}$ + ی = ۵ ......(۲)

دونو مساواتون کو کسر سے خالص کیا

∴ لا + ی + ۳ لا = ۴۸

لا − ی + ۷ ی = ۳۵

یا ۴ لا + ی = ۴۸

لا + ۶ ی = ۳۵ ....(۱)

نیچے کی مساوات کو ۴ مین ضرب دیکر مفروق منہ بنایا اور اوپر کی مساوات کو ایک مین ضرب کر کے مفروق مقرر کیا

۴ لا + ۲۴ ی = ۱۴۰

۴ لا + ی = ۴۸

۲۳ ی = ۹۲

∴ ی = ۴

اور چونکہ لا = ۳۵ − ۶ ی موافق مساوات (۱) کے

= ۳۵ − ۲۴

= ۱۱

یعنے لا = ۱۱

۱۱ $\frac{لا + ی}{۳}$ − ۲ ی = ۲

$\frac{لا + ۳ ی}{۱۰}$ + ی = $\frac{۱۲}{۵}$

(۲) مساوات کو ۱۰ مین ضرب کر کی اور (۱) کو ۳ مین ضرب کر کی کسر دور کی

لا + ۳ ی + ۱۰ ی = ۲۴

لا + ی − ۶ ی = ۶ ....(۵)

یا لا + ۱۳ ی = ۲۴

لا − ۵ ی = ۶ تفریق کی

∴ ۱۸ ی = ۱۸

∴ ی = ۱

اور موافق مساوات (ط) کے $ل = 6 + 5ی$

$= 6 + 5$

یعنی $ل = 11$

١٢ $\frac{2ل - 3}{2} + ی = 7$

$5ل - 13ی = \frac{67}{2}$

دونو مساواتون کو ٢ مین ضرب کرکی کسر دور کی

$2ل - 3 + 2ی = 14$

$10ل - 26ی = 67$

یا $2ل + 2ی = 17 \ldots\ldots (1)$

$10ل - 26ی = 67$

اوپر کی مساوات کو ١٠ مین ضرب کیا اور نیچے کی مساوات کو ٢ مین ضرب کیا

$20ل + 20ی = 170$

$20ل - 52ی = 134$ تفریق کی

$72ی = 36$

$\therefore ی = \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$

$ی = \frac{1}{2}$

اور مساوات (١) کی رو سے $2ل = 17 - 2ی$

$= 17 - 1$

$= 16$

$\therefore ل = 8$

١٣ $\frac{3ل - 7ی}{3} = \frac{2ل + ی + 1}{5}$

$8 - \frac{ل - ی}{5} = 6$

اول مساوات کو ١٥ مین ضرب دی کر اور دوسری کو ٥ مین ضرب دیکر کسر دور کی

$\therefore 15ل - 35ی = 6ل + 3ی + 3$

$40 - ل + ی = 30$

مجہول ایکطرف کیے اور معلوم ایکطرف

$\therefore 15ل - 6ل - 35ی - 3ی = 3$

اور $ل - ی = 10$

یا $9ل - 38ی = 3$

اور $ل - ی = 10 \ldots\ldots (ن)$

نیچی کی مساوات کو ٩ مین ضرب کر کے مفروق منہ مقرر کیا اور اوپر کی مساوات کو مفروق بنایا

$\therefore 9ل - 9ی = 90$

$9ل - 38ی = 3$

$29ی = 87$

$\therefore ی = \frac{87}{29} = 3$

اور بوسیلہ مساوات (ن) $ل = 10 + ی = 13$

دو مساواتون کی حل کرنیکا طریقہ یہہ بھی ہی کہ دونو مساواتون سی ایک ہی حرف مجہول کی قیمت نکالین اور اون دونو قیمتون کو باہم مساوی لکہین اس مساوات مین فقط ایک مجہول رہیگا

مثلاً $ل + ی = 10 \ldots\ldots (1)$

اور $ل - ی = 4 \ldots\ldots (2)$

مساوات (١) سی $ل = 10 - ی$

اور مساوات (٢) سی $ل = 4 + ی$

$\therefore 4 + ی = 10 - ی$

$\therefore 2ی = 10 - 4$

$= 6$

$\therefore ی = 3$

اور چونکہ $ل = 4 + ی$

$= 4 + 3$

$= 7$

یعنی $ل = 7$

مثال ۲ لا − ۳ی = ۱ ...... (۱)

لا − ۳ی = ۲ − ی ... (۲)

مساوات (۱) سے لا = ۳ی + ۱

مساوات (۲) سے لا = ۲ + ۲ی

∴ ۳ی + ۱ = ۲ی + ۲

∴ ۳ی − ۲ی = ۲ − ۱

∴ ی = ۱

اور لا = ۲ی + ۲ = ۲ + ۲ = ۴

۳ لا/۲ + ی/۲ = ۵

۲لا − ی/۲ = ۱۵

دونو مساواتون کو ۲ مین ضرب کرکے کسر دور کی۔

لا + ی = ۱۰ ...... (۱)

۴لا − ی = ۳۰ ...... (۲)

مساوات (۱) سے لا = ۱۰ − ی

مساوات (۲) سے لا = (۳۰ + ی)/۴

∴ ۱۰ − ی = (۳۰ + ی)/۴

∴ ۴۰ − ۴ی = ۳۰ + ی

∴ ۵ی = ۱۰

∴ ی = ۲

اور چونکہ لا = ۱۰ − ی

= ۱۰ − ۲

= ۸

یعنے لا = ۸

۴ لا/۳ = ی − ۵ .... (۱)

ی/۲ = لا − ۵ .... (۲)

مساوات (۱) سے لا = ۳(ی − ۵)

مساوات (۲) سے لا = ی/۲ + ۵

∴ ۳(ی − ۵) = ی/۲ + ۵

اسی واسطے ۳ی − ۱۵ = ی/۲ + ۵

∴ ۳ی − ی/۲ = ۱۵ + ۵ = ۲۰

∴ ۶ی − ی = ۴۰

∴ ۵ی = ۴۰

∴ ی = ۸

اور چونکہ لا = ی/۲ + ۵ = ۸/۲ + ۵ = ۴ + ۵ = ۹

یعنے لا = ۹

۵ ا لا − ص = س ی .... (۱)

ای − ا لا = −۲س .... (۲)

مساوات (۱) سے لا = (س ی + ص)/ا

مساوات (۲) سے لا = (ا ی + ۲س)/ا

∴ (س ی + ص)/ا = (ا ی + ۲س)/ا

یا س ی + ص = ا ی + ۲س

پھر س ی − ا ی = ۲س − ص

∴ (س − ا) ی = ۲س − ص

∴ ی = (۲س − ص)/(س − ا)

اور چونکہ لا = (ا ی + ۲س)/ا = ی + ۲س/ا

= (۲س − ص)/(س − ا) + ۲س/ا

یعنے لا = (۲س − ص)/(س − ا) + ۲س/ا

٦ لا + ط ی = ٢ ط ...... (١)

لا + ٢ ی = ط + ٢ ...... (٢)

مساوات (١) سی لا = ٢ ط − ط ی

مساوات (٢) سی لا = ط + ٢ − ٢ ی

∴ ٢ ط − ط ی = ط + ٢ − ٢ ی

٢ ط − ط − ٢ = ط ی − ٢ ی

یا ط − ٢ = (ط − ٢) ی

∴ ی = (ط − ٢) / (ط − ٢) = ١

اور چونکہ لا = ٢ ط − ط ی = ٢ ط − ط = ط

یعنی لا = ط

٧ لا + √ی = ٤ ..... (١)

٥ لا − √ی = ٨ ..... (٢)

مساوات (١) سی لا = ٤ − √ی

مساوات (٢) سی لا = (√ی + ٨) / ٥

∴ ٤ − √ی = (٨ + √ی) / ٥ طرفین کو ٥ مین ضرب کیا

∴ ٢٠ − ٥ √ی = ٨ + √ی

∴ ٦ √ی = ١٢ ∴ √ی = ٢ ∴ ی = ٤

اور لا = ٤ − √ی = ٤ − √٤ = ٤ − ٢ ∴ لا = ٢

سوای دو قاعدون گذشتہ کی تیسرا اور بہی ہی جس سے
دو مقدار مجہول دریافت ہو سکتی ہین اور وہ قاعدہ
یہہ ہی کہ ایک مساوات کی وسیلہ سی ایک حرف مجہول کے
قیمت معلوم کر کی دوسری مساوات مین رکہین اور
اس ترکیب سے ایسی مساوات حاصل ہوگی جسمین
ایک ہی مجہول رہی گا

مثلاً لا − ٢ ی = ٣ ...... (١)

لا + ی = ٦ .... (٢)

مساوات (١) سی لا = ٢ ی + ٣

جب یہہ قیمت لا کی دوسری مساوات مین رکہین
یعنی بجای لا کی دوسری مساوات مین ٢ ی + ٣
رکہین تو یہہ حاصل ہوتا ہی

٢ ی + ٣ + ی = ٦

∴ ٣ ی = ٦ − ٣

∴ ی = ١

اور چونکہ لا = ٢ ی + ٣

= ٢ + ٣

= ٥

یعنی لا = ٥

٢ ١ − ی = لا − ٧ ...... (١)

لا + ٢ ی = ١٢ ...... (٢)

(٢) مساوات سی لا = ١٢ − ٢ ی جب اول مساوات
مین بجای لا کی ١٢ − ٢ ی رکہا

١ − ی = ١٢ − ٢ ی − ٧ = ٥ − ٢ ی

∴ ١ − ی = ٥ − ٢ ی

∴ ٢ ی − ی = ٥ − ١

یعنی ی = ٤

اور چونکہ لا = ١٢ − ٢ ی = ١٢ − ٨ = ٤

یعنی لا = ٤

٣ (لا − ی) / ٢ = ٣

(لا + ی) / ٢ = ٥

دونو مساواتون کی کسر دور کی

لا - ی = ۶ .... (۱)

لا + ی = ۱۰ .... (۲)

اوپر کی مساوات سی یہہ حاصل ہوتا ہی

لا = ۶ + ی   یہہ قیمت لا کی دوسری مساوات رکہی

∴ ۶ + ی + ی = ۱۰

∴ ۲ ی = ۱۰ - ۶ = ۴

∴ ی = ۲

اور لا = ۶ + ی = ۶ + ۲ = ۸

۴   ۳ لا - ۱ = ی ...... (۱)

ی + ۲ لا = ۹ .... (۲)

مساوات (۱) سی لا = (ی + ۱)/۳ اسکی بجا لا کی (ی + ۱)/۳ مساوات (۲) مین رکہا

∴ ی + ۲ ((ی + ۱)/۳) = ۹

∴ ی + (۲ ی + ۲)/۳ = ۹   طرفین کو ۳ مین ضرب کیا

∴ ۳ ی + ۲ ی + ۲ = ۲۷

∴ ۵ ی = ۲۵

∴ ی = ۵

اور چونکہ لا = (ی + ۱)/۳ = (۵ + ۱)/۳ = ۶/۳ = ۲

یعنی لا = ۲

۵   ۲/۳ + ۱/لا = ۱ ...... (۱)

۳ لا - ی = ۸ ...... (۲)

(۱) مساوات سی ظاہر ہی کہ ۱/لا = ۱ - ۲/۳ = ۱/۳

∴ لا = ۳

اور دوسری مساوات سی ۳ لا - ی = ۸

∴ ی = ۳ لا - ۸ = ۳ × ۳ - ۸

= ۹ - ۸

= ۱

یعنی ی = ۱

اب ہم چند مساوات اور طرح حل کرتی ہین تاکہ مشق کی واسطی مفید ہون

۶   (لا + ۲)/۳ + ۸ ی = ۳۱

(ی + ۵)/۴ + ۱۰ لا = ۱۹۲

دونو مساواتون کو کسر سی خالص کیا

∴ لا + ۲ + ۲۴ ی = ۹۳

ی + ۵ + ۴۰ لا = ۷۶۸

یا لا + ۲۴ ی = ۹۱ .... (۱)

۴۰ لا + ی = ۷۶۳

اوپر کی مساوات کو ۴۰ مین ضرب کرکی مفروق منہ بنایا اور نیچی کی مساوات کو مفروق مقرر کیا

۴۰ لا + ۹۶۰ ی = ۳۶۴۰

۴۰ لا + ی = ۷۶۳   تفریق کیا

۹۵۹ ی = ۲۸۷۷

∴ ی = ۳

اور موافق مساوات (۱) کی لا = ۹۱ - ۲۴ ی

= ۹۱ - ۷۲

= ۱۹

یعنی لا = ۱۹

۷   (۲ لا - ی)/۲ + ۱۴ = ۱۸ .... (۱)

(لا + ۲ ی)/۳ + ۱۶ = ۱۹ .... (۲)

مساوات (۱) سی ۲ل − د / ۲ = ۴

∴ ۲ل − د = ۸ ....(ط)

مساوات (۲) سی ل + ۲د / ۳ = ۳

∴ ۲د + ل = ۹

یا ۲ل + ۴د = ۱۸ طرفین کو ۲ مین ضرب کیا

اور ۲ل − د = ۸ موافق (ط) کی تفریق کی

۵د = ۱۰

د = ۲

اور ۲ل = ۸ + د = ۸ + ۲ = ۱۰

∴ ل = ۵

۸ ۲ل + ۳د / ۶ + ل / ۳ = ۸ ....(۱)

اور ۷د − ۳ل / ۲ − د = ۱۱ ....(۲)

(۱) مساوات کی کسر دور کی

∴ ۲ل + ۳د + ۲ل = ۴۸

یا ۴ل + ۳د = ۴۸ ....(ط)

اور (۲) مساوات سی کسر دور کی تو

۵د − ۳ل = ۲۲

لیکن ۳د + ۴ل = ۴۸ موافق مساوات (ط) کے

نیچی کی مساوات کو ۵ مین ضرب کرکے مفروق منہ مقرر کیا

اور اوپر کی مساوات کو ۳ مین ضرب کیا

۱۵د + ۲۰ل = ۲۴۰

۱۵د − ۹ل = ۶۶ تفریق کی

۲۹ل = ۱۷۴

∴ ل = ۶

اور ۳د = ۴۸ − ۴ل موافق (ط) کے

= ۴۸ − ۲۴

= ۲۴

∴ د = ۲۴ / ۳ = ۸

۹ ۳ل + ۷د / ۲ = ۲۲

۱۱د − ۲ل / ۵ = ۲۰

دونو مساواتون کی کسر دور کرین تو یہہ دو مساوات حاصل ہونگے

۶ل + ۷د = ۴۴

۵۵د − ۲ل = ۱۰۰

نیچی کی مساوات کو ۶ مین ضرب کیا اور اوپر کی مساوات کو ۲ مین ضرب کیا

۳۳۰د − ۱۲ل = ۶۰۰

۱۴د + ۱۲ل = ۸۸

۳۴۴د = ۶۸۸ دونو کو جمع کیا

∴ د = ۲

اور بوسیلہ اول مساوات کی ۳ل = ۲۲ − ۷د / ۲

= ۲۲ − ۲×۷ / ۲

= ۲۲ − ۷

= ۱۵

∴ ل = ۵

۱۰ ل + ۱ : د :: ۵ : ۳ ....(۱)

اور ۲ل / ۳ − ۵ − د / ۲ = ۴۱ / ۱۲ − ۲ل − ۱ / ۴ ....(۲)

(۲) مساوات کو ۱۲ مین ضرب کرکی کسر دور کی تو یہہ حاصل ہوا

۸ل − ۳۰ + ۶د = ۴۱ − ۶ل + ۳

∴ ۱۴ل + ۶د = ۷۴

یا ۷ل + ۳ی = ۳۷

۳ل − ۵ی = −۳ بوسیلہ تناسب (۱) کے

اوپر کی مساوات کو ۳ مین ضرب کرکی مفروق منہ بنایا
اور نیچی کی مساوات کو ۷ مین ضرب کرکی مفروق بنایا

۲۱ل + ۹ی = ۱۱۱

۲۱ل − ۳۵ی = −۲۱ تفریق کی

۴۴ی = ۱۳۲

∴ ی = ۳

اور موافق تناسب کی ۳ل + ۳ = ۵ی

= ۱۵

∴ ۳ل = ۱۲

∴ ل = ۴

۱۱ (ل − ۲)/۵ − (۱۰ − ل)/۳ = (ی − ۱۰)/۴

اور (۲ی + ۴)/۳ − (۲ل + ی)/۸ = (ل + ۱۳)/۴

اول مساوات کو ۶۰ مین ضرب کرکی کسر دور کی

۱۲ل − ۲۴ − ۲۰۰ + ۲۰ل = ۱۵ی − ۱۵۰

∴ ۳۲ل − ۱۵ی = ۷۴ ...(۱)

اور دوسری مساوات کو ۲۴ مین ضرب کرکی کسر دور کی

∴ ۱۶ی + ۳۲ − ۶ل − ۳ی = ۶ل + ۷۸

∴ ۱۳ی − ۱۲ل = ۴۶

اور ۳۲ل − ۱۵ی = ۷۴ موافق (۱) کے

اب یہہ بات ظاہر ہی کہ اگر اوپر کی مساوات کو ۸ مین ضرب کرین
اور نیچی کی مساوات کو ۳ مین ضرب کرین تو امثال ل کے
دونون مساواتون مین یکسان ہوجائینگی چنانچہ عمل سی ظاہر ہی

۱۰۴ی − ۹۶ل = ۳۶۸

۹۶ل − ۴۵ی = ۲۲۲ جمع کیا

۵۹ی = ۵۹۰

∴ ی = ۱۰

اور موافق (۱) سے

۳۲ل = ۱۵ی + ۷۴

= ۱۵۰ + ۷۴

= ۲۲۴

∴ ل = ۷

۱۲ ۲ی − (ل + ۳)/۴ = ۷ + (۳ل − ۲ی)/۵

اور ۴ل − (۸ − ی)/۳ = ۲۴½ − (۲ل + ۱)/۲

اول مساوات کو ۲۰ مین ضرب کرکی کسر دور کی

∴ ۴۰ی − ۵ل − ۱۵ = ۱۴۰ + ۱۲ل − ۸ی

∴ ۴۸ی − ۱۷ل = ۱۵۵ ...(۱)

اور دوسری مساوات کو ۶ مین ضرب کرکی کسر دور کی

∴ ۲۴ل − ۱۶ + ۲ی = ۱۴۷ − ۶ل − ۳

∴ ۳۰ل + ۲ی = ۱۶۰

اس مساوات کو ۲۴ مین ضرب کیا تو

۷۲۰ل + ۴۸ی = ۳۸۴۰

−۱۷ل + ۴۸ی = ۱۵۵ موافق (۱) سے

۷۳۷ل = ۳۶۸۵ بعد تفریق کی

∴ ل = ۵

اور چونکہ ۳۰ل + ۲ی = ۱۶۰

∴ ۲ی = ۱۶۰ − ۳۰ل

= ۱۶۰ − ۱۵۰

= ۱۰

∴ ی = ۵

۱۳) ی ۱۰/۱۸ − (۸ لا − ۳)/۳۶ = ۱ − (ی + ۴)/۳ + (لا − ی)/۶

اور لا : ی :: ۴ : ۷

اول مساوات کو مختصر کر کے لکھا تو یہہ حاصل ہوا

ی/۹ − (۴ لا − ۱)/۱۸ = ۱ − (ی + ۴)/۳ + (لا − ی)/۶

طرفین کو ۱۸ مین ضرب کیا

∴ ۲ ی − ۴ لا + ۱ = ۱۸ − ۴ − ۶ ی − ۲۴ + ۳ لا − ۳ ی

∴ ۱۱ ی − ۷ لا = ۷ −

۷ لا = ۴ ی موافق تناسب کے

۱۱ ی = ۴ ی − ۷ بعد جمع کرنی کے

∴ ی = ۷

اور لا = ۴ ی/۷

= ۴ × ۷/۷

= ۴

یعنے لا = ۴

۱۴) لا − (۲ ی − ۲ لا)/۱۱ + ۱ = (۱۵ لا + ی ۴/۳)/۳۳

اور (۳ لا + ۲ ی)/۶ − (ی − ۵)/۴ = (۱۵ ی + ۱۱ لا)/۱۲ − (۱ + ی ۳)/۲

اول مساوات کو ۳۳ مین ضرب کیا

∴ ۳۳ لا − ۶ ی + ۶ − ۳ لا = ۳۳ + ۱۵ لا + ی ۴/۳

∴ ۱۵ لا − ۶ ی = ۲۷ + ی ۴/۳

∴ ۴۵ لا − ۲۲ ی = ۸۱ + ۴ ی

∴ ۴۵ لا − ۲۲ ی = ۸۱ ... (۱)

اور دوسری مساوات کو ۱۲ مین ضرب کر کے کسر دور کی

∴ ۶ لا + ۴ ی − ۳ ی + ۱۵ = ۱۱ لا + ۱۵ ی − ۱۸ ی − ۶

∴ ۹ ی − ۵ لا = ۲۱

اسس مساوات کو ۹ مین ضرب کیا

∴ ۸۱ ی − ۴۵ لا = ۱۸۹

۴۵ لا − ۲۲ ی = ۸۱ موافق (۱) کے

۵۹ ی = ۲۷۰ جمع کیا

∴ ی = ۵

اور چونکہ ۹ ی − ۵ لا = ۲۱

∴ ۵ لا = ۹ ی − ۲۱

= ۴۵ − ۲۱

= ۲۴

∴ لا = ۸

۱۵) (۱۰ لا + ۳)/۱۵ = ۱۸ ۱/۴ − (۳ ی − ۴ لا − ۸)/۷

۱۰ ی + (۳۵ − ۶ لا)/۵ = ۵۵ + ۱۰ لا

اول مساوات کو ۱۰۵ مین ضرب کر کے کسر دور کی

∴ ۷۰ لا + ۲۱ = ۱۹۲۵ − ۶۰ لا − ۴۵ ی + ۱۲۰

∴ ۱۳۰ لا + ۴۵ ی = ۲۰۲۴

∴ ۹ لا + ی = ۲۲۵ ... (۱) طرفین کو ۹ پر تقسیم کیا

دوسری مساوات کو ۵ مین ضرب کر کے کسر دور کی

∴ ۵۰ ی + ۳۵ − ۶ لا = ۲۷۵ + ۵۰ لا

∴ ۵۰ ی − ۵۶ لا = ۲۴۰ طرفین کو ۲ پر تقسیم کیا

∴ ۲۵ ی − ۲۸ لا = ۱۲۰ ... (۲)

اب اگر مساوات (۱) کو ۵ مین ضرب کرین تو

۲۵ ی + ۴۵ لا = ۱۱۲۵

۲۵ ی − ۲۸ لا = ۱۲۰ موافق مساوات (۲) کے

۷۳ لا = ۱۰۰۵ تفریق کی

∴ لا = ۱۵

اور موافق مساوات (۱) کی ۵ی = ۱۶۵ − ۹ل

= ۱۶۵ − ۹۰

= ۷۵

∴ ی = ۱۵

۱۶

ی + (۵ل + ۲ی)/۶ − (۳ی − ۱۲ + ۸ل)/۵ = ۴ − (۱۵ + ۲ل − ۴ی)/۳

اور (۷ل + ۱۳ − ۵ی)/۴ + ل = ۲ی − (۳ل + ۲ی − ۱۶)/۳

اول مساوات کو ۳۰ مین ضرب کرکی کسر دور کی

∴ ۳۰ی + ۲۵ل + ۱۰ی − ۱۸ی + ۷۲ − ۴۸ل = ۱۲۰ − ۱۵۰ − ۲۰ل + ۴۰ی

∴ ۱۸ی + ۳ل = ۱۰۲

طرفین کو ۱۵ مین ضرب کی

∴ ۴۵ل + ۲۷۰ی = ۱۵۳۰ ....(۱)

دوسری مساوات کو ۱۲ مین ضرب کرکی کسر دور کی

∴ ۲۱ل + ۳۹ − ۱۵ی + ۱۲ل = ۲۴ی − ۱۲ل − ۸ی + ۶۴

∴ ۴۵ل − ۳۱ی = ۲۵

اور ۴۵ل + ۲۷۰ی = ۱۵۳۰ موافق (۱) کے

−۳۰۱ی = −۱۵۰۵ تفریق سے

طرفین کی علامتین بدلین

∴ ۳۰۱ی = ۱۵۰۵

∴ ی = ۵

اور ۱۸ی + ۳ل = ۱۰۲

∴ ۳ل = ۱۰۲ − ۱۸ی

یا ل = ۳۴ − ۶ی

= ۳۴ − ۳۰

= ۴

۱۷

۱ + (۲۵ + ۵ی)/۶ − (۷ل − ۶)/۳ = ۱۰ − (۳ل − ۱۰ + ۷ی)/۱۲

اور (۱۲ − ل)/۹ : ۵ل − (۱۴ + ی)/۳ :: ۱ : ۸

اول مساوات کو ۱۲ مین ضرب کرکی کسر دور کی

∴ ۱۲ + ۵۰ + ۱۰ی − ۲۸ل + ۲۴ = ۱۲۰ − ۳ل + ۱۰ − ۷ی

∴ ۱۷ی − ۲۵ل = ۴۴

طرفین کو ۳ مین ضرب کیا

∴ ۵۱ی − ۷۵ل = ۱۳۲ ....(۱)

اور تناسب سی یہہ مساوات حاصل ہوئی

(۹۶ − ۸ل)/۹ = ۵ل − (۱۴ + ی)/۳

اسس مساوات کو ۹ مین ضرب کیا

∴ ۹۶ − ۸ل = ۴۵ل − ۴۲ − ۳ی

∴ ۵۳ل − ۳ی = ۱۳۸

طرفین کو ۱۷ مین ضرب کیا

∴ ۹۰۱ل − ۵۱ی = ۲۳۴۶

۵۱ی − ۷۵ل = ۱۳۲ موافق (۱) کے

۸۲۶ل = ۲۴۷۸ جمع کیا

∴ ل = ۳

اور ۵۳ل − ۳ی = ۱۳۸

∴ ۳ی = ۵۳ل − ۱۳۸

= ۵۳ × ۳ − ۱۳۸

= ۱۵۹ − ۱۳۸

= ۲۱

∴ ی = ۷

۱۸ $\frac{۴لا}{۲لا} + \frac{۵د}{۲د} = \frac{۹}{د} - ۱ \ldots (۱)$

اور $\frac{۵}{لا} + \frac{۴}{د} = \frac{۷}{لا} + \frac{۳}{۲} \ldots (۲)$

اول مساوات کی اول طرف کا اختصار ہو سکتا ہی اسواسطے بعد اختصار کی یہہ حاصل ہوتا ہی

$\frac{۴}{لا} + \frac{۵}{د} = \frac{۹}{د} - ۱$

∴ $\frac{۴}{لا} - \frac{۴}{د} = -۱$

اور $-\frac{۲}{لا} + \frac{۴}{د} = \frac{۳}{۲}$ بوسیلہ دوسری مساوات کے

$\frac{۲}{لا} = \frac{۱}{۲}$ دونوں مساواتوں جمع کیا

∴ $لا = ۴$

اور $\frac{۴}{لا} - \frac{۴}{د} = -۱$ اسکے تہا

∴ $\frac{۴}{د} = \frac{۴}{لا} + ۱ = ۱ + ۱ = ۲$

∴ $۴ = ۲د$

∴ $د = ۲$

۱۹ $\frac{ط}{لا} + \frac{ص}{د} = م$

اور $\frac{س}{لا} + \frac{ع}{د} = ن$

اول مساوات کو س مین ضرب کیا اور دوسری کو ط مین ضرب کیا تو یہہ دو مساوات حاصل ہوئین

$\frac{س ط}{لا} + \frac{س ص}{د} = م س$

$\frac{س ط}{لا} + \frac{ع ط}{د} = ن ط$

∴ $\frac{س ص}{د} - \frac{ع ط}{د} = م س - ن ط$ تفریق کی

∴ $(س ص - ع ط)\frac{۱}{د} = م س - ن ط$

∴ $\frac{۱}{د} = \frac{م س - ن ط}{س ص - ع ط}$

∴ $د = \frac{س ص - ع ط}{م س - ن ط}$

اور $\frac{ط}{لا} = م - \frac{ص}{د}$ بوسیلہ اول مساوات کی

$= م - ص\left(\frac{۱}{د}\right)$

$= م - ص\left(\frac{م س - ن ط}{س ص - ع ط}\right)$

$= م - \frac{م ص س - ص ن ط}{س ص - ع ط}$

$= \frac{م ص س - م ص س - م ع ط + ص ن ط}{س ص - ع ط}$

$= \frac{ص ن ط - م ع ط}{س ص - ع ط}$

∴ $\frac{۱}{لا} = \frac{ص ن - م ع}{س ص - ع ط}$

∴ $لا = \frac{س ص - ع ط}{ص ن - م ع}$

۲۰ $لا - \frac{۲د - لا}{۲۳ - لا} = ۲۰ - \frac{۵۹ - ۲لا}{۲}$

اور $د + \frac{د - ۳}{لا - ۱۸} = ۳۰ - \frac{۷۳ - ۳د}{۳}$

اول مساوات کو ۲ مین ضرب کیا

∴ $۲لا - \frac{۴د - ۲لا}{۲۳ - لا} = ۴۰ - ۵۹ + ۲لا$

۲لا کو طرفین سے گرا دیا

∴ $-\frac{۴د - ۲لا}{۲۳ - لا} = -۱۹$

اب طرفین کی علامتین بدلین اور کسر دور کی

∴ $۴د - ۲لا = ۴۳۷ - ۱۹لا$

∴ $۴د + ۱۷لا = ۴۳۷ \ldots (۱)$

اور دوسری مساوات کو ۳ مین ضرب کیا تو یہہ حاصل دیا

۳ی + (۳ی − ۹)/(ل − ۱۸) = ۹۰ − ۷۳ + ۳ی

۳ی کو طرفین سے اڑا دیا

∴ (۳ی − ۹)/(ل − ۱۸) = ۱۷

کسر دور کی

۳ی − ۹ = ۱۷لا − ۳۰۶

∴ ۳ی − ۱۷لا = − ۲۹۷

بوسیلہ (۱) کے

۴ی + ۱۷لا = ۴۳۷

جمع کیا

∴ ۷ی = ۱۴۰

∴ ی = ۲۰

اور ۴ی + ۱۷لا = ۴۳۷

∴ ۱۷لا = ۴۳۷ − ۴ی

= ۴۳۷ − ۸۰

= ۳۵۷

∴ ل = ۲۱

۲۱ ۸ل − (۱۶ + ۶۰ل)/(۳ی − ۱) = (۱۶لای − ۱۰۷)/(۵ + ۲ی)

اور ۲ + ۶ی + ۹لا = (۲۷ل² − ۱۲ی² + ۳۸)/(۳ل − ۲ی + ۱)

اول مساوات کو ۵ + ۲ی مین ضرب کیا تو یہہ حاصل ہوا

۴۰ل + ۱۶لای − (۸۰ + ۳۰۰ل + ۳۲ی + ۱۲۰لای)/(۳ی − ۱) = ۱۶لای − ۱۰۷

۱۶لای کو طرفین سے اڑا دیا

∴ ۴۰ل + ۱۰۷ = (۸۰ + ۳۰۰ل + ۳۲ی + ۱۲۰لای)/(۳ی − ۱)

طرفین کو ۳ی − ۱ مین ضرب کیا

∴ ۱۲۰لای − ۴۰ل + ۳۲۱ی − ۱۰۷ = ۸۰ + ۳۰۰لا + ۳۲ی + ۱۲۰لای

∴ ۲۸۹ی − ۳۴۰لا = ۱۸۷ ....(۱)

اور دوسری مساوات سی کسر دور کی تو یہہ حاصل ہوا

۲۷ل² − ۱۲ی² + ۱۵لا + ۲ی + ۲ = ۲۷ل² − ۱۲ی² + ۳۸

∴ ۱۵لا + ۲ی = ۳۶ ....(۲)

اگر مساوات (۱) کو ۳ مین ضرب کرین اور مساوات (۲) کو ۶۸ مین ضرب کرین تو دونو مساواتون مین امثال لا کی برابر ہو جائینگی اسیواسطی بعد ضرب کرنیکی یہہ دو مساواتین حاصل ہوئین

۸۶۷ی − ۱۰۲۰لا = ۵۶۱

۱۳۶ی + ۱۰۲۰لا = ۲۴۴۸

دونو مساواتونکو جمع کیا

۱۰۰۳ی = ۳۰۰۹

∴ ی = ۳

اور موافق مساوات (۲) کی ۱۵لا = ۳۶ − ۲ی

= ۳۶ − ۶

= ۳۰

∴ ل = ۲

۲۲ ۳ − (۷ + ۲ل/ی)/۵ = ۵ − (۵ل + ۹)/(۳ی)

اور ۲ − (۴ + ۱۵ی)/(۶ل − ۲) = (۲لی − ۱۰۷/۸)/(۲ل + ۵)

اول مساوات کو ۱۵ی مین ضرب کر کی کسر دور کی

۴۵ی − ۲۱ی − ۶لا = ۷۵ی − ۲۵ل − ۴۵

∴ ۵۱ی − ۹۱لا = ۴۵ ....(۱)

دوسری مساوات کو ۲ل + ۵ مین ضرب کیا

∴ ۲لی + ۵ی − (۸لا + ۲۰ + ۳۰لای + ۷۵ی)/(۶ل − ۲) = ۲لای − ۱۰۷/۸

طرفین سی ۲لای کو اڑا دیا

∴ ۵ ی + ۱۰ی/۸ = (۱۲۵ ی + ۳۰ لا ی + ۲۰ + ۸ لا)/(۶ لا - ۲)

طرفین کو ۶ لا - ۲ مین ضرب کیا

∴ ۳۰ لا ی - ۱۰ ی + (۱۲۱ لا - ۱۰۷)/۴ = ۸ لا + ۲۰ + ۳۰ لا ی + ۱۲۵ ی

۳۰ لا ی کو طرفین سے اوڑا دیا

∴ (۱۲۱ لا - ۱۰۷)/۴ = ۸ لا + ۱۳۵ ی + ۲۰

∴ ۱۲۱ لا - ۱۰۷ = ۳۲ لا + ۵۴۰ ی + ۸۰

∴ ۸۹ لا - ۵۴۰ ی = ۱۸۷ ......(۲)

اب اگر مساوات (۱) کو ۲۰ مین ضرب کرین اور مساوات (۲) کو ۳ مین ضرب کرین تو دونو مساواتونمین امثال ی کی یکسان ہوجائنگی اسیواسطی بعد ضرب کرنیکی یہہ دو مساوات حاصل ہونگی

۱۰۲۰ ی — ۱۳۸۰ لا = ۹۰۰

۱۰۲۰ ی — ۱۸۶۷ لا = ۵۶۱ تفریق کی

۴۸۷ لا = ۱۴۶۱

∴ لا = ۳

اور موافق مساوات (۱) کے ۵۱ ی = ۴۵ + ۱۹ لا

= ۴۵ + ۵۷

= ۱۰۲

∴ ی = ۲

جاننا چاہیے کہ جسطرح دو حرف مجہول کی قیمت دو مساواتون سے معلوم ہوجاتی ہی اسیطرح تین حرف مجہول کی قیمت تین مساواتون سے معلوم ہوجاتی ہی اور قاعدہ حل کرنیکا یہہ ہی کہ تینون مساواتونمین سے دو مساوات لین اور ان دونو مساواتون سے موافق قواعد گذشتہ کی ایک حرف مجہول دور کر دین اور اسی عمل سے ایک ایسی مساوات حاصل ہوگی جسمین دو حرف مجہول ہونگی پہر ان تینون مساواتون مین سی ایک تو وہ مساوات لین جو باقی رہتی ہی اور ایک مساوات اون دونو مساواتونمین سے لین جنپر عمل کیا ہی اور ان دونو مساواتون مین سے موافق قواعد گذشتہ کی وہی حرف مجہول دور کرین جو پہلی دو مساواتون سے دور کیا تہا پس اس عمل سی ایک دوسری مساوات حاصل ہوگی جسمین دو مجہول ہونگی پس دو دو مجہول کی دو مساوات حاصل ہونگی اور ان دونو مساواتون سے دو مقدار مجہول موافق قواعد گذشتہ کی دریافت ہوسکتی ہین اور جب دو مجہول معلوم ہوگئی تو تیسرا بآسانی معلوم ہوسکتا ہی کیونکہ اون تینون مساواتونمین سے کسی ایک مین دو قیمتین دو حرف مجہول کی رکہین اور اس عمل سے ایک ایسی مساوات حاصل ہوگی جسمین فقط ایک حرف مجہول ہوگا اور وہ نہایت آسانی سی معلوم ہوسکتا ہی

مثال ۱

لا + ی + ر = ۳۱ ....(۱)

لا + ی - ر = ۲۵ ....(۲)

- لا + ۳ی + ر = ۷ ....(۳)

مساوات (۱) اور مساوات (۲) کو جمع کیا

∴ ۲ لا + ۲ ی = ۵۶

∴ لا + ی = ۲۸ ......(۴)

پہر مساوات (۱) مین سے مساوات (۳) کو تفریق کرین

۲ لا - ۲ ی = ۲۴

∴ لا - ی = ۱۲

اور لا + ی = ۲۸ موافق (۴) کے

۲ لا = ۴۰ جمع کیا

∴ لا = ۲۰

اور ی = ۲۸ − لا = ۲۸ − ۲۰ = ۸

اور لا + ی + ر = ۳۱

∴ ر = ۳۱ − لا − ی

= ۳۱ − ۲۰ − ۸

= ۳۱ − ۲۸

= ۳

یعنے ر = ۳

۲ لا + ۲ی − ر = ۷ ....(۱)

۳ی − لا + ر = ۳ ....(۲)

۲ر + لا − ی = ۴ ....(۳)

مساوات (۱) کو اور مساوات (۲) کو جمع کیا

لا + ۲ی − ر = ۷

۳ی − لا + ر = ۳

∴ ۵ی = ۱۰

∴ ی = ۲

مساوات (۲) کو اور (۳) کو جمع کیا

۳ی − لا + ر = ۳

۲ر + لا − ی = ۴

۲ی + ۳ر = ۷

ی کی قیمت رکھی

∴ ۴ + ۳ر = ۷

∴ ۳ر = ۳

∴ ر = ۱

اور لا + ۲ی − ر = ۷

∴ لا = ۷ + ر − ۲ی = ۷ + ۱ − ۴ = ۴

۳ لا + ی + ر = ۹۰ ....(۱)

۲ لا + ۴۰ = ۳ی + ۲۰ ....(۲)

۲ لا + ۲۰ = ۴ر − ۱۰ ....(۳)

(۲) سے (۳) کو تفریق کیا

∴ ۲۰ = ۳ی − ۴ر + ۳۰

∴ ۴ر − ۳ی = ۱۰ ....(۴)

مساوات (۱) کو ۲ مین ضرب کرکے مفروق منہ بنایا اور مساوات (۲) کو مفروق مقرر کرکے تفریق کی

∴ ۲لا + ۲ی + ۲ر = ۱۸۰

۲لا − ۳ی = −۲۰

۵ی + ۲ر = ۲۰۰

اس مساوات کو ۲ مین ضرب کیا

∴ ۱۰ی + ۴ر = ۴۰۰

اور ۴ر − ۳ی = ۱۰

موافق (۴) کے تفریق کی

۱۳ی = ۳۹۰

∴ ی = ۳۰

اور ۴ر = ۱۰ + ۳ی = ۱۰ + ۹۰

= ۱۰۰

∴ ر = ۲۵

اور لا + ی + ر = ۹۰

∴ لا = ۹۰ − ی − ر = ۹۰ − ۳۰ − ۲۵

= ۳۵

۴ لا + ی + ر = ۵۳ ....(۱)

لا + ۲ی + ۳ر = ۱۰۵ ....(۲)

لا + ۳ی + ۴ر = ۱۳۴ ....(۳)

مساوات (۲) سے (۱) کو تفریق کیا

ل + ۲ی + ۳ر = ۱۰۵

ل + ی + ر = ۵۳

ی + ۲ر = ۵۲ ...... (۴)

پہر مساوات (۳) مین سی (۲) کو تفریق کیا

ل + ۳ی + ۴ر = ۱۳۴

ل + ۲ی + ۳ر = ۱۰۵

ی + ر = ۲۹

موافق (۴) کے — ی + ۲ر = ۵۲

تفریق کی — ‎-ر = ‎-۲۳

یا ر = ۲۳

اور ی + ر = ۲۹

∴ ی = ۲۹ − ر

= ۲۹ − ۲۳

= ۶

یعنی ی = ۶

اور ل + ی + ر = ۵۳

∴ ل = ۵۳ − ی − ر = ۵۳ − ۶ − ۲۳

= ۵۳ − ۲۹

= ۲۴

یعنی ل = ۲۴

۵ ل + ی + ر = ۲۹ ..... (۱)

ل + ۲ی + ۳ر = ۶۲ ...... (۲)

ل/۲ + ی/۳ + ر/۴ = ۱۰ .... (۳)

مساوات (۲) سی (۱) کو تفریق کیا

ل + ۲ی + ۳ر = ۶۲

ل + ی + ر = ۲۹

ی + ۲ر = ۳۳ ... (۴)

مساوات (۳) کو ۱۲ مین ضرب کرکی کسر دور کی

∴ ۶ل + ۴ی + ۳ر = ۱۲۰

مساوات (۱) کو ۶ مین ضرب کرکی لکہا — ۶ل + ۶ی + ۶ر = ۱۷۴

تفریق کی — ‎-۲ی − ۳ر = ‎-۵۴

یا ۲ی + ۳ر = ۵۴

مساوات (۴) کو ۲ مین ضرب کرکی لکہا — ۲ی + ۴ر = ۶۶

تفریق کی — ‎-ر = ‎-۱۲

یا ر = ۱۲

اور ی + ۲ر = ۳۳

∴ ی = ۳۳ − ۲ر

= ۳۳ − ۲۴

= ۹

یعنی ی = ۹

اور ل = ۲۹ − ی − ر

= ۲۹ − ۹ − ۱۲

= ۲۹ − ۲۱

= ۸

یعنی ل = ۸

جسطرح تین مساواتون سی تین مجہولون کی قیمتین معلوم ہوتی ہین اسیطرح چار مساواتون سی چار مجہولون کی قیمت دریافت ہوتی ہی اور پانچ مساواتون سی پانچ مجہولون کی قیمت دریافت ہوتی ہی اور علی ہذا القیاس

ہر صورت مین دو دو مساواتون سی ایک ایک حرف مجہول دور کرنا چاہیئے اور اس عمل سی ایسی مساواتین حاصل ہونگی جنمین ایک ایک مجہول کم ہوگا اور پہر ان مساواتون مین سے دو دو مساوات لیکر ایک ایک حرف مجہول دور کرنا چاہیئے اور اس عمل سے ایسی مساواتین حاصل ہونگی جنمین دو دو مجہول کم ہونگی اور علی ہذا القیاس اسی عمل کی رعایت کرین یہان تک کہ ایک مجہول کی مساواتین حاصل ہون پس ان سے سب مجہولون کی قیمتین دریافت ہوجاوینگی

+ اب ہم مشق کے واسطی مساواتین بغیر حل کی ہوئے لکھتی ہین

۱ — ۱۹لا + ۱۳ = ۵۹ − ۴لا — جواب لا = ۲

۲ — ۳لا + ۴ − لا/۳ = ۴۶ − ۲لا — جواب لا = ۹

۳ — لا² + ۱۵لا = ۳۵لا − ۳لا² — جواب لا = ۵

۴ — لا/۲ + لا/۴ + ۱۰ = لا/۳ − لا/۲ + ۱۱ — جواب لا = ۱۲

۵ — (لا + ۱)/۵ + ۲ = (۲لا − ۳)/۳ — جواب لا = ۹

۶ — (۷لا + ۲)/۳ + ۵لا = ۲۸ + (۵لا − ۶)/۷ — جواب لا = [illegible]

۷ — (۳لا + ۴)/۵ + ۲لا = (۲۲ − لا)/۵ + ۱۶ — جواب لا = ۷

۸ — (۷ − ۱)/۲ + ۴ = (۳لا − ۱۱)/۴ + (۸لا + ۱۵)/۶ — جواب لا = ۳

۹ — (۳لا − ۵)/۱۸ + (۱۹ − لا)/۳ = (۱۰لا − ۷)/۹ − ۵/۲ — جواب لا = ۷

۱۰ — لا − (۲لا + ۱)/۳ = (لا + ۳)/۴ — جواب لا = ۱۳

۱۱ — (۳لا + ۵)/۸ − (۲۱ + لا)/۳ = ۳۹ − ۵لا — جواب لا = ۹

۱۲ — ۴لا − (۱۹ + ۲لا)/۵ = ۱۵ − (۷لا + ۱۱)/۴ — جواب لا = ۳

۱۳ — (۲۱ − ۳لا)/۳ − (۴لا + ۶)/۹ = ۶ − (۵لا + ۱)/۴ — جواب لا = ۳

۱۴ — ۷ ۵/۸ + (۳لا − ۱)/۴ − (۷لا + ۳)/۱۶ = (۸لا + ۱۹)/۸ — جواب لا = ۷

۱۵ — (۶لا + ۸)/۱۱ − (۵لا + ۳)/۲ = (۲۷ − ۴لا)/۳ − (۳لا + ۹)/۲ — جواب لا = ۶

۱۶ — لا + (۲۷ − ۹لا)/۴ − (۵لا + ۲)/۶ = ۴۱/۱۲ − (۲لا + ۵)/۳ − (۲۹ + ۴لا)/۱۲ — جواب لا = ۵

۱۷ — (۷لا − ۸)/۱۱ + (۱۵لا + ۸)/۱۳ = ۳لا − (۳۱ − لا)/۲ — جواب لا = ۹

۱۸ — (۵لا − ۱)/۲ − (۷لا − ۲)/۱۰ = ۶ ۳/۵ − لا/۲ — جواب لا = ۳

۱۹ — (۳لا − ۳)/۴ − (۳لا − ۴)/۳ = ۵ ۱/۳ − (۲۷ + ۴لا)/۹ — جواب لا = ۹

۲۰ — (۴لا − ۳۴)/۱۷ − (۲۵۸ − ۵لا)/۳ = (۶۹ − لا)/۲ — جواب لا = ۵۱

۲۱ — ۲لا − (۴لا − ۲)/۱۳ = (۲لا + ۱۱)/۵ − (۷ − ۸لا)/۷ — جواب لا = ۷

۲۲ — (۲لا + ۱)/۲۹ − (۴۰۲ − ۳لا)/۱۲ = ۹ − (۴۷۱ − ۶لا)/۲ — جواب لا = ۷۲

۲۳ — (۷لا + ۹)/۸ − (۳لا + ۱)/۷ = (۹لا − ۱۳)/۴ − (۲۴۹ − ۹لا)/۱۴ — جواب لا = ۹

۲۴ — ۵ − (۳لا + ۲۵)/۴ − (۱۷ − ۶لا)/۹ = ۲ ۱/۳۶ + لا − (۹لا + ۴۰)/۸ — جواب لا = ۴

۲۵ — (۷لا − ۴۳)/۱۲ + ۱۳ ۱/۲ − (۵ + ۴لا)/۶ = ۲۵۶ − (۳لا − ۱۲)/۹ — جواب لا = ۹۹

۲۶ — ۴لا + ۱/۱۰ − (۳لا − ۱۳)/۱۶ − (۱۲ + ۷لا)/۹ = ۷لا − ۳۲ − (۹ + ۵لا)/۱۰ − (۱۱لا − ۱۷)/۸ — جواب لا = ۱۵

۲۷ — (۳۱ + ۴لا)/۳ − (۳لا + ۴۷)/۸ − (۳لا − ۱۹)/۱۶ = ۴۷ ۳/۴ + (۱۶ − ۱۰لا)/۱۱ − (۵لا + ۲۰)/۷ — جواب لا = ۱۷

۲۸ — (۳ط + لا)/لا − ۵ = ۶/لا — جواب لا = (۳ط − ۶)/۴

۲۹ — ۵/۶ طص + ۴/۵ طس − ۲/۳ س لا = ۳/۴ طس + ۲طص − ۶س لا — جواب لا = (۷۰طص − ۳طس)/(۳۲۰س)

۳۰ — (۱۱لا − ۱۳)/۲۵ + (۱۹لا + ۳)/۷ − (۵لا − ۱۵ ۱/۳)/۴ = ۲۸ ۱/۷ − (۱۷لا + ۴)/۲۱ — جواب لا = ۸

۳۱ — (۳لا/۲ − ۴)/۶ − (۴لا − ۷)/۹ + لا/۲ = (۸ − (لا + ۴)/۳)/۳ — جواب لا = ۴

۳۲ — (لا − ۱ ۲۵/۲۶)/۲ − (۲ − ۶لا)/۱۳ = لا − (۵لا − (۱۰ − ۳لا)/۴)/۳۹ — جواب لا = ۱۱

۳۳ — ط²لا/(ص س) − ع²/ط + ص لا = ی لا/ف − ص + (ع + ص) لا — جواب لا = ص س ف (ع² − ط ص)/(ط²ف − ط ص س ی − ط ص س ع ف)

۳۴ ط لا/ص + س لا/ع + ی لا/ف − ل = ق — جواب لا = (ل + ق) ص ع ف / (ط ع ف + ص س ف + ص ع ی)

۳۵ ط² لا/(ص − س) − ع س = ص لا − ط س — جواب لا = س(ص − س)(ع − ط) / (ط² − ص² + ص س)

۳۶ ۲لا/۳ − (۱ − لا/۲)/۴ = (لا − ۱)/۲ + لا/۶ + ۷/۱۲ — جواب لا = ۶

۳۷ (۹لا + ۲۰)/۳۶ = (۴لا − ۱۲)/(۵لا − ۴) + لا/۴ — جواب لا = ۸

۳۸ (۲۰لا + ۳۶)/۲۵ + (۵لا + ۲۰)/(۹لا − ۱۶) = ۴لا/۵ + ۸۶/۲۵ — جواب لا = ۴

۳۹ (۱۰لا + ۱۷)/۱۸ − (۱۲لا + ۲)/(۱۳لا − ۱۶) = (۵لا − ۴)/۹ — جواب لا = ۴

۴۰ (۱۸لا − ۱۹)/۲۸ + (۱۱لا + ۲۱)/(۶لا + ۱۴) = (۹لا + ۱۵)/۱۴ — جواب لا = ۷

۴۱ (۲لا + ۸½)/۹ − (۱۳لا − ۲)/(۱۷لا − ۳۲) + لا/۳ = ۷لا/۱۲ − (لا + ۱۶)/۳۶ — جواب لا = ۴

۴۲ (۷لا + ۶)/۲۸ − (۲لا + ۴⅔)/(۲۳لا − ۶) + لا/۴ = ۱۱لا/۲۱ − (لا − ۳)/۴۲ — جواب لا = ۴

۴۳ (۶ − ۵لا)/۱۵ − (۷ − ۲لا²)/(۱۴(لا − ۱)) = (۱ + ۳لا)/۲۱ − (۲لا − ۴/۵)/۶ + ۱/۱۰۵ — جواب لا = ۴

۴۴ ط(ص² + لا²)/(ص لا) = ط س + ط لا/ص — جواب لا = ص/س

۴۵ س لا²/(ط + ص لا) = ع لا²/(ی + ف لا) — جواب لا = (ط ع − س ی)/(س ف − ص ع)

۴۶ ط/(ص لا) + س/(ع لا) + ی/(ف لا) + ق/(ح لا) = ل — جواب لا = (ط ع ف ح + ص س ف ح + ص ع ی ح + ص ع ف ق)/(ص ع ف ح ل)

۴۷ (ط + لا)(ص + لا) − ط(ص + س) = ط² س/ص + لا² — جواب لا = ط س/ص

۴۸ (۱۰ + لا)/۵ : (۴لا − ۹)/۷ :: ۱۴ : ۵ — تناسب کے صورتمین طرفین کے حاصلضرب کو برابر لکھکر مساوات بنانی چاہئے — جواب لا = ۴

۴۹ (۱۷ − ۴لا)/۴ : (۱۵ + ۲لا)/۳ − ۲لا :: ۵ : ۴ — جواب لا = ۳

۵۰   ۲لا+۵ : (۴لا+۱۴)/(۹لا+۳۱) :: ۶لا۳+۱۰ : ۱   جواب لا = ۵

۵۱   (۴لا+۳)/(۶لا−۴۳) : ۱ :: ۲لا+۹ : ۳لا−۱۹   جواب لا = ۸

۵۲   ۵لا + (۷لا+۹)/(۴لا+۳) = ۹ + (۱۰لا^۲−۱۸)/(۲لا+۳)   جواب لا = ۳

۵۳   ∛(۱۰لا+۳۵) − ۱ = ۴   جواب لا = ۹

۵۴   ⁵√(۹لا−۴) + ۶ = ۸   جواب لا = ۴

۵۵   √(لا+۱۶) = ۲ + √لا   جواب لا = ۹

۵۶   √(لا−۳۲) = ۱۶ − √لا   جواب لا = ۸۱

۵۷   √(۴لا+۲۱) = ۲√لا + ۱   جواب لا = ۲۵

۵۸   ∛(ص لا − س) = ع ∛(ی لا + ف لا − ن)   جواب لا = (ط^۳ س − ع^۳ ن)/(ط^۳ ص − ع^۳ (ی+ف))

۵۹   ∜(ط^۲ + س) = ∜(ط^۲ + س)/(ع (لا+ص))   جواب لا = ∛(ع^۱ ... لا^۲ + س) − ص

۶۰   ᵐ√(لا + ط) = ᵐᵐ√(لا^۲ + ۵ط لا + ص)   جواب لا = (ط^۲ − ص)/(۳ط)

۶۱   (ط+ص) ᵐ√(لا+ع) = س   جواب لا = ((س−ط)/ص)^م − ع

۶۲   (√(۹لا) − ۴)/(√لا + ۲) = (√(۹لا) + ۱۵)/(√لا + ۴۰)   جواب لا = ۴

۶۳   (√لا + √ص)/(√لا − √ص) = ط/ص   جواب لا = ص ((ط+ص)/(ط−ص))^۲

۶۴   (√(۶لا) − ۲)/(√(۶لا) + ۲) = (۴√(۶لا) − ۹)/(۴√(۶لا) + ۶)   جواب لا = ۶

۶۵   (۵لا − ۹)/(√(۵لا) + ۳) − ۱ = (√(۵لا) − ۳)/۲   جواب لا = ۵

۶۶   √(لا + ۱ √(لا^۲ + ۱۲)) = ۱ + لا   جواب لا = ۲

۶۷ $\frac{\text{ط لا}}{\text{ص}}\sqrt{\text{س}^{2}\text{لا}^{2}+\text{ع}^{2}}+\frac{\text{ط س لا}^{2}}{\text{ص}}=\text{ی لا}$ جواب $\text{لا}=\frac{\text{ص}^{2}\text{ی}^{2}-\text{ط}^{2}\text{ع}^{2}}{\text{۲ ط ص س ی}}$

۶۸ $\sqrt{\text{لا}}+\sqrt{\text{لا}+\text{۹}}=\frac{\text{۳۶}}{\sqrt{\text{لا}-\text{۹}}}$ جواب $\text{لا}=\text{۲۵}$

مساوات دو مجہولوں کی

۱ $\left\{\begin{array}{l}\text{لا}+\text{۱۵ء}=\text{۵۳}\\ \text{ء}+\text{۳لا}=\text{۲۷}\end{array}\right.$ جواب $\left\{\begin{array}{l}\text{لا}=\text{۸}\\ \text{ء}=\text{۳}\end{array}\right.$

۲ $\left\{\begin{array}{l}\text{۴لا}+\text{۹ء}=\text{۵۱}\\ \text{۸لا}-\text{۱۳ء}=\text{۹}\end{array}\right.$ جواب $\left\{\begin{array}{l}\text{لا}=\text{۶}\\ \text{ء}=\text{۳}\end{array}\right.$

۳ $\left\{\begin{array}{l}\frac{\text{لا}}{\text{۶}}+\frac{\text{ء}}{\text{۴}}=\text{۶}\\ \frac{\text{لا}}{\text{۴}}+\frac{\text{ء}}{\text{۶}}=\text{۵}\frac{\text{۲}}{\text{۳}}\end{array}\right.$ جواب $\left\{\begin{array}{l}\text{لا}=\text{۱۲}\\ \text{ء}=\text{۱۶}\end{array}\right.$

۴ $\left\{\begin{array}{l}\frac{\text{لا}}{\text{۸}}+\text{۸ء}=\text{۱۹۴}\\ \frac{\text{ء}}{\text{۸}}+\text{۸لا}=\text{۱۳۱}\end{array}\right.$ جواب $\left\{\begin{array}{l}\text{لا}=\text{۱۶}\\ \text{ء}=\text{۲۴}\end{array}\right.$

۵ $\left\{\begin{array}{l}\frac{\text{۳لا}-\text{۱}}{\text{۵}}+\text{۳ء}-\text{۴}=\text{۱۵}\\ \frac{\text{۳ء}-\text{۵}}{\text{۶}}+\text{۲لا}-\text{۸}=\text{۷}\frac{\text{۲}}{\text{۳}}\end{array}\right.$ جواب $\left\{\begin{array}{l}\text{لا}=\text{۷}\\ \text{ء}=\text{۵}\end{array}\right.$

۶ $\left\{\begin{array}{l}\text{۹لا}+\frac{\text{۸ء}}{\text{۵}}=\text{۷۰}\\ \text{۷ء}-\frac{\text{۱۳لا}}{\text{۳}}=\text{۴۴}\end{array}\right.$ جواب $\left\{\begin{array}{l}\text{لا}=\text{۶}\\ \text{ء}=\text{۱۰}\end{array}\right.$

۷ $\left\{\begin{array}{l}\frac{\text{لا}+\text{۷}}{\text{۵}}-\frac{\text{۲لا}-\text{ء}}{\text{۴}}=\text{۳ء}-\text{۵}\\ \frac{\text{۵ء}-\text{۷}}{\text{۲}}+\frac{\text{۴لا}-\text{۳}}{\text{۶}}=\text{۱۸}-\text{۵لا}\end{array}\right.$ جواب $\left\{\begin{array}{l}\text{لا}=\text{۳}\\ \text{ء}=\text{۲}\end{array}\right.$

۸

$$\begin{cases} \text{ل}+1-\frac{3\text{ی}+4\text{ل}}{7}=7-\frac{9\text{ی}+33}{14} \\ \text{ی}-3-\frac{5\text{ل}-4\text{ی}}{2}=\text{ل}-\frac{11\text{ی}-19}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{ل}=6 \\ \text{ی}=5 \end{cases}$$

۹

$$\begin{cases} 4\text{ل}+\frac{15-\text{ل}}{4}=2\text{ی}+5+\frac{7\text{ل}+11}{16} \\ 3\text{ی}-\frac{2\text{ل}+\text{ی}}{5}=2\text{ل}+\frac{2\text{ی}+4}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{ل}=3 \\ \text{ی}=4 \end{cases}$$

۱۰

$$\begin{cases} \text{ل}-\frac{3\text{ل}+5\text{ی}}{17}+17=5\text{ی}+\frac{4\text{ل}+7}{3} \\ \frac{22-6\text{ی}}{3}-\frac{5\text{ل}-7}{11}=\frac{\text{ل}+1}{6}-\frac{8\text{ی}+5}{18} \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{ل}=8 \\ \text{ی}=2 \end{cases}$$

۱۱

$$\begin{cases} \frac{7\text{ل}-21}{6}+\frac{3\text{ی}-\text{ل}}{3}=4+\frac{3\text{ل}-19}{2} \\ \frac{2\text{ل}+\text{ی}}{2}-\frac{9\text{ل}-7}{8}=\frac{3\text{ی}+9}{4}-\frac{4\text{ل}+5\text{ی}}{16} \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{ل}=9 \\ \text{ی}=4 \end{cases}$$

۱۲

$$\begin{cases} \frac{\text{ط}}{\text{ی}+\text{ص}}=\frac{\text{ص}}{3\text{ط}+\text{ل}} \\ \text{ط}\text{ل}+2\text{ص}\text{ی}=\text{س} \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{ل}=\frac{2\text{ص}^2-6\text{ط}^2+\text{س}}{3\text{ط}} \\ \text{ی}=\frac{3\text{ط}^2-\text{ص}^2+\text{س}}{3\text{ص}} \end{cases}$$

۱۳

$$\begin{cases} \frac{7\text{ل}+6}{11}+\frac{4\text{ی}-9}{3}=3\text{ل}-\frac{13-\text{ل}}{2}-\frac{3\text{ی}-\text{ل}}{5} \\ 3\text{ل}+4 : 2\text{ی}-3 :: 5 : 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{ل}=7 \\ \text{ی}=9 \end{cases}$$

۱۴

$$\begin{cases} \frac{5\text{ل}+13}{2}-\frac{8\text{ی}-3\text{ل}-5}{6}=9+\frac{7\text{ل}-3\text{ی}+1}{3} \\ \frac{\text{ل}+7}{3} : 4\text{ل}+\frac{3\text{ی}-8}{4} :: 4 : 21 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{ل}=5 \\ \text{ی}=4 \end{cases}$$

۱۵

$$\begin{cases} \text{ل}+\text{ی} : 4\text{ل}+\text{ی} :: 4 : 7 \\ \frac{\frac{11\text{ی}}{6}-2\text{ل}}{5}-\frac{21-3\text{ی}}{4}=\frac{2+\frac{\text{ل}}{10}}{3}-\frac{1}{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{ل}=2 \\ \text{ی}=6 \end{cases}$$

١٦

(٣ل + ٤ى + ٣)/١٠ − (٢ل + ٧ − ى)/١٥ = ٥ + (ى − ٨)/٥

(٩ى + ٥ل − ٨)/١٢ − (ل + ى)/٤ = (٧ل + ٦)/١١

ل = ٧ ، ى = ٩

١٧

١٣ل + (٤ى − ١٧ + ل)/١٢ − (١٥ − ٣ل)/٤ = (١٢ى + ١١)/٣ − (١٢ل + ٧ى + ٢٨)/٦

(٩ل + ١٨)/٤ − (١٢ + ٥ى − ٦ل)/٥ = (١٥ل − ٣ى − ٥)/٨ − (٧ل + ى − ١٠)/١٥

ل = ٢ ، ى = ١١

١٨

٣ل + ٥ى = (٨ط − ٢ص)طص/(ط٢ − ص٢)

ط٢ل − طس ص٢/(ط + ص) + (ط + ص + س)صى = ص٢ل + (ط + ٢ص)طص

ل = طص/(ط − ص) ، ى = طص/(ط + ص)

١٩

(٢ل + ى)/٩ + (٧ى + ٦ل + ١١)/١٨ = ٩ ١/٢ − (٥ل − ١٧)/٦

(٥ل + ٣ى + ٢)/٧ : (٩ى + ٦)/٢ :: ١ : ٣

ل = ٧ ، ى = ٤

٢٠

(٣ل − ٥ى)/٣ − (٢ل − ٨ى − ٩)/١٢ = ى/٢ + ١/٣ + ١/٤

ل/٧ + ى/٤ + ١ ١/٣ : ٤ل − ى/٨ − ٢٤ :: ٣ ١/٣ : ٣ ١/٢

ل = ٧ ، ى = ٤

٢١

(ل + ٥)(ى + ٧) = (ل + ١)(ى − ٩) + ١١٢

٢ل + ١٠ = ٣ى + ١

ل = ٣ ، ى = ٥

٢٢

(٦ل + ٩)/٤ + (٣ل + ٥ى)/(٤ل − ٦) = ٣ ١/٤ + (٣ل + ٤)/٢

(٨ى + ٧)/١٠ + (٦ل − ٣ى)/(٢ى − ٨) = ٤ + (٤ى − ٩)/٥

ل = ٧ ، ى = ٩

٢٣

٤ل − ٣٤ ١/٤ − (٤ى + ١٣ل)/(٢٧ − ٦ى) = (١٢ل + ٨)/٣

٣ل + (٢١ − ٤ى)/(٤ل − ١٠) = (١٨ل + ١٣)/٩ − ٢ ١/٩

ل = ٧ ، ى = ٥

٢٤

١٦ل + ٦ى − ١ = (١٢٨ل^٢ − ١٨ى^٢ + ٢١٧) / (٨ل − ٣ى + ٢)

(١٠ل + ١٠ى − ٣٥) / (٢ل + ٢ى + ٣) = ٥ − ٥٤ / (٣ل + ٢ى − ١)

ل = ٦ ، ى = ٥

٢٥

٤ل + ٣ى + (٢٤ + ١١ى/٢) / (٢ل + ١) = (١٦ل^٢ + ١٢لى − ٨ل + ٥ى + ٢٨) / (٤ل − ٢)

٢ل + ٤ = ٣ى + (٨ل^٢ − ١٨ى^٢ + ١٠٨) / (٤ل + ٦ى + ٣)

ل = ٣ ، ى = ٢

٢٦

٣ل + ٦ى + ١ = (٦ل^٢ + ١٣٠ − ٢٤ى^٢) / (٢ل − ٤ى + ٣)

٣ل − (١٥١ − ١٦ل) / (٤ى − ١) = (٩لى − ١١٠) / (٣ى − ٤)

ل = ٩ ، ى = ٢

٢٧

(ل − ٦) / ٧ى + (٤ل + ٧) / ٢٤ − (ل − ٧) / ٩ = (١٩ + ى) / ٤٢ − (١١ل/٣ + ٦) / ٣٦ى

٢ل − ١٥ى + ١٣/٤ : ١٠ى − ٨ل + ٨٦/٣ :: ٩٣ − ٩ل : ٦ل − ١٤/٥

ل = ٩ ، ى = ٧

٢٨

(٧ل/٤ + ٦ى) / ٥ − [(٣ى + ٦)/٥ − (٣ل − ٢)/١٠] / ٨ = ٥ − ل/١٦

٣ل/٢ + ٢ى/٣ + ٢ ١/٢ : ل/٢ − ٧ى/٣ + ١/٩ :: ١٠ ١/٢ : ١ ١/٩

ل = ٤ ، ى = ٣

٢٩

(٤ل − ٢ى + ٣) / ٣ − (١٨ − ل + ٥ى) / ٧ = ل/٤ − ى/٥ − ١/٧ − ٧ ٥/١٠

٢ل − ى + ١٥ : ى − ٢ل + ١٥ :: ل/٣ − ى/٤ + ٣/٤ : ى/٤ − ل/٣ + ١/١٢

ل = ١٨ ، ى = ٢٤

٣٠

٤ (١٢ى − (٦ى + ٢)/ل) / ١١ = ى + ((٣لى − ٣٦)/١١ + ١٠ل + ١٣) / ٣ل

٢ل/٣ − (٣ل − ٥) / (ى + ٧) = (٤لى + ١٤٠/٣) / (٦ى + ٢٧)

ل = ٧ ، ى = ٢

٣١

√ى − √(ى − ل) = √(٢٠ − ل)

√(ى − ل) : √(٢٠ − ل) :: ٣ : ٢

ل = ١٦ ، ى = ٢٥

مساوات درجہ دویم کی

جاننا چاہیے کہ مساوات درجہ دویم کی وہ مساوات کو کہتی ہین جسمین حرف مجہول کی دوسری قوت ہو یعنی اوسمین مجذور مجہول کا پایا جاوے لیکن بعضی دفعہ ایسی مساوات کو بہی درجہ دویم کی مساوات کہتی ہین جسمین نشان قوت ۲ سی زیادہ ہو مگر اسمین ایک شرط ہی اور وہ اگی بیان کی جاویگی واضح ہو کہ درجہ دویم کی مساوات دو طرح کی ہوتی ہی ایک مفرد اور ایک مرکب مفرد مساوات درجہ دویم کی وہ ہوتی ہی جسمین حرف مجہول کا مجذور ہی پایا جاوی یعنی مساوات اسطرح کی نہو کہ اوسمین حرف مجہول کا مجذور بہی اور حرف مجہول کی اول قوت بہی ہو مثلاً $\text{لا}^2 + ۹ = ۱۸$ مفرد مساوات درجہ دویم کی ہی اسواسطی کہ اسمین حرف مجہول کی اول قوت نہین پائی جاتی فقط مجذور مجہول کا ہی اور اس مفرد مساوات کا حل کرنا آسان ہی قاعدہ اسکی واسطے یہہ ہی کہ حرف مجہول کے مجذور کو ایک طرف رکہین اور مقادیر معلومہ کو دوسری طرف مساوات کی لیجائین پہر اگر حرف مجہول کا کچہہ سر نہو تو طرفین کا جذر لین اور ان جذرون کو مساوی لکہین اس عمل سیے حرف مجہول ایک طرف رہیگا اور مقدار معلوم دوسری طرف ہوگی اور قیمت مجہول کی دریافت ہو جاویگی اور اگر حرف مجہول کے مجذور کا کچہہ سر ہو تو طرفین مساوات کو اوس سر پر تقسیم کرین بعد اسکی جذر لین مثلاً $\text{لا}^2 + ۹ = ۱۸$

اس مساوات مین عدد ۹ کو دوسری طرف لیگئی تو لا^2 برابر رہا عدد ۹ سیے

$$\text{لا}^2 = ۱۸ - ۹$$
$$= ۹$$
$$\therefore \text{لا} = ۳$$

طرفین کا جذر لیا تو لا برابر ہوا ۳ کے یعنی لا کی قیمت ۳ ہی

اگر مساوات یہہ $۵\,\text{لا}^2 - ۴۵ = ۰$ ہو تو اسکا حل یہہ ہی

$$۵\,\text{لا}^2 = ۴۵$$
$$\therefore \text{لا}^2 = ۹$$
$$\therefore \text{لا} = ۳$$

یعنی اس صورت مین لا^2 کا سرہ ۵ تہا اسواسطی طرفین مساوات کو ۵ پر تقسیم کیا اور بعد تقسیم کرنی کی طرفین کا جذر لیا یہہ بات ظاہر ہی کہ اگر ۳ کو ۳ مین ضرب کرین تو حاصلضرب ۹ ہوتا ہی اور اگر -۳ کو -۳ مین ضرب کرین تو بہی حاصلضرب ۹ ہوتا ہی اس سیے معلوم ہوا کہ ۹ کا جذر ۳ بہی ہی اور -۳ بہی ہی اور اسیطرح سی ہر عدد مین یہی بات پائی جاتی ہی ۴ کو ۴ مین ضرب کرین تو ۱۶ ہوتیے ہین اور -۴ کو -۴ مین ضرب کرین تو بہی ۱۶ ہوتیے ہین پس معلوم ہوا کہ ہر مجذور کی واسطی دو جذر ہوتی ہین ایک مثبت اور ایک منفی پس اگر یہہ مساوات ہو $\text{لا}^2 = ۹$ تو ظاہر ہی کہ $\text{لا} = ۳$ اور $\text{لا} = -۳$ کیونکہ لا ۹ کی جذر کی برابر ہی اور جذر ۹ کا ۳ بہی ہی اور -۳ بہی ہی اسیواسطی لا کی دو قیمتین ہوئین ایک $+۳$ اور ایک -۳ چونکہ مساوات درجہ دویم مین جذر لینی سیے

قیمت مجہول کی معلوم ہوتی ہی تو موافق بیان بالا کی یہہ بات عموماً بیان کیجاتی ہی کہ درجہ دویم کی مساوات مین
مجہول کی دو قیمتین ہوتی ہین اب جاننا چاہیئے کہ مرکب مساوات درجہ دویم کی وہ ہوتی ہی جسمین حرف مجہول اسکے
دوسری قوت بہی ہو اور اول قوت بہی ہو مثلاً $لا^2 + لا = 6$ مرکب مساوات درجہ دویم کی ہی کیونکہ
اسمین $لا^2$ حرف مجہول کی دوسری قوت ہی اور لا کی اول قوت بہی ہی اس مساوات کی دیکھنی سے
یہہ بات معلوم ہوتی ہی کہ اسمین حرف مجہول اسطرح واقع ہین کہ ایک کا نشان قوت دوسری سے دوچند ہی
پس جس مساوات مین یہہ بات واقع ہوگی وہ درجہ دویم کی قاعدہ سی حل ہو سکتی ہی مثلاً $لا^4 + لا^2 = 1$
یہہ بہی درجہ دویم کی موافق حل ہو سکتی ہی اسیواسطی زیادہ درجہ کی مساواتین جنمین شرط مذکور پائی جاوی
درجہ دویم مین داخل ہین کیونکہ اوسی قاعدہ سی حل ہو سکتی ہین جس سے درجہ دویم کی مساوات حل ہو سکتی ہی
مثلاً $لا^{2ن} + لا^{ن} = ص$ درجہ دویم کی مساوات ہی کسواسطی کہ اسمین نشان قوت حرف مجہول کا ایک سے
بہ نسبت دوسری کے دوچند ہی اسیطرح یہہ مساوات $(لا+ط)^4 + (لا+ط)^2 = ع$ بہی درجہ دویم کی
مساوات ہی کیونکہ اسمین (لا + ط) کی چوتہی قوت ہی اور پہر اوسی (لا + ط) کی دوسری قوت بہی ہی
یعنی پہلا نشان قوت ایک مقدار کا جسمین حرف مجہول پایا جاتا ہی دوچند ہی نشان قوت اوسی مقدار کی سے
اسیطرح $لا + لا^{\frac{1}{2}} = 6$ بہی مساوات درجہ دویم کی ہی کیونکہ اسمین لا کی اول قوت ہی اور $لا^{\frac{1}{2}}$ اسکے
نصف ہی یعنی اول کی قوت دوچند ہی بہ نسبت دوسری کے اسیطرح $لا^{\frac{1}{2}} - لا^{\frac{1}{4}} = ط$ کی درجہ دویم کے
مساوات ہی اور بعینہٖ اسیطرح $\sqrt{لا+ط} - \sqrt[4]{لا+ط} = ص$ بہی درجہ دویم کی مساوات ہی
کیونکہ اول مقدار مین دوسری مرتبہ کا نزول ہی اور دوسری مقدار مین اوسی مقدار کا چوتہی مرتبہ کا نزول ہی
اور علی ہذا القیاس $\sqrt{لا+1} - \sqrt[4]{لا+1} = 6$ درجہ دویم کی مساوات ہی کیونکہ اسمین (لا + ۱)
کی اول قوت ہی اور پہر اسی مقدار کا جذر ہی یعنے نصف قوت ہی علی ہذا القیاس اور صورتین جنمین شرط
مذکورہ بالا پائی جاویگی درجہ دویم کی مساوات مین داخل ہونگی جاننا چاہیئے کہ مرکب مساوات
درجہ دویم کی کئی قاعدون سے حل ہو سکتی ہی مگر اول ہم ایسی باتین بیان کرتے ہین جنسی اصل اور حقیقت
قاعدہ کی طالب علم کی ذہن نشین ہو جاوے ظاہر ہی کہ اگر لا + ط کا مجذور کرین تو یہہ حاصل ہوگا
$لا^2 + 2طلا + ط^2$ اسمین لا کا مجذور ہی اور ط کا مجذور ہی اور دوچند حاصلضرب لا اور ط کا ہی
اور اسیطرح جب دو مقدارون کی مجموعہ کا مجذور کرتے ہین تو دونو مقدارون سے مجذور اور دونو کا
دوچند حاصلضرب حاصل ہوتا ہی اور اگر دو مقدارون کے حاصل تفریق کا مجذور کرین مثلاً (لا − ط) کا تو
یہہ حاصل ہوتا ہی $لا^2 - 2طلا + ط^2$ اسمین بہی دونو مقدارون کے مجذور ہین اور دوچند مسطح دونو مقدارون

ہی لیکن علامت دوچند مسطح کی منفی ہی پس مجموعہ اور حاصل تفریق سے مجذور کو اسطرح لکھ سکتی ہین
$لا^2 \pm ۲ ط لا + ط^2$ اس صورت کی دیکھنی سیے یہہ بات معلوم ہوتی ہی کہ دوچند مسطح کا نصف کرکر باقی کے
دونو حرفون سیے کے مجذور کرین تو وہی دو مجذور حاصل ہوتے ہین جو اس صورت مین موجود ہین پس اگر انمین سے
ایک مجذور رہو مثلاً یہہ صورت رہ جاوے $لا^2 \pm ۲ ط لا$ تو ظاہر ہی کہ اگر اوسکو مجذور کامل بنانا چاہین تو
موافق بیان بالا کی مسطح کو نصف کرین یعنے ۲ ط لا کو نصف کرین پس ط لا ہوگا اور اسمین سیے ط کا مجذور
زیادہ کردین تو یہہ صورت کامل مجذور بن جاوگی اسیطرح اگر یہہ صورت ہو $لا^2 \pm ط لا$ تو اسمین بھی مسطح
کو نصف کرین پس $\frac{ط}{۲}$ لا ہوگا اور اسمین سیے $\frac{ط}{۲}$ کا مجذور زیادہ کردین تو یہہ صورت حاصل ہوگی
$لا^2 \pm ط لا + \frac{ط^2}{۴}$ اور یہہ $(لا \pm \frac{ط}{۲})$ کا مجذور ہی بیان سیے یہہ معلوم ہوا کہ اگر کوئی صورت جبریہ اسطرح
کی ہو کہ اوسمین ایک مقدار کا مجذور ہو بغیر سر کے اور جس مقدار کا مجذور ہی اوسکی قوت اول بھی ہو تو وہ کامل مجذور
بن سکتی ہی اگر یہہ قاعدہ جاری کرین کہ جس مقدار کی اول قوت ہی اوسکی سر کو نصف کرین اور اس نصف کا مجذور
زیادہ کرین ❊ اب جاننا چاہیئے کہ یہہ اول قاعدہ ہے جس سیے مساوات درجہ دویم کی حل ہوتی ہی اسواسطی کہ درجہ دویم
کے مساوات مین اس قاعدہ سی ایک طرف کامل مجذور ہوجاتی ہی اور دوسری طرف مقادیر معلومہ رہجاتی ہی
پس دونو طرفون کا جذر لینے سی ایک اول درجہ کی مساوات حاصل ہوتی ہی اور پہر باسانی قیمت مجہول کی
دریافت ہوجاتی ہی مثلاً مساوات درجہ دویم کی یہہ ہی $ح لا^2 \pm ط لا = \pm ع$ اب اس مساوات کو اسطرح
تبدیل کرنا چاہیئے کہ اسمین $لا^2$ کا سر نہ ہی یعنے بجای $ح لا^2$ کے $لا^2$ رہجاوی پس اس تبدیلی کے
واسطے طرفین مساوات کو ح پر تقسیم کیا اور ظاہر ہی کہ اس عمل سیے مساوات مین کچھہ فرق نہین آسکتا
اسیواسطی یہہ مساوات حاصل ہوگی $لا^2 \pm \frac{ط}{ح} لا = \pm \frac{ع}{ح}$ اب اگر $\frac{ط}{ح}$ اور $\frac{ع}{ح}$ کو آسانی کیواسطی
ص اور م سیے تعبیر کرین تو یہہ مساوات حاصل ہوگی $لا^2 \pm ص لا = \pm م$ اور اسیطرح ہر مساوات درجہ
دویم کی اسی شکل کی طرف تحویل ہوسکتی ہی اب اس مساوات مین حرف مجہول کی اول قوت کا سر ص ہی پس اگر
ص کے نصف کا مجذور طرفین مساوات پر زیادہ کرین تو ظاہر ہی کہ اول طرف اس مساوات کی کامل مجذور ہوجاوے
اور دوسری طرف مقادیر معلومہ رہینگی اور چونکہ طرفین پر برابر برابر مقدار زیادہ ہوگی تو مساوات مین بھی کچھہ
فرق نہین آئیگا اسیواسطی $\frac{ص}{۲}$ کا مجذور یعنے $\frac{ص^2}{۴}$ دونو طرف زیادہ کیا تو یہہ مساوات حاصل ہوئی
$لا^2 \pm ص لا + \frac{ص^2}{۴} = \frac{ص^2}{۴} \pm م$ اب طرفین کا جذر لیا تو یہہ مساوات اول درجہ کی حاصل ہوئی
$لا \pm \frac{ص}{۲} = \sqrt{\frac{ص^2}{۴} \pm م}$ اسیواسطی $لا = \sqrt{\frac{ص^2}{۴} \pm م} \mp \frac{ص}{۲}$ یہہ قیمت حرف مجہول کی ہی
مثال (۲) $لا^2 + ۲ لا = ۳$ اس مساوات مین لا کا سر ۲ ہی اسکی نصف کا مجذور یعنی ۱ طرفین پر

زیادہ کیا تو یہہ مساوات حاصل ہوئی

$\text{لا}^2 + 2\,\text{لا} + 1 = 1 + 3 = 4$ طرفین کا جذر لیا تو یہہ مساوات حاصل ہوئی $\text{لا} + 1 = 2$ ∴ $\text{لا} = 1$ یعنی عدد ۱ قیمت مجہول کی ہے

مثال ۳ $3\,\text{لا}^2 + 2\,\text{لا} = 161$

اس مساوات میں لا² کا سر ۳ ہے اسواسطے ۳ پر طرفین مساوات کو تقسیم کیا تاکہ یہہ سر زائل ہوجاوے پس یہہ مساوات حاصل ہوئی

$\text{لا}^2 + \frac{2}{3}\,\text{لا} = \frac{161}{3}$ اس مساوات میں حرف مجہول کی اول قوت کا سر $\frac{2}{3}$ ہے اور اسکا نصف $\frac{1}{3}$ ہوا اور اس نصف کا مجذور $\frac{1}{9}$ ہوا پس جب $\frac{1}{9}$ کو طرفین پر زیادہ کیا تو یہہ مساوات حاصل ہوئی

$$\text{لا}^2 + \frac{2}{3}\,\text{لا} + \frac{1}{9} = \frac{161}{3} + \frac{1}{9} = \frac{483}{9} + \frac{1}{9}$$

$$= \frac{484}{9}$$

پھر طرفین کا جذر لیا تو یہہ حاصل ہوا

$\text{لا} + \frac{1}{3} = \frac{22}{3}$ ∴ $\text{لا} = \frac{22}{3} - \frac{1}{3} = 7$ یعنی $\text{لا} = 7$

مثال ۴ $2\,\text{لا}^2 - 5\,\text{لا} = 117$ تقسیم کیا طرفین مساوات کو ۲ پر

$$\therefore\ \text{لا}^2 - \frac{5}{2}\,\text{لا} = \frac{117}{2}$$

طرفین پر $\frac{5}{4}$ کا مجذور زیادہ کیا

$$\therefore\ \text{لا}^2 - \frac{5}{2}\,\text{لا} + \frac{25}{16} = \frac{117}{2} + \frac{25}{16}$$

$$= \frac{936}{16} + \frac{25}{16}$$

$$= \frac{961}{16}$$

طرفین کا جذر لیا

$$\therefore\ \text{لا} - \frac{5}{4} = \frac{31}{4}$$

$$\therefore\ \text{لا} = \frac{31}{4} + \frac{5}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

$$\therefore\ \text{لا} = 9$$

۵ $3\,\text{لا}^2 - \text{لا} - 80 = \text{لا} + 200$

$$\therefore\ 3\,\text{لا}^2 - 2\,\text{لا} = 80 + 200 = 280$$

طرفین کو ۳ پر تقسیم کیا

$$\therefore\ \text{لا}^2 - \frac{2}{3}\,\text{لا} = \frac{280}{3}$$

طرفین پر $\frac{1}{3}$ کا مجذور زیادہ کیا

$$\therefore\ \text{لا}^2 - \frac{2}{3}\,\text{لا} + \frac{1}{9} = \frac{280}{3} + \frac{1}{9}$$

$$= \frac{840}{9} + \frac{1}{9}$$

$$= \frac{841}{9}$$

طرفین کا جذر لیا

$$\therefore\ \text{لا} - \frac{1}{3} = \frac{29}{3}$$

$$\therefore\ \text{لا} = \frac{29}{3} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{30}{3} = 10$$

$$\therefore\ \text{لا} = 10$$

۶ $10\,\text{لا}^2 - 20\,\text{لا} + 8 = 3\,\text{لا}^2 + 40$

$$\therefore\ 10\,\text{لا}^2 - 20\,\text{لا} - 3\,\text{لا}^2 = 40 - 8 = 32$$

$$\therefore\ 7\,\text{لا}^2 - 20\,\text{لا} = 32$$

$$\therefore\ \text{لا}^2 - \frac{20}{7}\,\text{لا} = \frac{32}{7}$$

طرفین پر $\frac{10}{7}$ کا مجذور زیادہ کیا

$$\therefore\ \text{لا}^2 - \frac{20}{7}\,\text{لا} + \frac{100}{49} = \frac{32}{7} + \frac{100}{49}$$

$$= \frac{224}{49} + \frac{100}{49}$$

$$= \frac{324}{49}$$

طرفین کا جذر لیا

$$\therefore\ \text{لا} - \frac{10}{7} = \pm\frac{18}{7}$$

∴ لا = ± ۱۸/۷ + ۱۰/۷ = ۴ یا − ۸/۷

∴ لا = ۴ یا − ۸/۷

۷ ۶ لا² − ۵۰ لا + ۳۰ + ۲۷۳ = ۱۷۵ − لا + لا²

∴ ۶ لا² − لا² − ۵۰ لا + لا = ۱۷۵ − ۳۰ − ۲۷۳

∴ ۵ لا² − ۴۹ لا = − ۹۸

∴ لا² − ۴۹/۵ لا = − ۹۸/۵

طرفین پر مجذور ۴۹/۱۰ زیادہ کیا

∴ لا² − ۴۹/۵ لا + (۴۹/۱۰)² = (۴۹/۱۰)² − ۹۸/۵

= ۲۴۰۱/۱۰۰ − ۹۸/۵

= ۲۴۰۱/۱۰۰ − ۱۹۶۰/۱۰۰

= ۴۴۱/۱۰۰

طرفین کا جذر لیا

∴ لا − ۴۹/۱۰ = ± ۲۱/۱۰

∴ لا = ۴۹/۱۰ ± ۲۱/۱۰ = ۷ یا ۱۴/۵

∴ لا = ۷ یا ۱۴/۵

۸ ۴ا² لا² + ۴اب لا = ۴اج

طرفین کو ۴ا² پر تقسیم کیا

∴ لا² + ب/ا لا = ج/ا

طرفین پر ب/۲ا کا مجذور زیادہ کیا

∴ لا² + ب/ا لا + ب²/۴ا² = ج/ا + ب²/۴ا²

= ۴اج/۴ا² + ب²/۴ا²

= (ب² + ۴اج)/۴ا²

طرفین کا جذر لیا

∴ لا + ب/۲ا = ± √(ب² + ۴اج)/۲ا

∴ لا = (− ب ± √(ب² + ۴اج))/۲ا

۹ لا⁴ + ۴ لا² = ۱۲

اس مساوات میں بجای لا² کی لا⁴ ہی اور بجای لا کی لا² ہی اسیواسطی لا² کی سر کا نصف کیا پس ۲ حاصل ہوا اسکا مجذور طرفین پر زیادہ کیا

∴ لا⁴ + ۴ لا² + ۴ = ۱۲ + ۴ = ۱۶

طرفین کا جذر لیا

∴ لا² + ۲ = ± ۴

∴ لا² = ± ۴ − ۲ = ۲ یا −۶

پہر طرفین کا جذر لیا

∴ لا = √۲ یا √−۶

۱۰ لا⁶ − ۸ لا³ = ۵۱۳

طرفین پر ۸ کی نصف کا مجذور زیادہ کیا

∴ لا⁶ − ۸ لا³ + ۱۶ = ۵۱۳ + ۱۶ = ۵۲۹

طرفین کا جذر لیا

∴ لا³ − ۴ = ± ۲۳

∴ لا³ = ۴ ± ۲۳ = ۲۷ یا −۱۹

طرفین کا کعب لیا

∴ لا = ۳ یا ∛−۱۹

۱۱ لا^(۲ن) − ۴ لا^ن = ۱۰

طرفین پر ۴ کی نصف کا مجذور زیادہ کیا

∴ لا^(۲ن) − ۴ لا^ن + ۴ = ۱۴

طرفین کا جذر لیا

∴ لا^ن − ۲ = ± √۱۴

∴ لا^ن = ۲ ± √۱۴

طرفین کا ن مرتبہ کا نزول لیا

∴ لا = (۲ ± √۱۴)^(۱/ن)

دوسرا قاعدہ مساوات درجہ دویم کے حل کرنیکا یہہ ہے کہ حرف مجہول کے سر کو چوگنا کرین اور اس چوگنی سر کو طرفین مساوات مین ضرب کرین بعد اسکی حرف مجہول کی اول قوت کی سر کا مجذور طرفین پر زیادہ کردین بعد اسکی جذر لین اس عمل سے بھی وہی فائدہ ہوتا ہی جو پہلی قاعدہ سے تھا یعنی جس مقدار مین مجہول ہوتا ہی اوس صورت کا مجذور کامل بن جاتا ہی اور جذر پورا نکلتا ہی اسواسطی کہ اول قاعدہ کی بیان مین یہہ بات مذکور ہوئی ہی کہ جب دو مقدارون کے مجموعہ یا حاصل تفریق کا مجذور کرتے ہین تو اوسمین تین مقدارین ہوتی ہین دو تو مجذور ان دونو مقدارون کے اور دو چند حاصلضرب اون دونو کا پس جس صورت مین یہہ مساوات ہو ح لا^۲ ± ط لا = ن اور اسمین لا کی سر کو چوگنا کرکر طرفین مین ضرب کرین یعنی ۴ح کو دونو طرفون مساوات مین ضرب کرین اور آ حاصل ہو ۴ح^۲ لا^۲ ± ۲ × ۲ح لا × ط = ۴ح ن تو اسمساوات مین کچھہ خرابی نہوگی کیونکہ ایک ہی مقدار مین مساوی اور مساوی لے کو ضرب کیا ہی اور فائدہ یہہ ہوگا کہ اول طرف مساوات کی ایسی ہوجاویگی کہ اگر اوس مین حرف مجہول کی اول قوت کی سر کا مجذور زیادہ کرین تو کامل مجذور بنجاوی اور دوسریطرف مقدار معلوم رہیگی پس جذر لینی سے اول درجہ کے مساوات حاصل ہو جاینگے اور پھر قیمت مجہول کی باسانی معلوم ہو سکتی ہی پس اس مساوات کے ۴ح^۲ لا^۲ ± ۲ × ۲ح لا × ط = ۴ح ن پر ط^۲ زیادہ کیا

تو ۴ح^۲ لا^۲ ± ۲ × ۲ح لا ط + ط^۲ = ۴ح ن + ط^۲

طرفین کا جذر لیا

∴ ۲ح لا ± ط = ± √(۴ح ن + ط^۲)

∴ ۲ح لا = ± √(۴ح ن + ط^۲) ∓ ط

∴ لا = (± √(۴ح ن + ط^۲) ∓ ط) / ۲ح

۲ لا^۲ − ۲ لا + ۱ = ۹

∴ لا^۲ − ۲ لا = ۸

طرفین کو لا کی چوگنی سر مین یعنی ۴ مین ضرب کیا

∴ ۴ لا^۲ − ۸ لا = ۳۲

طرفین پر ۲ کا مجذور زیادہ کیا

∴ ۴ لا^۲ − ۸ لا + ۴ = ۳۲ + ۴

= ۳۶

طرفین کا جذر لیا

∴ ۲ لا − ۲ = ± ۶

∴ ۲ لا = ± ۶ + ۲

لا = ۴ یا −۲

۳ لا^۲/۹ − ۱ = لا + ۱۱

طرفین کو ۶ مین ضرب کیا

∴ لا۲ − ۶ = ۶ لا + ۶۶

∴ لا۲ − ۶ لا = ۶ + ۶۶

= ۷۲

طرفین کو ۴ مین ضرب کیا

∴ ۴ لا۲ − ۲۴ لا = ۲۸۸

طرفین پر ۶ کا مجذور زیادہ کیا

∴ ۴ لا۲ − ۲۴ لا + ۳۶ = ۲۸۸ + ۳۶

= ۳۲۴

طرفین کا جذر لیا

∴ ۲ لا − ۶ = ± ۱۸

∴ ۲ لا = ۲۴ یا − ۱۲

∴ لا = ۱۲ یا − ۶

۴ ۲ لا/۳ + ۱/لا = ۷/۳

طرفین کو ۳ لا مین ضرب کرکی کسر دور کی

∴ ۲ لا۲ + ۳ = ۷ لا

∴ ۲ لا۲ − ۷ لا = − ۳

لا۲ کی سر کو چوگنا کیا یعنی ۲ کو ۴ مین ضرب کیا پس ۸ ہوئے
پہر ۸ کو طرفین مساوات مین ضرب کیا

∴ ۱۶ لا۲ − ۵۶ لا = − ۲۴

طرفین پر ۷ کا مجذور زیادہ کیا

∴ ۱۶ لا۲ − ۵۶ لا + ۴۹ = ۴۹ − ۲۴ = ۲۵

طرفین کا جذر لیا

∴ ۴ لا − ۷ = ± ۵

∴ ۴ لا = ۷ ± ۵ = ۱۲ یا ۲

∴ لا = ۳ یا ۱/۲

۵ لا۲/۳ − لا/۲ = ۹

طرفین کو ۶ مین ضرب کیا

۲ لا۲ − ۳ لا = ۵۴

طرفین کو ۴ × ۲ مین ضرب کیا

∴ ۱۶ لا۲ − ۲۴ لا = ۴۳۲

طرفین پر ۳ کا مجذور زیادہ کیا

∴ ۱۶ لا۲ − ۲۴ لا + ۹ = ۴۴۱

طرفین کا جذر لیا

∴ ۴ لا − ۳ = ± ۲۱

∴ ۴ لا = ۳ ± ۲۱ = ۲۴ یا − ۱۸

∴ لا = ۶ یا − ۹/۲

∴ لا = √۶ یا ۳±/√−۲

۶ ۶/(لا+۱) + ۲/لا = ۳

∴ ۶ لا + ۲ (لا + ۱) = ۳ لا (لا + ۱)

یا ۶ لا + ۲ لا + ۲ = ۳ لا۲ + ۳ لا

∴ ۸ لا + ۲ = ۳ لا۲ + ۳ لا

∴ ۳ لا۲ + ۳ لا − ۸ لا = ۲

∴ ۳ لا۲ − ۵ لا = ۲

طرفین کو ۴ × ۳ مین ضرب کیا

∴ ۳۶ لا۲ − ۶۰ لا = ۲۴

طرفین پر ۵ کا مجذور زیادہ کیا

∴ ۳۶ لا۲ − ۶۰ لا + ۲۵ = ۴۹

∴ ٦ لا − ٥ = ± ٧

∴ ٦ لا = ٥ ± ٧ = ١٢ یا −٢

∴ لا = ٢ یا − ١/٣

یہہ بات ظاہر ہی کہ اگر مرکب مساوات مین سی اول قوت حرف مجہول کی زایل ہوجاے تو مفرد مساوات حاصل ہوگے اور مفرد مساوات مین فقط جذر لینی سیے مجہول کے قیمت دریافت ہوجاتی ہی اسیواسطی تیسرا قاعدہ مرکب مساوات کی حل کرنیکا ایسا ہی کہ اوس سے اول قوت مقدار مجہول سیکے زایل ہوجاتی ہی اور مفرد مساوات رہجاتی ہی قاعدہ تیسرا ظاہر ہی کہ مرکب مساوات مین علامت دوسرے جزکی یعنی اوس مقدار کی جس مین اول قوت مقدار مجہول سیکے پائی جاتی ہی مثبت ہوگی یا منفی اگر منفی ہو تو چاہیئے کہ اول قوت مقدار مجہول کی سر کو نصف کرین اور اسکے نصف کی ساتھہ ایک اور نیا حرف مجہول فرض کرکر جمع کرین اور اس مجموعہ کو اوس حرف مجہول کی برابر فرض کرین جو مساوات مفروض مین ہی اور اسکے مساوات سیے اول مجہول کی قیمت اور اوسکی مجذور کی قیمت جسمین نیا مجہول پایا جاویگا دریافت کرین اور مساوات مفروض مین بجاے اول مجہول اور اوسکی مجذور کی لکھین اس عمل سیے نئی مجہول کا فقط مجذور رہجاویگا اور جذر لینی سی اوسکی قیمت دریافت ہوجاویگی اور پہر نئی مساوات سی اول مجہول کی قیمت بہی معلوم ہوسکتی ہی اور اگر علامت اوس مقدار کی جسمین مجہول کی اول قوت پائی جاتی ہی مثبت ہو تو مجہول اول کی قوت کے سر کو نصف کرکر نئی حرف مجہول مین سیے تفریق کرین اور اس حاصل تفریق کو اول مجہول کی برابر فرض کرکر وہی عمل جاری کرین جو پہلی صورت مین کیا ہی لیکن اس قاعدہ مین حرف مجہول کی مجذور کا سر آ کی سوا اور کچہہ ہو مثلا

یہہ مساوات ہو لا² − ط لا = ح (١)

پس موافق قاعدہ کی لا کے سر کو نصف کیا تو ط/٢ ہوا اور اسکو نئی مجہول مثلا د کی ساتھہ جمع کرکر لا کی برابر لکہا تو نئی مساوات یہہ حاصل ہوئے

لا = د + ط/٢ (٢)

اور اس سے لا² کی قیمت یہہ حاصل ہوئی لا² = د² + ط د + ط²/٤

پس جسوقت قیمتین لا اور لا² کی مساوات مفروض (١) مین رکہین تو یہہ مساوات حاصل ہوئی

د² + ط د + ط²/٤ − ط (د + ط/٢) = ح

∴ د² + ط د + ط²/٤ − ط د − ط²/٢ = ح

∴ د² + ط²/٤ − ط²/٢ = ح

یا د² − ط²/٤ = ح

∴ د² = ح + ط²/٤

∴ د = ± √(ح + ط²/٤)

اور چونکہ موافق نئی مساوات (٢) سیکے

لا = د + ط/٢ ∴ لا = ± √(ح + ط²/٤) + ط/٢

٢ لا² + ط لا = س

اس صورت مین علامت ط لا کی مثبت ہی پس موافق قاعدہ کی ط/٢ کو نئی مجہول مثلا د مین سے تفریق کرکر حاصل تفریق

تفریق کو لا کی برابر لکھا تو یہہ مساوات حاصل ہوئے

$$\text{لا} = \text{ی} - \frac{\text{ط}}{٢} \;\ldots\ldots\; (١)$$

$$\therefore \text{لا}^2 = \text{ی}^2 - \text{ط ی} + \frac{\text{ط}^2}{٤}$$

پس جب یہہ قیمتین لا² اور لا کی مساوات مفروض مین لکھین تو

$$\text{ی}^2 - \text{ط ی} + \frac{\text{ط}^2}{٤} + \text{ط}\left(\text{ی} - \frac{\text{ط}}{٢}\right) = \text{س}$$

$$\therefore \text{ی}^2 - \text{ط ی} + \frac{\text{ط}^2}{٤} + \text{ط ی} - \frac{\text{ط}^2}{٢} = \text{س}$$

$$\therefore \text{ی}^2 - \frac{\text{ط}^2}{٤} = \text{س}$$

$$\therefore \text{ی}^2 = \text{س} + \frac{\text{ط}^2}{٤}$$

$$\therefore \text{ی} = \pm\sqrt{\text{س} + \frac{\text{ط}^2}{٤}}$$

اور موافق نئی مساوات (١) کی $\text{لا} = \text{ی} - \frac{\text{ط}}{٢}$

$$\therefore \text{لا} = \pm\sqrt{\text{س} + \frac{\text{ط}^2}{٤}} - \frac{\text{ط}}{٢}$$

٣ $\quad \text{لا}^2 - \text{لا} = ١٢$

اس صورت مین لا کا سر آ ہی اور علامت منفی ہی

پس ½ کو ی کی ساتھہ جمع کر کر لا کی برابر فرض کیا

تو یہہ حاصل ہوا $\quad \text{لا} = \text{ی} + \frac{١}{٢}$

$$\therefore \text{لا}^2 = \text{ی}^2 + \text{ی} + \frac{١}{٤}$$

$$\therefore \text{لا}^2 - \text{لا} = \text{ی}^2 + \text{ی} + \frac{١}{٤} - \text{ی} - \frac{١}{٢} = ١٢$$

$$\therefore \text{ی}^2 - \frac{١}{٤} = ١٢$$

$$\therefore \text{ی}^2 = ١٢ + \frac{١}{٤} = \frac{٤٩}{٤}$$

$$\therefore \text{ی} = \pm\frac{٧}{٢}$$

اور چونکہ $\text{لا} = \text{ی} + \frac{١}{٢}$

$$\therefore \text{لا} = \pm\frac{٧}{٢} + \frac{١}{٢} = ٤ \text{ یا } -٣$$

٤ $\quad ٢\text{لا}^2 - \text{لا} = ١٥$

$$\therefore \text{لا}^2 - \frac{\text{لا}}{٢} = \frac{١٥}{٢}$$

فرض کیا کہ $\text{لا} = \text{ی} + \frac{١}{٤}$

$$\therefore \text{لا}^2 = \text{ی}^2 + \frac{\text{ی}}{٢} + \frac{١}{١٦}$$

$$\therefore \text{لا}^2 - \frac{\text{لا}}{٢} = \text{ی}^2 + \frac{\text{ی}}{٢} + \frac{١}{١٦} - \frac{\text{ی}}{٢} - \frac{١}{٨} = \frac{١٥}{٢}$$

$$\therefore \text{ی}^2 - \frac{١}{١٦} = \frac{١٥}{٢}$$

$$\therefore \text{ی}^2 = \frac{١٥}{٢} + \frac{١}{١٦} = \frac{١٢٠}{١٦} + \frac{١}{١٦}$$

$$= \frac{١٢١}{١٦}$$

$$\therefore \text{ی} = \pm\frac{١١}{٤}$$

اور چونکہ $\text{لا} = \text{ی} + \frac{١}{٤} = \pm\frac{١١}{٤} + \frac{١}{٤}$

$$= ٣ \text{ یا } -\frac{٥}{٢}$$

یعنی $\text{لا} = ٣ \text{ یا } -\frac{٥}{٢}$

٥ $\quad \text{لا}^2 + ٦\text{لا} = ٤٠$

فرض کیا کہ $\text{لا} = \text{ی} - ٣$

$$\therefore \text{لا}^2 = \text{ی}^2 - ٦\text{ی} + ٩$$

$$\therefore \text{لا}^2 + ٦\text{لا} = \text{ی}^2 - ٦\text{ی} + ٩ + ٦\text{ی} - ١٨ = ٤٠$$

$$\therefore \text{ی}^2 - ٩ = ٤٠$$

$$\therefore \text{ی}^2 = ٤٩$$

$$\therefore \text{ی} = \pm ٧$$

اور چونکہ $\text{لا} = \text{ی} - ٣ = \pm ٧ - ٣$

$$= ٤ \text{ یا } -١٠$$

یعنی $\text{لا} = ٤ \text{ یا } -١٠$

٦ $\quad \text{لا}^4 - \text{لا}^2 = ٠$ اس صورت مین بجای لا کی لا² ہی

اسیواسطے فرض کیا کہ $لا^۲ = ی + \frac{۱}{۲}$

$\therefore لا^۴ = ی^۲ + ی + \frac{۱}{۴}$

$\therefore لا^۴ - لا^۲ = ی^۲ + ی + \frac{۱}{۴} - ی - \frac{۱}{۲} = ۰$

$\therefore ی^۲ - \frac{۱}{۴} = ۰$

$\therefore ی^۲ = \frac{۱}{۴}$

$\therefore ی = \pm \frac{۱}{۲}$

اور چونکہ $لا^۲ = ی + \frac{۱}{۲} = \pm \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}$

$= ۱$ یا ۰

$\therefore لا = ۱$ یا ۰

سوای ان قاعدون کے اور بھی خاص ترکیبین ہین جنسے مشکل مساواتین باسانی حل ہوسکتی ہین اور یہہ خاص ترکیبین مثالون ائندہ سی معلوم ہونگی اور اول مفرد مساوات کی مثالین لکھی جاتی ہین

۱ $\frac{لا^۲}{د} + \frac{د^۲}{لا} = ۱۸ \cdots\cdots (۱)$

$لا + د = ۱۲ \cdots\cdots (۲)$

اس صورت مین لا کو دو نئی مجہولون مثلاً ی اور ر کے مجموعہ کی برابر فرض کیا اور د کو انہین دو نئے مجہولون کی حاصل تفریق کی برابر فرض کیا پس حاصل ہوا

$لا = ی + ر$

$د = ی - ر$

دونو کو جمع کیا

$\therefore لا + د = ۲ی = ۱۲$ موافق (۲) کے

$\therefore ی = ۶$

$\therefore لا = ی + ر = ۶ + ر$

اور $د = ی - ر = ۶ - ر$

اور مساوات (۱) سے یہہ حاصل ہوتا ہی

$لا^۳ + د^۳ = ۱۸ لا د$

قیمتین لا اور د کی رکھین

$\therefore (۶ + ر)^۳ + (۶ - ر)^۳ = ۱۸ (۶ + ر)(۶ - ر)$

$\therefore ۲۱۶ + ۱۰۸ر + ۱۸ر^۲ + ر^۳ + ۲۱۶ - ۱۰۸ر + ۱۸ر^۲ - ر^۳ = ۱۸(۳۶ - ر^۲)$

$\therefore ۴۳۲ + ۳۶ر^۲ = ۶۴۸ - ۱۸ر^۲$

$\therefore ۳۶ر^۲ + ۱۸ر^۲ = ۶۴۸ - ۴۳۲$

$۵۴ر^۲ = ۲۱۶$

$\therefore ر^۲ = \frac{۲۱۶}{۵۴} = ۴$

$\therefore ر = \pm ۲$ اور $لا = ۶ + ر = ۶ \pm ۲$

$= ۸$ یا ۴

یعنے $لا = ۸$ یا ۴

اور $د = ۶ - ر = ۶ \mp ۲ = ۴$ یا ۸

۲ $لا ی = ط^۲ \cdots\cdots (۱)$

$لا^۲ + ی^۲ = س^۲ \cdots\cdots (۲)$

$۲ لا ی = ۲ط^۲$ (۱) مساوات کو دو چند کیا

اس آخر کی مساوات کی ساتھہ (۲) مساوات کو جمع کیا

$\therefore لا^۲ + ۲لا ی + ی^۲ = س^۲ + ۲ط^۲$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore لا + ی = \pm \sqrt{س^۲ + ۲ط^۲}$

پہر مساوات (۱) کی دوگنی کو (۲) مساوات سی تفریق کیا

$$\text{لا}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{ی} + \text{ی}^2 = \text{س}^2 - 2\,\text{ط}^2$$

$$\therefore \text{لا} - \text{ی} = \pm\sqrt{\text{س}^2 - 2\,\text{ط}^2}$$

لیکن

$$\text{لا} + \text{ی} = \pm\sqrt{\text{س}^2 + 2\,\text{ط}^2}$$

دونو کو جمع کیا

$$\therefore 2\,\text{لا} = \pm\sqrt{\text{س}^2 - 2\,\text{ط}^2} \pm \sqrt{\text{س}^2 + 2\,\text{ط}^2}$$

$$\therefore \text{لا} = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\text{س}^2 - 2\,\text{ط}^2} \pm \sqrt{\text{س}^2 + 2\,\text{ط}^2}\right)$$

اور جن دونو مساواتون کو جمع کیا ہی اگر اونہین کو تفریق کرین تو

$$\text{ی} = \pm\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\text{س}^2 - 2\,\text{ط}^2} \mp \sqrt{\text{س}^2 + 2\,\text{ط}^2}\right)$$

۳ — $\text{لا}^2 + \text{لا}\,\text{ی} = 12 \quad \ldots\ldots (1)$

$\text{ی}^2 + \text{لا}\,\text{ی} = 24 \quad \ldots\ldots (2)$

دونو کو جمع کیا

$$\therefore \text{لا}^2 + 2\,\text{لا}\,\text{ی} + \text{ی}^2 = 36$$

$$\therefore \text{لا} + \text{ی} = \pm 6$$

طرفین کو لا مین ضرب کیا

$$\text{لا}^2 + \text{لا}\,\text{ی} = \pm 6\,\text{لا} = 12$$ بحکم (۱) مساوات کے

$$\therefore \text{لا} = \frac{12}{\pm 6} = \pm 2$$

اور چونکہ $\text{لا} + \text{ی} = \pm 6$

$$\therefore \text{ی} = \pm 6 - \text{لا}$$

$$= \pm 6 \mp 2 = \pm 4$$

۴ — $\text{لا} + \text{ی} = \text{س} \quad \ldots\ldots (1)$

$\text{لا}\,\text{ی} = \text{ط}^2 \quad \ldots\ldots (2)$

مساوات (۱) کا مجذور کیا اور اسس مجذور مین سے (۲) مساوات کا چوگنا تفریق کیا

$$\therefore \text{لا}^2 + 2\,\text{لا}\,\text{ی} + \text{ی}^2 = \text{س}^2$$

$$4\,\text{لا}\,\text{ی} = 4\,\text{ط}^2$$

$$\text{لا}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{ی} + \text{ی}^2 = \text{س}^2 - 4\,\text{ط}^2$$

جذر لیا

$$\therefore \text{لا} - \text{ی} = \pm\sqrt{\text{س}^2 - 4\,\text{ط}^2}$$

لیکن $\text{لا} + \text{ی} = \text{س}$ بحکم (۱) مساوات کی پہر جمع کیا

$$2\,\text{لا} = \text{س} \pm \sqrt{\text{س}^2 - 4\,\text{ط}^2}$$

$$\therefore \text{لا} = \tfrac{1}{2}\left(\text{س} \pm \sqrt{\text{س}^2 - 4\,\text{ط}^2}\right)$$

اور جن مساواتون کو جمع کیا ہی اگر اونہین تفریق کرین تو

$$\text{ی} = \tfrac{1}{2}\left(\text{س} \mp \sqrt{\text{س}^2 - 4\,\text{ط}^2}\right)$$

۵ — $\text{لا} + \text{ی} = \text{س} \quad \ldots\ldots (1)$

$\text{لا}^2 + \text{ی}^2 = \text{ط}^2 \quad \ldots\ldots (2)$

مساوات (۱) کے مجذور کو (۲) مساوات کے دوچند مین سے تفریق کیا

$$\therefore 2\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ی}^2 = 2\,\text{ط}^2$$

$$\text{لا}^2 + 2\,\text{لا}\,\text{ی} + \text{ی}^2 = \text{س}^2$$

$$\text{لا}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{ی} + \text{ی}^2 = 2\,\text{ط}^2 - \text{س}^2$$

طرفین کا جذر لیا

$$\therefore \text{لا} - \text{ی} = \pm\sqrt{2\,\text{ط}^2 - \text{س}^2}$$

لیکن $\text{لا} + \text{ی} = \text{س}$ موافق (۱) کی انکو جمع و تفریق کر کر قیمت لا اور ی کی نکالی

$$\therefore 2\,\text{لا} = \text{س} \pm \sqrt{2\,\text{ط}^2 - \text{س}^2}$$

$$\therefore \text{لا} = \tfrac{1}{2}\left(\text{س} \pm \sqrt{2\,\text{ط}^2 - \text{س}^2}\right)$$

اور

$$\text{ی} = \tfrac{1}{2}\left(\text{س} \mp \sqrt{2\,\text{ط}^2 - \text{س}^2}\right)$$

6

$$\sqrt[3]{\text{لا}} + \sqrt[3]{\text{ی}} = 5 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\sqrt[3]{\text{لا}} - \sqrt[3]{\text{ی}} = 1 \quad \ldots\ldots (2)$$

دونو مساواتونکو جمع کیا

$$2\sqrt[3]{\text{لا}} = 6$$

$$\therefore \sqrt[3]{\text{لا}} = 3$$

طرفین کا مکعب کیا

$$\therefore \text{لا} = 27$$

اور مساوات (۲) کو (۱) میں سے تفریق کیا

$$\therefore 2\sqrt[3]{\text{ی}} = 4$$

$$\therefore \sqrt[3]{\text{ی}} = 2$$

$$\therefore \text{ی} = 8$$

7

$$\text{لا} + \sqrt{\text{ط}^2 + \text{لا}^2} = \frac{2\text{ط}^2}{\sqrt{\text{ط}^2 + \text{لا}^2}}$$

کسر دور کی

$$\therefore \text{لا}\sqrt{\text{ط}^2 + \text{لا}^2} + \text{ط}^2 + \text{لا}^2 = 2\text{ط}^2$$

$$\therefore \text{لا}\sqrt{\text{ط}^2 + \text{لا}^2} = \text{ط}^2 - \text{لا}^2$$

طرفین کا مجذور کیا

$$\therefore \text{ط}^2\text{لا}^2 + \text{لا}^4 = \text{ط}^4 - 2\text{لا}^2\text{ط}^2 + \text{لا}^4$$

$$\therefore 3\text{ط}^2\text{لا}^2 = \text{ط}^4$$

$$\therefore \text{لا}^2 = \frac{\text{ط}^2}{3}$$

$$\therefore \text{لا} = \pm\frac{\text{ط}}{\sqrt{3}}$$

8

$$\sqrt{\frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2} + \text{ص}^2} - \sqrt{\frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2} - \text{ص}^2} = \text{ص}$$

$$\therefore \sqrt{\frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2} + \text{ص}^2} = \sqrt{\frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2} - \text{ص}^2} + \text{ص}$$

طرفین کا مجذور کیا

$$\therefore \frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2} + \text{ص}^2 = \frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2} - \text{ص}^2 + 2\text{ص}\sqrt{\frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2} - \text{ص}^2} + \text{ص}^2$$

$$\therefore \text{ص}^2 = 2\text{ص}\sqrt{\frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2} - \text{ص}^2}$$

طرفین مجذور کیا

$$\therefore \sqrt{\frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2} - \text{ص}^2} = \frac{\text{ص}}{2}$$

$$\therefore \frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2} - \text{ص}^2 = \frac{\text{ص}^2}{4}$$

$$\therefore \frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2} = \frac{\text{ص}^2}{4} + \text{ص}^2 = \frac{5\text{ص}^2}{4}$$

جذر لیا

$$\therefore \frac{\text{ط}}{\text{لا}} = \frac{\sqrt{5}\,\text{ص}}{2}$$

$$\therefore \text{لا} = \pm\frac{2\text{ط}}{\sqrt{5}\,\text{ص}}$$

9

$$\frac{\text{ط}}{\text{لا}} + \frac{\sqrt{\text{ط}^2 - \text{لا}^2}}{\text{لا}} = \frac{\text{لا}}{\text{ص}}$$

لا کو جذر کے اندر کیا

$$\therefore \frac{\text{ط}}{\text{لا}} + \sqrt{\frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2} - 1} = \frac{\text{لا}}{\text{ص}}$$

$$\therefore \sqrt{\frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2} - 1} = \frac{\text{لا}}{\text{ص}} - \frac{\text{ط}}{\text{لا}}$$

طرفین کا مجذور کیا

$$\therefore \frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2} - 1 = \frac{\text{لا}^2}{\text{ص}^2} - \frac{2\text{ط}}{\text{ص}} + \frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2}$$

$$\therefore \frac{\text{لا}^2}{\text{ص}^2} = \frac{2\text{ط}}{\text{ص}} - 1$$

$$\therefore \text{لا}^2 = 2\text{ط}\text{ص} - \text{ص}^2$$

$$\therefore \text{لا} = \pm\sqrt{2\text{ط}\text{ص} - \text{ص}^2}$$

10

$$\text{لا}^2 + \text{ی}^2 = \frac{13}{\text{لا} - \text{ی}} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\text{لا}\,\text{ی} = \frac{6}{\text{لا} - \text{ی}} \quad \ldots\ldots (2)$$

مساوات (۱) سی دو چند (۲) مساوات کا تفریق کیا

$$\therefore \text{لا}^2 - 2\text{لا}\text{ی} + \text{ی}^2 = \frac{13}{\text{لا} - \text{ی}} - \frac{12}{\text{لا} - \text{ی}} = \frac{1}{\text{لا} - \text{ی}}$$

یعنی

$$(\text{لا} - \text{ی})^2 = \frac{1}{\text{لا} - \text{ی}}$$

∴ $(لا - ی)^{۳} = ۱$ طرفین کا کعب لیا

∴ لا − ی = ۱ رکھی تو

جب قیمت لا − ی کی (۱) مساوات اور (۲) میں

$لا^{۲} + ی^{۲} = ۱۳$

$۲ لا ی = ۱۲$

$لا^{۲} + ۲ لا ی + ی^{۲} = ۲۵$

طرفین کا جذر نکالا

∴ لا + ی = ± ۵

لیکن لا − ی = ۱ ان دونو مساواتونکو جمع کیا

∴ ۲ لا = ۶ یا −۴

لا = ۳ یا −۲

اور اگر لا + ی میں سے لا − ی کو تفریق کریں

تو ۲ ی = ۴ یا −۶

∴ ی = ۲ یا −۳

۱۱ $لا^{۲} - لا ی = ۴۸ ی$ ...... (۱)

$لا ی - ی^{۲} = ۳ لا$ ...... (۲)

مساوات (۱) کو لا پر تقسیم کیا اور (۲) ی پر تقسیم کیا

تو یہ دو مساواتیں حاصل ہوئیں

∴ $لا - ی = \frac{۴۸ ی}{لا}$

∴ $لا - ی = \frac{۳ لا}{ی}$

∴ $\frac{۳ لا}{ی} = \frac{۴۸ ی}{لا}$

طرفین سے کسر دور کی

∴ $۴۸ ی^{۲} = ۳ لا^{۲}$

∴ $۱۶ ی^{۲} = لا^{۲}$ طرفین کو ۳ پر تقسیم کیا

∴ ± ۴ ی = لا طرفین کا جذر لیا

∴ لا − ی = ۳ ی یا −۵ ی

اور چونکہ $لا - ی = \frac{۳ لا}{ی} = (\pm \frac{۱۲ ی}{ی} = \pm ۱۲) = ۳ ی$ یا −۵ ی

یعنی ± ۱۲ = ۳ ی یا −۵ ی

∴ $۴ = ی$ یا $-\frac{۱۲}{۵} = ی$

اور لا = ± ۴ ی = ۱۶ یا $-\frac{۴۸}{۵}$

۱۲ $\frac{لا ی}{\frac{۲\sqrt{لا}}{ی}} = ۴۸$

$\frac{لا ی}{\sqrt{لا}} = ۲۴$

اول مساوات دوسری پر تقسیم کیا

∴ $\frac{لا ی \times \frac{ی}{۲}}{لا ی} = \frac{۴۸}{۲۴} = ۲$

∴ $\frac{ی}{۲} = ۲$

∴ ی = ۴

اور موافق دوسری مساوات کی $\frac{لا ی}{\sqrt{لا}} = ۲۴$

∴ $\frac{۴ \times لا}{\sqrt{لا}} = ۲۴$

∴ $۴\sqrt{لا} = ۲۴$

∴ $\sqrt{لا} = ۶$

∴ لا = ۳۶

۱۳ $\frac{لا^{۲} + ۳ لا - ۷}{لا + ۲ + \frac{۱۸}{لا}} = ۱$

کسر دور کی

∴ $لا^{۲} + ۳ لا - ۷ = لا + ۲ + \frac{۱۸}{لا}$

∴ $لا^{۲} + ۲ لا = ۹ + \frac{۱۸}{لا}$

$\therefore \text{ل}(\text{ل}+٢) = ٩(١+\frac{٢}{\text{ل}}) = \frac{٩}{\text{ل}}(\text{ل}+٢)$

$\therefore \text{ل} = \frac{٩}{\text{ل}}$

$\therefore \text{ل}^{٢} = ٩$

$\therefore \text{ل} = \pm ٣$

١٤ $\sqrt{\frac{\text{ل}+\text{ط}}{\text{ل}}} + ٢\sqrt{\frac{\text{ط}}{\text{ل}+\text{ط}}} = \text{ص}^{٢}\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ل}+\text{ط}}}$

طرفین مساوات کو $\sqrt{\frac{\text{ل}+\text{ط}}{\text{ل}}}$ مین ضرب کیا

$\therefore \frac{\text{ل}+\text{ط}}{\text{ل}} + ٢\sqrt{\frac{\text{ط}}{\text{ل}}} = \text{ص}^{٢}$

یا $١ + \frac{\text{ط}}{\text{ل}} + ٢\sqrt{\frac{\text{ط}}{\text{ل}}} = \text{ص}^{٢}$

یا $١ + ٢\sqrt{\frac{\text{ط}}{\text{ل}}} + \frac{\text{ط}}{\text{ل}} = \text{ص}^{٢}$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore ١ + \sqrt{\frac{\text{ط}}{\text{ل}}} = \pm \text{ص}$

$\therefore \sqrt{\frac{\text{ط}}{\text{ل}}} = \pm \text{ص} - ١$

طرفین کا مجذور کیا

$\therefore \frac{\text{ط}}{\text{ل}} = (\text{ص} \mp ١)^{٢}$

$\therefore \text{ل} = \frac{\text{ط}}{(\text{ص} \mp ١)^{٢}}$

١٥ $\sqrt{\frac{\text{ط}+\text{ل}}{\text{ل}}} + \sqrt{\frac{\text{ل}+\text{ط}}{\text{ط}}} = \sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{س}}}$

اول طرف کو اسطرح لکھہ سکتی ہین $(\frac{١}{\text{ل}} + \frac{١}{\text{ط}})\sqrt{\text{ل}+\text{ط}}$

$\therefore \sqrt{\text{ل}+\text{ط}}\,(\frac{١}{\text{ط}} + \frac{١}{\text{ل}}) = \sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{س}}}$

یا $\sqrt{\text{ل}+\text{ط}}\,(\frac{\text{ل}+\text{ط}}{\text{ل}\text{ط}}) = \sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{س}}}$

$\therefore (\text{ط}+\text{ل})^{\frac{٣}{٢}} = \frac{\text{ل}^{\frac{٣}{٢}}\text{ط}}{\text{س}}$

طرفین مساوات کا $\frac{٢}{٣}$ مرتبہ کا نزول لیا

$\therefore \text{ط} + \text{ل} = \text{ل}\left(\frac{\text{ط}}{\text{س}}\right)^{\frac{٢}{٣}}$

$\therefore \text{ط} = \text{ل}\left(\frac{\text{ط}}{\text{س}}\right)^{\frac{٢}{٣}} - \text{ل}$

$= \text{ل}\left(\left(\frac{\text{ط}}{\text{س}}\right)^{\frac{٢}{٣}} - ١\right)$

$\therefore \text{ل} = \frac{\text{ط}}{\left(\frac{\text{ط}}{\text{س}}\right)^{\frac{٢}{٣}} - ١}$

١٦ $\frac{(\text{ل}+\text{ط})^{\frac{١}{ن}}}{\text{ط}} + \frac{(\text{ل}+\text{ط})^{\frac{١}{ن}}}{\text{ل}} = \frac{\text{ل}^{\frac{١}{ن}}}{\text{س}}$

$\therefore (\text{ل}+\text{ط})^{\frac{١}{ن}}\left(\frac{١}{\text{ط}} + \frac{١}{\text{ل}}\right) = \frac{\text{ل}^{\frac{١}{ن}}}{\text{س}}$

$\therefore (\text{ل}+\text{ط})^{\frac{١}{ن}}\left(\frac{\text{ل}+\text{ط}}{\text{ل}\text{ط}}\right) = \frac{\text{ل}^{\frac{١}{ن}}}{\text{س}}$

یا $(\text{ل}+\text{ط})^{\frac{١}{ن}+١} = \frac{\text{ط}}{\text{س}}\,\text{ل}^{\frac{١}{ن}+١}$

طرفین کا $\frac{١}{ن}+١$ مرتبہ کا نزول لیا

$\therefore \text{ط}+\text{ل} = \text{ل}\left(\frac{\text{ط}}{\text{س}}\right)^{\frac{ن}{ن+١}}$

$\therefore \text{ط} = \text{ل}\left(\frac{\text{ط}}{\text{س}}\right)^{\frac{ن}{ن+١}} - \text{ل}$

$= \text{ل}\left(\left(\frac{\text{ط}}{\text{س}}\right)^{\frac{ن}{ن+١}} - ١\right)$

$\therefore \text{ل} = \frac{\text{ط}}{\left(\frac{\text{ط}}{\text{س}}\right)^{\frac{ن}{ن+١}} - ١}$

١٧ $\frac{\text{م}}{ن}\,\text{ل}^{\frac{\text{م}}{ن}-١} = \frac{\text{ط}}{\text{س}}\,\text{ل}^{\frac{\text{ط}}{\text{س}}-١}$

طرفین کو ل مین ضرب کیا

$\therefore \frac{\text{م}}{ن}\,\text{ل}^{\frac{\text{م}}{ن}} = \frac{\text{ط}}{\text{س}}\,\text{ل}^{\frac{\text{ط}}{\text{س}}}$

$\therefore \dfrac{\text{لا}^{\frac{م}{ن}}}{\text{لا}^{\frac{ط}{س}}} = \dfrac{\frac{ط}{س}}{\frac{م}{ن}}$ یا $\text{لا}^{\frac{م}{ن} - \frac{ط}{س}} = \dfrac{ط ن}{س م}$

طرفین مساوات کا $\frac{م}{ن} - \frac{ط}{س}$ مرتبہ کا نزول لیا

$\therefore \text{لا} = \left(\dfrac{ط ن}{س م}\right)^{\frac{ن س}{م س - ن ط}}$

۱۸ $\text{لا}^{\frac{۲}{۳}} + \text{د}^{\frac{۲}{۳}} = ۱۳ \ldots\ldots (۱)$

$\text{لا}^{\frac{۱}{۳}} + \text{د}^{\frac{۱}{۳}} = ۵ \ldots\ldots (۲)$

مساوات (۲) کا مجذور کیا

$\therefore \text{لا}^{\frac{۲}{۳}} + ۲\,\text{لا}^{\frac{۱}{۳}}\,\text{د}^{\frac{۱}{۳}} + \text{د}^{\frac{۲}{۳}} = ۲۵$

موافق (۱) کے $\text{لا}^{\frac{۲}{۳}} + \text{د}^{\frac{۲}{۳}} = ۱۳$

تفریق سے $\therefore ۲\,\text{لا}^{\frac{۱}{۳}}\,\text{د}^{\frac{۱}{۳}} = ۱۲$

مساوات (۱) مین سے $۲\,\text{لا}^{\frac{۱}{۳}}\,\text{د}^{\frac{۱}{۳}} = ۱۲$ کو تفریق کیا

$\therefore \text{لا}^{\frac{۲}{۳}} - ۲\,\text{لا}^{\frac{۱}{۳}}\,\text{د}^{\frac{۱}{۳}} + \text{د}^{\frac{۲}{۳}} = ۱$

طرفین کا جذر لیا $\therefore \text{لا}^{\frac{۱}{۳}} - \text{د}^{\frac{۱}{۳}} = \pm ۱$

لیکن موافق (۲) مساوات کے $\text{لا}^{\frac{۱}{۳}} + \text{د}^{\frac{۱}{۳}} = ۵$

دونو کو جمع کیا $۲\,\text{لا}^{\frac{۱}{۳}} = ۶$ یا ۴

$\therefore \text{لا}^{\frac{۱}{۳}} = ۳$ یا ۲ طرفین کا مکعب کیا

$\therefore \text{لا} = ۲۷$ یا ۸

اور جن مساواتونکو جمع کیا ہی اگر اونکو تفریق کرین

تو $۲\,\text{د}^{\frac{۱}{۳}} = ۴$ یا ۶

$\therefore \text{د}^{\frac{۱}{۳}} = ۲$ یا ۳

$\therefore \text{د} = ۸$ یا ۲۷

۱۹ $\text{لا}\,\text{د}^{۲} + \text{د} = ۲۱ \ldots\ldots (۱)$

$\text{لا}^{۲}\,\text{د}^{۴} + \text{د}^{۲} = ۳۳۳ \ldots\ldots (۲)$

اول مساوات کا مجذور کیا

$\therefore \text{لا}^{۲}\,\text{د}^{۴} + ۲\,\text{لا}\,\text{د}^{۳} + \text{د}^{۲} = ۴۴۱$

موافق (۲) کے $\text{لا}^{۲}\,\text{د}^{۴} + \text{د}^{۲} = ۳۳۳$

تفریق سے $\therefore ۲\,\text{لا}\,\text{د}^{۳} = ۱۰۸$

اسی حاصل تفریق کو مساوات (۲) سی تفریق کیا

$\therefore \text{لا}^{۲}\,\text{د}^{۴} - ۲\,\text{لا}\,\text{د}^{۳} + \text{د}^{۲} = ۲۲۵$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore \text{لا}\,\text{د}^{۲} - \text{د} = \pm ۱۵$

لیکن $\text{لا}\,\text{د}^{۲} + \text{د} = ۲۱$ تفریق کی

$\therefore ۲\,\text{د} = ۶$ یا ۳۶

$\therefore \text{د} = ۳$ یا ۱۸

اور جن مساواتون مین تفریق کی اگر اونکو جمع کرین

تو $۲\,\text{لا}\,\text{د}^{۲} = ۳۶$ یا ۶

$\therefore \text{لا}\,\text{د}^{۲} = ۱۸$ یا ۳

$\therefore \text{لا} = \frac{۱۸}{۹}$ یا $\frac{۳}{۳۲۴} = ۲$ یا $\frac{۱}{۱۰۸}$

۲۰ $\text{لا}^{۲}\,\text{د} + \text{لا}\,\text{د}^{۲} = ۱۸۰ \ldots\ldots (۱)$

$\text{لا}^{۳} + \text{د}^{۳} = ۱۸۹ \ldots\ldots (۲)$

مساوات (۱) کو ۳ مین ضرب کرکر (۲) مساوات کے ساتھ جمع کیا تو یہہ حاصل ہوا

$\text{لا}^{۳} + ۳\,\text{لا}^{۲}\,\text{د} + ۳\,\text{لا}\,\text{د}^{۲} + \text{د}^{۳} = ۷۲۹$

طرفین کا مکعب لیا

$\therefore \text{لا} + \text{د} = ۹ \ldots\ldots (۳)$

اول مساوات سی یہہ حاصل ہوتا ہی

$(لا + ی)\ لای = ۱۸۰$

$\therefore ۹\ لای = ۱۸۰$ بوسیلہ مساوات (۳) کے

$\therefore لای = ۲۰$

$\therefore ۴\ لای = ۸۰ \ldots\ldots (۴)$

اگر مساوات (۳) کا مجذور کرین تو یہہ حاصل ہوتا ہی

$لا^{۲} + ۲\ لای + ی^{۲} = ۸۱$

$۴\ لای = ۸۰$ موافق (۴) کے

تفریق کی

$\therefore لا^{۲} - ۲\ لای + ی^{۲} = ۱$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore لا - ی = \pm ۱$

$لا + ی = ۹$ موافق ۳ کے

$۲\ لا = ۱۰ \text{ یا } ۸$

$\therefore لا = ۵ \text{ یا } ۴$

$\text{اور } ۲\ ی = ۸ \text{ یا } ۱۰$

$\therefore ی = ۴ \text{ یا } ۵$

۲۱ $لا + \sqrt{لای} + ی = ۱۹ \ldots (۱)$

$لا^{۲} + لای + ی^{۲} = ۱۳۳ \ldots (۲)$

مساوات (۲) کو مساوات (۱) پر تقسیم کیا

$\therefore لا - \sqrt{لای} + ی = ۷$

لیکن $لا + \sqrt{لای} + ی = ۱۹$ مساوات (۱) سے

دونوں کو جمع کیا

$\therefore ۲\ لا + ۲\ ی = ۲۶$

$\therefore لا + ی = ۱۳ \ldots\ldots (۳)$ کرین

اور جن مساواتوں کو جمع کیا ہی دینہین باہم تفریق

تو $۲\sqrt{لای} = ۱۲$

$\therefore \sqrt{لای} = ۶$

$\therefore لای = ۳۶$

$\therefore ۳\ لای = ۱۰۸$

اور مساوات (۲) یہہ ہی

$لا^{۲} + لای + ی^{۲} = ۱۳۳$

$۳\ لای = ۱۰۸$

تفریق کی

$\therefore لا^{۲} - ۲\ لای + ی^{۲} = ۲۵$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore لا - ی = \pm ۵$

اور $لا + ی = ۱۳$ موافق (۳) کے

$۲\ لا = ۱۸ \text{ یا } ۸$ جمع کیا

$لا = ۹ \text{ یا } ۴$

جن مساواتوں کو جمع کیا ہی اونہین تفریق کیے

تو $۲\ ی = ۸ \text{ یا } ۱۸$

$\therefore ی = ۴ \text{ یا } ۹$

۲۲ $\dfrac{ط - \sqrt{ط^{۲} - لا^{۲}}}{ط + \sqrt{ط^{۲} - لا^{۲}}} = ص$

کسور مین یہہ بات ثابت کی گئی ہی کہ اگر کسی کسر کی شمار کنندہ اور نسب نما کو ایک ہی مقدار مین ضرب کرین تو قیمت کسر کی نہین بدلتی یعنے اوسمین کچہہ فرق نہین آتا اگر اس مساوات مین شمار کنندہ اور نسب نما کو $ط - \sqrt{ط^{۲} - لا^{۲}}$ مین ضرب کرین تو مساوات مین کچہہ فرق نہین آئیگا اور یہہ مساوات حاصل ہوگی

$\dfrac{\left(ط - \sqrt{ط^{۲} - لا^{۲}}\right)^{۲}}{لا^{۲}} = ص$ طرفین کا جذر لیا

$\therefore \dfrac{ط - \sqrt{ط^{۲} - لا^{۲}}}{لا} = \pm \sqrt{ص}$

$$\therefore ط - \sqrt{ط^2 - ل^2} = \pm \sqrt{ص}\, ل$$

$$\therefore ط \mp \sqrt{ص}\, ل = \sqrt{ط^2 - ل^2}$$

طرفین کا مجذور کیا

$$\therefore ط^2 \mp ۲ ط \sqrt{ص}\, ل + ص ل^2 = ط^2 - ل^2$$

طرفین سے $ط^2$ کم کیا

$$\therefore \mp ۲ ط \sqrt{ص}\, ل + ص ل^2 = - ل^2$$

طرفین کو ل پر تقسیم کیا

$$\therefore \mp ۲ ط \sqrt{ص} + ص ل = - ل$$

$$\therefore \mp ۲ ط \sqrt{ص} = - (ص + ۱)\, ل$$

$$\therefore ل = \pm \frac{۲ ط \sqrt{ص}}{ص + ۱}$$

۲۳ $$\frac{\sqrt{ل} + \sqrt{ل - ط}}{\sqrt{ل} - \sqrt{ل - ط}} = \frac{ن^2 ط}{ل - ط}$$

اس مساوات مین اول طرف کی شمار کنندہ اور نسب نما کو $\sqrt{ل} + \sqrt{ل - ط}$ مین ضرب کیا

$$\therefore \frac{\left(\sqrt{ل} + \sqrt{ل - ط}\right)^2}{ط} = \frac{ن^2 ط}{ل - ط}$$

$$\therefore \left(\sqrt{ل} + \sqrt{ل - ط}\right)^2 = \frac{ن^2 ط^2}{ل - ط}$$

$$\therefore \left(\sqrt{ل} + \sqrt{ل - ط}\right)^2 = \frac{ن^2 ط^2}{ط - ط}$$

طرفین کا جذر لیا

$$\therefore \sqrt{ل} + \sqrt{ل - ط} = \frac{\pm ن ط}{\sqrt{ل - ط}}$$

کسر دور کی

$$\therefore \sqrt{ل^2 - ط ل} + ل - ط = \pm ن ط$$

$$\therefore \sqrt{ل^2 - ط ل} = (ن \pm ۱)\, ط - ل$$

طرفین کا مجذور کیا

$$\therefore ل^2 - ط ل = (ن \pm ۱)^2 ط^2 - ۲ (ن \pm ۱) ط ل + ل^2$$

$$\therefore ۲ (ن \pm ۱) ط ل - ط ل = (ن \pm ۱)^2 ط^2$$

$$\therefore (۲ن \pm ۲)\, ل - ل = (ن \pm ۱)^2 ط$$

$$\therefore (۲ن \pm ۲ - ۱)\, ل = (ن \pm ۱)^2 ط$$

$$\therefore (۲ن \pm ۱)\, ل = (ن \pm ۱)^2 ط$$

$$\therefore ل = \frac{(ن \pm ۱)^2 ط}{۲ن \pm ۱}$$

۲۴ $$\frac{\sqrt{ط + ل} + \sqrt{ط - ل}}{\sqrt{ط + ل} - \sqrt{ط - ل}} = ص$$

شمار کنندہ اور نسب نما کو $\sqrt{ط + ل} + \sqrt{ط - ل}$ مین ضرب کیا

$$\therefore \frac{\left(\sqrt{ط + ل} + \sqrt{ط - ل}\right)^2}{۲ ل} = ص$$

$$یا\ \frac{ط + ل + ۲\sqrt{ط^2 - ل^2} + ط - ل}{۲ ل} = ص$$

$$\therefore \frac{۲ ط + ۲\sqrt{ط^2 - ل^2}}{۲ ل} = ص$$

$$\therefore \frac{ط}{ل} + \frac{\sqrt{ط^2 - ل^2}}{ل} = ص$$

دوسرے جز مین ل کو مجذور کر کے جذر کی اندر لکھا

$$یا\ \frac{ط}{ل} + \sqrt{\frac{ط^2}{ل^2} - ۱} = ص$$

$$\therefore \sqrt{\frac{ط^2}{ل^2} - ۱} = ص - \frac{ط}{ل}$$

طرفین کا مجذور کیا

$$\therefore \frac{ط^2}{ل^2} - ۱ = ص^2 - \frac{۲ ص ط}{ل} + \frac{ط^2}{ل^2}$$

$$\therefore \frac{۲ ص ط}{ل} = ص^2 + ۱$$

$$\therefore \frac{ل}{۲ ص ط} = \frac{۱}{ص^2 + ۱}$$

$$\therefore ل = \frac{۲ ص ط}{ص^2 + ۱}$$

٢٥

$$\frac{ط + ل + \sqrt{٢ ط ل + ل^{٢}}}{ط + ل} = ص$$

شمار کنندہ کو نسب نما پر تقسیم کیا

$$\therefore ١ + \frac{\sqrt{٢ ط ل + ل^{٢}}}{ط + ل} = ص$$

$$\therefore \sqrt{\frac{٢ ط ل + ل^{٢}}{(ط + ل)^{٢}}} = ص - ١$$

$$یا \sqrt{١ - \left(\frac{ط}{ط + ل}\right)^{٢}} = ص - ١$$

طرفین کا مجذور کیا

$$\therefore ١ - \left(\frac{ط}{ل + ط}\right)^{٢} = (ص - ١)^{٢} = ص^{٢} - ٢ص + ١$$

$$\therefore \left(\frac{ط}{ط + ل}\right)^{٢} = ٢ص - ص^{٢}$$

طرفین کا جذر لیا

$$\therefore \frac{ط}{ط + ل} = \pm \sqrt{٢ص - ص^{٢}}$$

$$\therefore \frac{ط + ل}{ط} = \pm \frac{١}{\sqrt{٢ص - ص^{٢}}}$$

$$\therefore ط + ل = \pm \frac{ط}{\sqrt{٢ص - ص^{٢}}}$$

$$\therefore ل = \pm \frac{ط}{\sqrt{٢ص - ص^{٢}}} - ط$$

٢٦

$$\sqrt{\frac{ط + ل}{ل}} + \sqrt{\frac{ط - ل}{ل}} = \sqrt{\frac{ل}{ص}}$$

اول طرف کی شمار کنندوں کو انکی نسب نما پر تقسیم کیا

$$\therefore \sqrt{\frac{ط}{ل} + ١} + \sqrt{\frac{ط}{ل} - ١} = \sqrt{\frac{ل}{ص}}$$

$$\therefore \sqrt{\frac{ط}{ل} + ١} = \sqrt{\frac{ل}{ص}} - \sqrt{\frac{ط}{ل} - ١}$$

طرفین کا مجذور کیا

$$\therefore \frac{ط}{ل} + ١ = \frac{ل}{ص} - ٢\sqrt{\frac{ط - ل}{ص}} + \frac{ط}{ل} - ١$$

$$\therefore ٢\sqrt{\frac{ط - ل}{ص}} = \frac{ل}{ص} - ٢$$

$$\therefore \sqrt{\frac{ط - ل}{ص}} = \frac{ل}{٢ص} - ١$$

طرفین کا مجذور کیا

$$\therefore \frac{ط - ل}{ص} = \frac{ل^{٢}}{٤ص^{٢}} - \frac{ل}{ص} + ١$$

$$یا \frac{ط}{ص} - \frac{ل}{ص} = \frac{ل^{٢}}{٤ص^{٢}} - \frac{ل}{ص} + ١$$

$$\therefore \frac{ل^{٢}}{٤ص^{٢}} = \frac{ط}{ص} - ١$$

طرفین کا جذر لیا

$$\therefore \frac{ل}{٢ص} = \pm \sqrt{\frac{ط}{ص} - ١}$$

$$\therefore ل = \pm ٢ص\sqrt{\frac{ط - ص}{ص}} = \pm ٢\sqrt{طص - ص^{٢}}$$

٢٧

$$٣ل - \frac{٣ل}{د} = د^{٢} - د \ldots\ldots (١)$$

$$د^{٢} + ل = ٤ \ldots\ldots (٢)$$

مساوات (١) کو اسطرح لکھہ سکتے ہیں

$$٣ل\left(١ - \frac{١}{د}\right) = (د - ١) د$$ پر تقسیم کیا

$$یا ٣ل \frac{(د - ١)}{د} = (د - ١) د$$ طرفین کو د − ١ پر

$$\therefore \frac{٣ل}{د} = د$$

$$\therefore ٣ل = د^{٢} \ldots\ldots (٣)$$

مساوات (٢) میں سے (٣) کو تفریق کیا

$\therefore$ د² + لا = ۴

د² = ۳لا

لا = ۴ − ۳لا

$\therefore$ ۴لا = ۴

$\therefore$ لا = ۱

لیکن د² = ۳لا = ۳

$\therefore$ د = ± √۳

۲۸ لا² + د√(لا د) = ۹

د² + لا√(لا د) = ۱۸

ان دونو مساواتونکو اسطرح لکھہ سکتے ہین

لا^½ (لا^{3/2} + د^{3/2}) = ۹ .... (۱)

د^½ (د^{3/2} + لا^{3/2}) = ۱۸ .... (۲)

مساوات (۲) کو مساوات (۱) پر تقسیم کیا

$\therefore$ (د/لا)^½ = ۲ طرفین کا مجذور کیا

$\therefore$ د/لا = ۴

$\therefore$ د = ۴لا

لیکن لا² + د√(د لا) = ۹ موافق اصلی مساوات کے

$\therefore$ لا² + ۴لا √(۴لا²) = ۹

یعنے لا² + ۸لا² = ۹

$\therefore$ ۹لا² = ۹

$\therefore$ لا² = ۱

لا = ± ۱

اور د = ۴لا = ± ۴

۲۹ (لا² + ۲د²)/√د = لا + ۲لا د .... (۱)

لا² − ۲د² = ۲۵۶ − لا√د .... (۲)

مساوات (۱) کے کسر دور کی

$\therefore$ لا² + ۲د² = لا√د + ۲لا د^{3/2}

$\therefore$ لا² − لا√د = ۲لا د^{3/2} − ۲د² اس مساوات کو اسطرح لا (لا − √د) = ۲د^{3/2} (لا − √د) لکھا

$\therefore$ لا = ۲د^{3/2} .... (۳) طرفین مین لا − √د کو تقسیم کیا

$\therefore$ لا√د = ۲د²

جبوقت (۲) مین بجاے لا√د کی ۲د² لکہی تو یہہ حاصل ہوا

لا² − ۲د² = ۲۵۶ − ۲د²

$\therefore$ لا² = ۲۵۶

$\therefore$ لا = ± ۱۶

اور موافق مساوات (۳) کے

۲د^{3/2} = لا

= ± ۱۶

$\therefore$ د^{3/2} = ± ۸

$\therefore$ د^½ = ± ۲ طرفین کا کعب لیا

$\therefore$ د = ۴

۳۰ لا² د + لا د² = ۳۰ .... (۱)

۱/لا + ۱/د = ۵/۶ .... (۲)

(۲) مساوات سے یہہ حاصل ہوتا ہے

(لا + د)/(لا د) = ۵/۶

$\therefore$ لا + د = ۵لا د/۶ .... (۳)

اور اول مساوات کو اسطرح لکھہ سکتے ہین

لا ی (لا + ی) = ۳۰

∴ لا ی = ۳۰ / (لا + ی) .....(۴)

اور موافق (۳) کی لا + ی = ۵/۶ لا ی (۴) کے

= ۵/۶ × ۳۰/(لا + ی) موافق

= ۲۵/(لا + ی)

∴ (لا + ی)^۲ = ۲۵ .....(۵)

∴ لا + ی = ±۵

اور لا ی = ۳۰/(لا + ی) موافق (۴) کے

= ۳۰/±۵ = ±۶

∴ ۴ لا ی = ±۲۴

اور موافق (۵) کے لا^۲ + ۲ لا ی + ی^۲ = ۲۵

۴ لا ی = ±۲۴ تفریق کی

∴ لا^۲ − ۲ لا ی + ی^۲ = ۱ یا ۴۹

∴ لا − ی = ±۱ یا ±۷

لیکن لا + ی = ±۵ جمع کیا

∴ ۲ لا = ۶ یا ۴ یا −۱۲ یا ۲

∴ لا = ۳ یا ۲ یا −۶ یا ۱

اور جن مساواتوں کو جمع کیا ہی اگر انھیں باہم تفریق کریں

تو ۲ ی = ۴ یا ۶ یا ۲ یا −۱۲

∴ ی = ۲ یا ۳ یا ۱ یا −۶

۳۱ لا^۲ ی + لا ی^۲ = ۶ .....(۱)

لا^۳ ی^۲ + لا^۲ ی^۳ = ۱۲ .....(۲)

مساوات (۲) کو مساوات (۱) پر تقسیم کیا

∴ لا ی (لا^۲ ی + لا ی^۲) / (لا^۲ ی + لا ی^۲) = ۱۲/۶

یعنی لا ی = ۲ .....(۳) اور بوسیلہ (۱) کے

لا ی (لا + ی) = ۶

∴ ۲ (لا + ی) = ۶

∴ لا + ی = ۳ طرفین کا مجذور کیا

∴ لا^۲ + ۲ لا ی + ی^۲ = ۹

اور ۴ لا ی = ۸ بوسیلہ (۳) مساوات کے تفریق کی

لا^۲ − ۲ لا ی + ی^۲ = ۱

طرفین کا جذر لیا ∴ لا − ی = ±۱

لا + ی = ۳ جمع کیا

∴ ۲ لا = ۴ یا ۲

∴ لا = ۲ یا ۱

اور ی = ۳ − لا

= ۳ − ۲ یا ۳ − ۱

= ۱ یا ۲

۳۲ (لا^۲ − ی^۲) : (لا − ی)^۲ :: ۶۱ : ۱

لا ی = ۳۲۰ .....(۲)

جب چار مقدار متناسب ہوتی ہیں تو اول اور دوسری کا حاصل تفریق دوسری مقدار سے وہی نسبت رکھتا ہے جو تیسری اور چوتھی کا حاصل تفریق چوتھی مقدار سے نسبت رکھتا ہے اور ثبوت اس امر کا مساواتوں کے بعد تناسب کے فصل میں لکھا جائیگا پس بیان بالا کی موافق تناسب اول سے یہہ تناسب حاصل ہوتا ہے

(لا^۲ − ی^۲) − (لا − ی)^۲ : (لا − ی)^۲ :: ۶۰ : ۱

یعنے لا³ - ی³ - (لا³ - ۳ لا² ی + ۳ لا ی² - ی³) : (لا - ی)³ :: ۶۰ : ۱

∴ ۳ لا² ی - ۳ لا ی² : (لا - ی)³ :: ۶۰ : ۱

∴ ۳ لا ی (لا - ی) : (لا - ی)³ :: ۶۰ : ۱

اول اور چہارم کی حاصل ضرب دویم اور سویم کے حاصل ضرب کے برابر لکھا تو

۳ لا ی (لا - ی) = ۶۰ (لا - ی)³

طرفین کو (لا - ی) پر تقسیم کیا

∴ ۳ لا ی = ۶۰ (لا - ی)²

لیکن مساوات (۲) سے لا ی = ۳۲۰

∴ ۳ لا ی = ۹۶۰

∴ ۶۰ (لا - ی)² = ۹۶۰

∴ (لا - ی)² = ۹۶۰/۶۰ = ۱۶

طرفین کا جذر لیا

∴ لا - ی = ±۴

اور لا² - ۲ لا ی + ی² = ۱۶

۴ لا ی = ۱۲۸۰

جمع کیا

∴ لا² + ۲ لا ی + ی² = ۱۲۹۶

طرفین کا جذر لیا

∴ لا + ی = ±۳۶

لیکن لا - ی = ±۴

جمع کیا

∴ ۲ لا = ±۴۰ یا ±۳۲

∴ لا = ±۲۰ یا ±۱۶

اور تفریق کرنی سے ۲ ی = ±۳۲ یا ±۴۰

∴ ی = ±۱۶ یا ±۲۰

۳۳ (لا² + ی²)(لا + ی) = ۲۳۳۶ ... (۱)

(لا² - ی²)(لا - ی) = ۵۷۶ ..... (۲)

ان دونوں مساواتوں سے یہہ دو مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

لا³ + لا² ی + لا ی² + ی³ = ۲۳۳۶

لا³ - لا² ی - لا ی² + ی³ = ۵۷۶

تفریق کی

∴ ۲ لا² ی + ۲ لا ی² = ۱۷۶۰

اگر اس حاصل تفریق کو اول مساوات پر زیادہ کریں تو یہہ حاصل ہوتا ہے

لا³ + ۳ لا² ی + ۳ لا ی² + ی³ = ۴۰۹۶

طرفین کا کعب لیا

∴ لا + ی = ۱۶ ..... (۳)

اور حاصل تفریق سے یہہ حاصل ہوتا ہے

۲ لا ی (لا + ی) = ۱۷۶۰

∴ ۲ لا ی × ۱۶ = ۱۷۶۰

∴ لا ی = ۵۵

اور (۳) سے لا² + ۲ لا ی + ی² = ۲۵۶

۴ لا ی = ۲۲۰

تفریق کی

∴ لا² - ۲ لا ی + ی² = ۳۶

∴ لا - ی = ±۶

اور (۳) سے لا + ی = ۱۶

∴ ۲ لا = ۲۲ یا ۱۰

∴ لا = ۱۱ یا ۵

اور ۲ ی = ۱۰ یا ۲۲

∴ ی = ۵ یا ۱۱

۳۴ لا^۳ + ی^۳ = (لا + ی) لا ی ...... (۱)

لا^۲ ی + لا ی^۲ = ۴ لا ی ...... (۲)

لا ی پر مساوات (۲) کو تقسیم کیا

∴ لا + ی = ۴ ...... (۳)

طرفین کا مکعب کیا

لا^۳ + ۳ لا^۲ ی + ۳ لا ی^۲ + ی^۳ = ۶۴

اور مساوات (۱) سے لا^۳ − لا^۲ ی − لا ی^۲ + ی^۳ = ۰

۴ لا^۲ ی + ۴ لا ی^۲ = ۶۴ تفریق کی

∴ لا^۲ ی + لا ی^۲ = ۱۶

یعنی لا ی (لا + ی) = ۱۶

لیکن لا + ی = ۴

∴ ۴ لا ی = ۱۶

∴ لا ی = ۴

اور لا^۲ + ۲ لا ی + ی^۲ = ۱۶ بوسیلہ (۳) کے

۴ لا ی = ۱۶

تفریق کی

∴ لا^۲ − ۲ لا ی + ی^۲ = ۰

طرفین کا جذر لیا

∴ لا − ی = ۰

اور لا + ی = ۴

۲ لا = ۴

لا = ۲

اور ۲ ی = ۴

∴ ی = ۲

۳۵ (لا^۲ + ی^۲) (لا + ی) = ۱۵ لا ی / ۲ ...... (۱)

(لا^۴ − ی^۴) (لا^۲ + ی^۲) = ۸۵ لا^۲ ی^۲ / ۴ ...... (۲)

مساوات (۲) کو اول پر تقسیم کیا

∴ (لا^۲ − ی^۲) (لا^۲ + ی^۲) (لا^۲ + ی^۲) / (لا^۲ + ی^۲) (لا + ی) = ۸۵ لا^۲ ی^۲ × ۲ / ۱۵ × ۲ × لا ی

یا (لا^۴ − ی^۴) / (لا + ی) = ۵ لا ی / ۲

یا (لا^۲ + ی^۲) (لا^۲ − ی^۲) / (لا + ی) = ۵ لا ی / ۲

یا (لا^۲ + ی^۲) (لا + ی) (لا − ی) / (لا + ی) = ۵ لا ی / ۲

∴ (لا^۲ + ی^۲) (لا − ی) = ۵ لا ی / ۲ ...... (۳)

مساوات (۱) کو مساوات (۳) پر تقسیم کیا

∴ (لا^۲ + ی^۲) (لا + ی) / (لا^۲ + ی^۲) (لا − ی) = ۱۵ لا ی / ۵ لا ی

∴ (لا + ی) / (لا − ی) = ۳

∴ لا + ی = ۳ لا − ۳ ی

∴ ۴ ی = ۲ لا

∴ ۲ ی = لا ... یہہ قیمت لا کی (۳) مساوات میں رکھی

∴ (لا^۲ + ی^۲) (لا − ی) = ۵ ی^۲ × ی = ۵ × ۲ ی × ی / ۲ = ۵ ی^۲

∴ ی = ۱ اور لا = ۲ ی = ۲

۳۶ (لا^۲ − ی^۲) (لا − ی) = ۳ لا ی ...... (۱)

(لا^۴ − ی^۴) (لا^۲ − ی^۲) = ۴۵ لا^۲ ی^۲ ...... (۲)

مساوات (۲) کو (۱) پر تقسیم کیا

∴ (لا^۴ − ی^۴) (لا^۲ − ی^۲) / (لا^۲ − ی^۲) (لا − ی) = ۴۵ لا^۲ ی^۲ / ۳ لا ی

یا (لا^۴ − ی^۴) / (لا − ی) = ۱۵ لا ی

$$\therefore \frac{(\text{لا}^2+\text{ی}^2)(\text{لا}+\text{ی})(\text{لا}-\text{ی})}{\text{لا}-\text{ی}} = ۱۵\,\text{لا ی}$$

$$\therefore (\text{لا}^2+\text{ی}^2)(\text{لا}+\text{ی}) = ۱۵\,\text{لا ی}$$

یا $\text{لا}^3 + \text{لا}^2\text{ی} + \text{لا ی}^2 + \text{ی}^3 = ۱۵\,\text{لا ی}$

اور مساوات (۱) سی $\text{لا}^3 - \text{لا}^2\text{ی} - \text{لا ی}^2 + \text{ی}^3 = ۳\,\text{لا ی}$

دونوکو جمع کیا $۲\,\text{لا}^3 + ۲\,\text{ی}^3 = ۱۸\,\text{لا ی}$

$\therefore \text{لا}^3 + \text{ی}^3 = ۹\,\text{لا ی} \;.....(۳)$

اور جن مساواتونکو جمع کیا ہی اگر اونمین باہم تفریق کرین تو یہہ حاصل ہوتا ہی $۲\,\text{لا}^2\text{ی} + ۲\,\text{لا ی}^2 = ۱۲\,\text{لا ی}$ طرفین کو ۲ لا ی پر تقسیم کیا

$\therefore \text{لا} + \text{ی} = ۶ \;..(۴)$

اس مساوات کو مکعب کیا

$\therefore \text{لا}^3 + ۳\,\text{لا}^2\text{ی} + ۳\,\text{لا ی}^2 + \text{ی}^3 = ۲۱۶$

$\text{لا}^3 + \text{ی}^3 = ۹\,\text{لا ی}$ موافق (۳) کے

$\therefore ۳\,\text{لا}^2\text{ی} + ۳\,\text{لا ی}^2 = ۲۱۶ - ۹\,\text{لا ی}$ تفریق سے

یا $۳\,(\text{لا}+\text{ی})\,\text{لا ی} = ۲۱۶ - ۹\,\text{لا ی}$

یا $۳ \times ۶ \times \text{لا ی} = ۲۱۶ - ۹\,\text{لا ی}$ بوسیلہ مساوات (۴) کے

یا $۱۸\,\text{لا ی} = ۲۱۶ - ۹\,\text{لا ی}$

$\therefore ۲۷\,\text{لا ی} = ۲۱۶$

$\therefore \text{لا ی} = ۸$

اور $۴\,\text{لا ی} = ۳۲$

مساوات (۴) کا مجذور کیا

$\therefore \text{لا}^2 + ۲\,\text{لا ی} + \text{ی}^2 = ۳۶$

اور $۴\,\text{لا ی} = ۳۲$

تفریق کی

$\therefore \text{لا}^2 - ۲\,\text{لا ی} + \text{ی}^2 = ۴$

اور $\text{لا} + \text{ی} = ۶$
$\text{لا} - \text{ی} = \pm ۲$

$\therefore ۲\,\text{لا} = ۸$ یا ۴ باہم جمع کیا

$\therefore \text{لا} = ۴$ یا ۲

اور $۲\,\text{ی} = ۴$ یا ۸

$\therefore \text{ی} = ۲$ یا ۴

یہان سی مرکب مساوات درجہ دویم کی مثالین حل کی جاتی ہین

۱. $\frac{۱۰}{\text{لا}} - \frac{۱۴ - ۲\text{لا}}{\text{لا}^2} = \frac{۲۲}{۹}$

طرفین کو لا² مین ضرب کیا

$\therefore ۱۰\,\text{لا} - ۱۴ + ۲\,\text{لا} = \frac{۲۲\,\text{لا}^2}{۹}$

$\therefore \frac{۲۲\,\text{لا}^2}{۹} - ۱۲\,\text{لا} = -۱۴$

$\therefore \text{لا}^2 - \frac{۵۴}{۱۱}\text{لا} = -\frac{۶۳}{۱۱}$ طرفین کو $\frac{۲۲}{۹}$ پر تقسیم کیا

طرفین پر $\frac{۲۷}{۱۱}$ کا مجذور زیادہ کیا

$\therefore \text{لا}^2 - \frac{۵۴}{۱۱}\text{لا} + \left(\frac{۲۷}{۱۱}\right)^2 = \left(\frac{۲۷}{۱۱}\right)^2 - \frac{۶۳}{۱۱}$

$= \frac{۷۲۹}{۱۲۱} - \frac{۶۳}{۱۱}$

$= \frac{۳۶}{۱۲۱}$

$\therefore \text{لا} - \frac{۲۷}{۱۱} = \pm \frac{۶}{۱۱}$

$\therefore \text{لا} = \frac{۲۷}{۱۱} \pm \frac{۶}{۱۱} = \frac{۳۳}{۱۱} = ۳$ یا $\frac{۲۱}{۱۱}$

۲. $\frac{۳\text{لا} - ۴}{\text{لا} - ۴} + ۱ = ۱۰ - \frac{\text{لا} - ۲}{۲}$

کسر دور کی

$\therefore ۶\text{لا} - ۸ + ۲\text{لا} - ۸ = ۲۰\text{لا} - ۸۰ - \text{لا}^2 + ۶\text{لا} - ۸$

$\therefore \text{لا}^2 - ۱۸\text{لا} = -۷۲$

$\therefore \text{لا}^2 - ۱۸\text{لا} + (۹)^2 = -۷۲ + ۸۱ = ۹$

$\therefore \text{لا} - ۹ = \pm ۳$

$\therefore \text{لا} = ۹ \pm ۳ = ۱۲$ یا ۶

٣ — (٣لا+٤)/٥ − (٣٠−٢لا)/(لا−٩) = (٧لا−١٤)/١٠

طرفین کو ١٠ مین ضرب کیا

∴ ٦لا + ٨ − (٣٠٠−٢٠لا)/(لا−٦) = ٧لا − ١٤

∴ ٢٢ − لا = (٣٠٠−٢٠لا)/(لا−٦) طرفین کو لا−٦ مین ضرب کیا

∴ ٢٨لا − لا² − ١٣٢ = ٣٠٠ − ٢٠لا

∴ − لا² + ٤٨لا = ٤٣٢

طرفین کی علامتین بدلین

∴ لا² − ٤٨لا = −٤٣٢

∴ لا² − ٤٨لا + (٢٤)² = (٢٤)² − ٤٣٢

= ٥٧٦ − ٤٣٢

= ١٤٤

∴ لا − ٢٤ = ±١٢

∴ لا = ٢٤ ± ١٢ = ٣٦ یا ١٢

٤ — ٣لا − (٣لا−١٠)/(٩−٢لا) = ٢ + (٦لا²−٤٠)/(٢لا−١)

طرفین مساوات کو (٢لا−١) مین ضرب کیا

∴ ٦لا² − ٣لا − (٦لا²−٢٣لا+١٠)/(٩−٢لا) = ٤لا − ٢ + ٦لا² − ٤٠

∴ ٧لا + (٦لا²−٢٤لا+١٠)/(٩−٢لا) = ٤٢

طرفین کو ٩ − ٢لا مین ضرب کیا

∴ ٦٣لا − ١٤لا² − ٦لا² + ٢٣لا + ١٠ = ٣٧٨ − ٨٤لا

∴ ١٢٤لا − ٨لا² = ٣٦٨

طرفین کی علامتین بدلین

∴ ٨لا² − ١٢٤لا = −٣٦٨

طرفین کو ٨ پر تقسیم کیا

∴ لا² − ٣١/٢ لا = −٤٦

طرفین پر (٣١/٤)² کا مجذور زیادہ کیا

∴ لا² − ٣١/٢ لا + (٣١/٤)² = ٩٦١/١٦ − ٤٦

= ٢٢٥/١٦

طرفین کا جذر لیا

∴ لا − ٣١/٤ = ±١٥/٤

∴ لا = ٣١/٤ ± ١٥/٤ = ٢٣/٢ یا ٤

٥ — لا/(لا+٥) + ٧/(٤لا−٦) = ١١لا/(١١لا−٨)

طرفین کو (لا+٥) مین ضرب کیا

∴ لا + (٧لا+٣٥)/(٤لا−٦) = (١١لا² + ٥٥لا)/(١١لا−٨)

طرفین کو (١١لا−٨) مین ضرب کیا

∴ ١١لا² − ٨لا + (٧٧لا² + ٣٢٩لا − ٢٨٠)/(٤لا−٦) = ١١لا² + ٥٥لا

∴ (٧٧لا² + ٣٢٩لا − ٢٨٠)/(٤لا−٦) = ٦٣لا

طرفین کو ٧ پر تقسیم کیا

∴ (٤٧لا + ١١لا² − ٤٠)/(٤لا−٦) = ٩لا

∴ ٤٧لا + ١١لا² − ٤٠ = ٥٤لا − ٣٦لا²

∴ ٤٧لا² − ٧لا = ٤٠

∴ لا² − ٧/٤٧ لا = ٤٠/٤٧

طرفین پر ٧/٩٤ کا مجذور زیادہ کیا

∴ لا² − ٧/٤٧ لا + (٧/٩٤)² = ٤٩/٨٨٣٦ + ٤٠/٤٧

= ٧٥٦٩/٨٨٣٦

طرفین کا جذر لیا

∴ لا − ٧/٩٤ = ±٨٧/٩٤

∴ ل = ٧/٩٤ ± ٨٧/٩٤ = ١ یا − ٤٠/٤٧

٦ — ٩٠/ل − ٢٧/(٢+ل) = ٩٠/(١+ل)

طرفین کو ٩ پر تقسیم کیا

∴ ١٠/ل − ٣/(٢+ل) = ١٠/(١+ل)

طرفین کو (ل+١) میں ضرب کیا

∴ ١٠ل + ١٠ − (٣ل² + ٣ل)/(ل+٢) = ١٠ل

∴ (٣ل² + ٣ل)/(ل+٢) = ١٠

∴ ٣ل² + ٣ل = ١٠ل + ٢٠

∴ ٣ل² − ٧ل = ٢٠

∴ ل² − ٧/٣ ل = ٢٠/٣

∴ ل² − ٧/٣ ل + (٧/٦)² = ٤٩/٣٦ + ٢٠/٣ = ٢٨٩/٣٦

∴ ل − ٧/٦ = ± ١٧/٦ ∴ ل = ٧/٦ ± ١٧/٦ = ٤ یا − ٥/٣

٧ — ١/(ل² − ٣ل) + ١/(ل² + ٤ل) = ٩/(٨ل)

طرفین کو ل میں ضرب کیا

∴ ١/(ل − ٣) + ١/(ل + ٤) = ٩/٨

کسر دور کی

∴ ٨ل + ٣٢ + ٨ل − ٢٤ = ٩ل² + ٩ل − ١٠٨

∴ ١٦ل + ٨ = ٩ل² + ٩ل − ١٠٨

∴ ٩ل² − ٧ل = ١١٦

∴ ل² − ٧/٩ ل = ١١٦/٩

∴ ل² − ٧/٩ ل + (٧/١٨)² = ٤٩/٣٢٤ + ١١٦/٩ = ٤٢٢٥/٣٢٤

∴ ل − ٧/١٨ = ± ٦٥/١٨

∴ ل = ٧/١٨ ± ٦٥/١٨ = ٤ یا − ٢٩/٩

٨ — (ل³ − ١٠ل² + ١)/(ل² − ٦ل + ٩) = ل − ٣

کسر دور کی

∴ ل³ − ١٠ل² + ١ = ل³ − ٩ل² + ٢٧ل − ٢٧

∴ ل² + ٢٧ل = ٢٨

∴ ل² + ٢٧ل + (٢٧/٢)² = (٢٧/٢)² + ٢٨ = ٨٤١/٤

∴ ل + ٢٧/٢ = ± ٢٩/٢

∴ ل = ± ٢٩/٢ − ٢٧/٢ = ١ یا − ٢٨

٩ — ل/(ل − ٧) + (ل − ٧)/ل = ٢ ٩/١٠

∴ (ل² + (ل − ٧)²)/(ل² − ٧ل) = ٢٩/١٠

∴ ٢ل² − ١٤ل + ٤٩ = (٢٩ل² − ٢٠٣ل)/١٠

∴ ٢٠ل² − ١٤٠ل + ٤٩٠ = ٢٩ل² − ٢٠٣ل

∴ ٩ل² − ٦٣ل = −٤٩٠

∴ ل² − ٧ل = −١٠

∴ ل² − ٧ل + (٧/٢)² = ٤٩/٤ − ١٠ = ٩/٤

∴ ل − ٧/٢ = ± ٣/٢

∴ ل = ٧/٢ ± ٣/٢ = ٥ یا ٢

۱۰ $\frac{7-12\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^3}} = \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}}} - \frac{8\text{لا}+110}{\sqrt{\text{لا}^3}}$

طرفین کو $\sqrt{\text{لا}^3}$ میں ضرب کیا

$\therefore 7-12\text{لا} = \text{لا}^2 - 8\text{لا} - 110$

$\therefore \text{لا}^2 + 4\text{لا} = 117$

$\therefore \text{لا}^2 + 4\text{لا} + 4 = 117 + 4$

$= 121$

$\therefore \text{لا} + 2 = \pm 11$

$\therefore \text{لا} = \pm 11 - 2 = 9$ یا -13

۱۱ $\sqrt{\text{لا}+5} \times \sqrt{\text{لا}+12} = 12$

طرفین کا مجذور کیا

$\therefore (\text{لا}+5)(\text{لا}+12) = 144$

$\therefore \text{لا}^2 + 17\text{لا} + 60 = 144$

$\therefore \text{لا}^2 + 17\text{لا} = 84$

$\therefore \text{لا}^2 + 17\text{لا} + \left(\frac{17}{2}\right)^2 = \frac{289}{4} + 84$

$= \frac{625}{4}$

$\therefore \text{لا} + \frac{17}{2} = \pm \frac{25}{2}$

$\text{لا} = \pm \frac{25}{2} - \frac{17}{2} = 4$ یا -21

۱۲ $\sqrt[3]{\text{لا}^3 - \text{ط}^3} = \text{لا} - \text{ص}$ طرفین کا مکعب کیا

$\therefore \text{لا}^3 - \text{ط}^3 = \text{لا}^3 - 3\text{لا}^2\text{ص} + 3\text{لا}\text{ص}^2 - \text{ص}^3$

$\therefore 3\text{لا}^2\text{ص} - 3\text{لا}\text{ص}^2 = \text{ط}^3 - \text{ص}^3$

طرفین کو ۳ص پر تقسیم کیا

$\therefore \text{لا}^2 - \text{ص}\text{لا} = \frac{\text{ط}^3 - \text{ص}^3}{3\text{ص}}$

$\therefore \text{لا}^2 - \text{ص}\text{لا} + \frac{\text{ص}^2}{4} = \frac{\text{ص}^2}{4} + \frac{\text{ط}^3 - \text{ص}^3}{3\text{ص}}$

$= \frac{4\text{ط}^3 - \text{ص}^3}{12\text{ص}}$

$\therefore \text{لا} - \frac{\text{ص}}{2} = \pm \sqrt{\frac{4\text{ط}^3 - \text{ص}^3}{12\text{ص}}}$

$\therefore \text{لا} = \pm \sqrt{\frac{4\text{ط}^3 - \text{ص}^3}{12\text{ص}}} + \frac{\text{ص}}{2}$

۱۳ $\text{لا}^{2\text{ن}} - \text{م}\,\text{لا}^{\text{ن}} = \text{ح}$

$\therefore \text{لا}^{2\text{ن}} - \text{م}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \left(\frac{\text{م}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\text{م}}{2}\right)^2 + \text{ح}$

$= \frac{\text{م}^2 + 4\text{ح}}{4}$

$\therefore \text{لا}^{\text{ن}} - \frac{\text{م}}{2} = \pm \sqrt{\frac{\text{م}^2 + 4\text{ح}}{4}}$

$\therefore \text{لا}^{\text{ن}} = \frac{\text{م} \pm \sqrt{\text{م}^2 + 4\text{ح}}}{2}$

طرفین کا ن مرتبہ کا جذر لیا

$\therefore \text{لا} = \left(\frac{\text{م} \pm \sqrt{\text{م}^2 + 4\text{ح}}}{2}\right)^{\frac{1}{\text{ن}}}$

۱۴ $\frac{\sqrt{4\text{لا}} + 2}{\sqrt{\text{لا}} + 4} = \frac{4 - \sqrt{\text{لا}}}{\sqrt{\text{لا}}}$ کسر دور کی

$\therefore 2\text{لا} + 2\sqrt{\text{لا}} = 16 - \text{لا}$

$\therefore 3\text{لا} + 2\sqrt{\text{لا}} = 16$

$\therefore \text{لا} + \frac{2}{3}\sqrt{\text{لا}} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{16}{3} + \frac{1}{9}$

$= \frac{49}{9}$ طرفین کا جذر لیا

$\therefore \sqrt{\text{لا}} + \frac{1}{3} = \pm \frac{7}{3}$

$\therefore \sqrt{\text{لا}} = \pm \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2$ یا $-\frac{8}{3}$

$\therefore \text{لا} = 4$ یا $\frac{64}{9}$

۱۵ $\dfrac{\sqrt{\text{ط}^2\,\text{ل}} + \text{ص}}{\text{ط} + \sqrt{\text{ل}}} = \dfrac{\text{ط} - \sqrt{\text{ل}}}{\sqrt{\text{ل}}}$

کسر دور کی

$\therefore\ \text{ط}\,\text{ل} + \text{ص}\sqrt{\text{ل}} = \text{ط}^2 - \text{ل}$

$\therefore\ \text{ط}\,\text{ل} + \text{ل} + \text{ص}\sqrt{\text{ل}} = \text{ط}^2$

$\therefore\ (\text{ط}+1)\,\text{ل} + \text{ص}\sqrt{\text{ل}} = \text{ط}^2$

$\therefore\ \text{ل} + \dfrac{\text{ص}}{1+\text{ط}}\sqrt{\text{ل}} = \dfrac{\text{ط}^2}{1+\text{ط}}$

$\therefore\ \text{ل} + \dfrac{\text{ص}}{1+\text{ط}}\sqrt{\text{ل}} + \left(\dfrac{\text{ص}}{2(1+\text{ط})}\right)^2 = \dfrac{\text{ص}^2}{4(1+\text{ط})^2} + \dfrac{\text{ط}^2}{1+\text{ط}}$

$= \dfrac{\text{ص}^2}{4(1+\text{ط})^2} + \dfrac{4\text{ط}^2(1+\text{ط})}{4(1+\text{ط})^2}$

$= \dfrac{\text{ص}^2 + 4\text{ط}^3 + 4\text{ط}^2}{4(1+\text{ط})^2}$

$\therefore\ \sqrt{\text{ل}} + \dfrac{\text{ص}}{2(1+\text{ط})} = \pm\dfrac{\sqrt{\text{ص}^2 + 4\text{ط}^3 + 4\text{ط}^2}}{2(1+\text{ط})}$

$\therefore\ \text{ل} = \left(\dfrac{\pm\sqrt{\text{ص}^2 + 4\text{ط}^3 + 4\text{ط}^2} - \text{ص}}{2(1+\text{ط})}\right)^2$

۱۶ $\sqrt{\text{ل}^3} - 2\sqrt{\text{ل}} - \text{ل} = 0$

طرفین کو $\sqrt{\text{ل}}$ پر تقسیم کیا

$\therefore\ \text{ل} - 2 - \sqrt{\text{ل}} = 0$

$\therefore\ \text{ل} - \sqrt{\text{ل}} = 2$

$\therefore\ \text{ل} - \sqrt{\text{ل}} + \tfrac{1}{4} = 2 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{9}{4}$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore\ \sqrt{\text{ل}} - \tfrac{1}{2} = \pm\tfrac{3}{2}$

$\therefore\ \sqrt{\text{ل}} = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{3}{2} = 2$ یا -1

$\therefore\ \text{ل} = 4$ یا 1

۱۷ $\sqrt{\text{ل}^5} + \sqrt{\text{ل}^3} = 6\sqrt{\text{ل}}$

طرفین کو $\sqrt{\text{ل}}$ پر تقسیم کیا

$\therefore\ \text{ل}^2 + \text{ل} = 6$

$\therefore\ \text{ل}^2 + \text{ل} + \tfrac{1}{4} = 6 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{25}{4}$

$\therefore\ \text{ل} + \tfrac{1}{2} = \pm\tfrac{5}{2}$

$\therefore\ \text{ل} = \pm\tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2} = 2$ یا -3

۱۸ $\dfrac{\text{ل}}{2} = 22\tfrac{1}{6} + \dfrac{\sqrt{\text{ل}}}{3}$

$\therefore\ \dfrac{\text{ل}}{2} - \dfrac{\sqrt{\text{ل}}}{3} = 22\tfrac{1}{6}$

$\therefore\ \text{ل} - \tfrac{2}{3}\sqrt{\text{ل}} = 44\tfrac{1}{3} = \tfrac{133}{3}$

$\therefore\ \text{ل} - \tfrac{2}{3}\sqrt{\text{ل}} + \tfrac{1}{9} = \tfrac{133}{3} + \tfrac{1}{9} = \tfrac{400}{9}$

$\therefore\ \sqrt{\text{ل}} - \tfrac{1}{3} = \pm\tfrac{20}{3}$

$\therefore\ \sqrt{\text{ل}} = \tfrac{1}{3} \pm \tfrac{20}{3} = 7$ یا $-\tfrac{19}{3}$

$\therefore\ \text{ل} = 49$ یا $\tfrac{361}{9}$

۱۹ $\dfrac{\dfrac{3\sqrt{\text{ل}}}{5} - 2}{\text{ل} - 5} - \dfrac{1}{20} = 0$

طرفین کو ۵ میں ضرب کیا

$\therefore\ \dfrac{3\sqrt{\text{ل}} - 10}{\text{ل} - 5} = \dfrac{1}{4}$

$\therefore\ 12\sqrt{\text{ل}} - 40 = \text{ل} - 5$

$\therefore\ \text{ل} - 12\sqrt{\text{ل}} = -35$

$\therefore\ \text{ل} - 12\sqrt{\text{ل}} + 36 = 36 - 35 = 1$

$\therefore\ \sqrt{\text{ل}} - 6 = \pm 1$

$\therefore \sqrt{\text{لا}} = ۶ \pm ۱ = ۷ \text{ یا } ۵$

$\therefore \text{لا} = ۴۹ \text{ یا } ۲۵$

۳۰ $\text{لا}^{\frac{۶}{۵}} + \text{لا}^{\frac{۳}{۵}} = ۷۵۶$

$\therefore \text{لا}^{\frac{۶}{۵}} + \text{لا}^{\frac{۳}{۵}} + \frac{۱}{۴} = ۷۵۶ + \frac{۱}{۴}$

$= \frac{۳۰۲۵}{۴}$

$\therefore \text{لا}^{\frac{۳}{۵}} + \frac{۱}{۲} = \pm \frac{۵۵}{۲}$

$\therefore \text{لا}^{\frac{۳}{۵}} = \pm \frac{۵۵}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۲۷ \text{ یا } -۲۸$

طرفین کا کعب لیا

$\therefore \text{لا}^{\frac{۱}{۵}} = ۳ \text{ یا } \sqrt[۳]{-۲۸}$

طرفین کا ۵ مرتبہ کا صعود لیا

$\therefore \text{لا} = ۲۴۳ \text{ یا } (-۲۸)^{\frac{۵}{۳}}$

۳۱ $\text{لا}^{۳} - \text{لا}^{\frac{۳}{۲}} = ۵۶$

$\therefore \text{لا}^{۳} - \text{لا}^{\frac{۳}{۲}} + \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۴} + ۵۶$

$= \frac{۲۲۵}{۴}$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore \text{لا}^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۱}{۲} = \pm \frac{۱۵}{۲}$

$\therefore \text{لا}^{\frac{۳}{۲}} = \pm \frac{۱۵}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۸ \text{ یا } -۷$

طرفین کا کعب لیا

$\therefore \text{لا}^{\frac{۱}{۲}} = ۲ \text{ یا } \sqrt[۳]{-۷}$

طرفین کا مجذور کیا

$\therefore \text{لا} = ۴ \text{ یا } \sqrt[\frac{۳}{۲}]{-۷}$

۳۲ $۳\,\text{لا}^{\frac{۵}{۳}} + \text{لا}^{\frac{۵}{۶}} = ۳۱۰۴$

$\therefore \text{لا}^{\frac{۵}{۳}} + \frac{۱}{۳}\text{لا}^{\frac{۵}{۶}} = \frac{۳۱۰۴}{۳}$

$\therefore \text{لا}^{\frac{۵}{۳}} + \frac{۱}{۳}\text{لا}^{\frac{۵}{۶}} + \frac{۱}{۳۶} = \frac{۱}{۳۶} + \frac{۳۱۰۴}{۳}$

$= \frac{۳۷۲۴۹}{۳۶}$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore \text{لا}^{\frac{۵}{۶}} + \frac{۱}{۶} = \pm \frac{۱۹۳}{۶}$

$\therefore \text{لا}^{\frac{۵}{۶}} = \pm \frac{۱۹۳}{۶} - \frac{۱}{۶} = ۳۲ \text{ یا } -\frac{۹۷}{۳}$

طرفین کا ۵ مرتبہ کا نزول لیا

$\therefore \text{لا}^{\frac{۱}{۶}} = ۲ \text{ یا } \left(-\frac{۹۷}{۳}\right)^{\frac{۱}{۵}}$

طرفین کا ۶ مرتبہ کا صعود لیا

$\therefore \text{لا} = ۶۴ \text{ یا } \left(-\frac{۹۷}{۳}\right)^{\frac{۶}{۵}}$

۳۳ $\text{ط}\,\text{لا}^{\frac{۳}{۲}} + \text{ص}\,\text{لا}^{\frac{۳}{۴}} = \text{س}$

$\therefore \text{لا}^{\frac{۳}{۲}} + \frac{\text{ص}}{\text{ط}}\text{لا}^{\frac{۳}{۴}} = \frac{\text{س}}{\text{ط}}$

طرفین پر $\frac{\text{ص}^{۲}}{۴\text{ط}^{۲}}$ کا مجذور زیادہ کیا

$\therefore \text{لا}^{\frac{۳}{۲}} + \frac{\text{ص}}{\text{ط}}\text{لا}^{\frac{۳}{۴}} + \frac{\text{ص}^{۲}}{۴\text{ط}^{۲}} = \frac{\text{س}}{\text{ط}} + \frac{\text{ص}^{۲}}{۴\text{ط}^{۲}}$

$= \frac{۴\text{ط}\text{س}}{۴\text{ط}^{۲}} + \frac{\text{ص}^{۲}}{۴\text{ط}^{۲}}$

$= \frac{\text{ص}^{۲} + ۴\text{ط}\text{س}}{۴\text{ط}^{۲}}$

$\therefore \text{لا}^{\frac{۳}{۴}} + \frac{\text{ص}}{۲\text{ط}} = \pm \frac{\sqrt{\text{ص}^{۲} + ۴\text{ط}\text{س}}}{۲\text{ط}}$

$\therefore \text{لا}^{\frac{۳}{۴}} = \pm \frac{\sqrt{\text{ص}^{۲} + ۴\text{ط}\text{س}} - \text{ص}}{۲\text{ط}}$

طرفین کا $\frac{۳}{۴}$ مرتبہ کا نزول لیا

$\therefore \text{لا} = \left(\frac{\pm\sqrt{\text{ص}^{۲} + ۴\text{ط}\text{س}} - \text{ص}}{۲\text{ط}}\right)^{\frac{۴}{۳}}$

۲۴ $۳ل^{\frac{۴}{۳}} - \frac{۵}{۲}ل^{\frac{۸}{۳}} = -۵۹۲$

طرفین کی علامتیں بدلیں

∴ $\frac{۵}{۲}ل^{\frac{۸}{۳}} - ۳ل^{\frac{۴}{۳}} = ۵۹۲$

طرفین کو $\frac{۵}{۲}$ پر تقسیم کیا

∴ $ل^{\frac{۸}{۳}} - \frac{۶}{۵}ل^{\frac{۴}{۳}} = \frac{۱۱۸۴}{۵}$

∴ $ل^{\frac{۸}{۳}} - \frac{۶}{۵}ل^{\frac{۴}{۳}} + \left(\frac{۳}{۵}\right)^{۲} = \left(\frac{۳}{۵}\right)^{۲} + \frac{۱۱۸۴}{۵}$

$= \frac{۹}{۲۵} + \frac{۵۹۲۰}{۲۵}$

$= \frac{۵۹۲۹}{۲۵}$

طرفین کا جذر لیا

∴ $ل^{\frac{۴}{۳}} - \frac{۳}{۵} = \pm\frac{۷۷}{۵}$

∴ $ل^{\frac{۴}{۳}} = \frac{۳}{۵} \pm \frac{۷۷}{۵} = ۱۶$ یا $-\frac{۷۴}{۵}$

طرفین کا $\frac{۳}{۴}$ مرتبہ کا نزول لیا

∴ $ل = (۱۶)^{\frac{۳}{۴}}$ یا $\left(-\frac{۷۴}{۵}\right)^{\frac{۳}{۴}}$

$= \left((۱۶)^{۳}\right)^{\frac{۱}{۴}}$

$= \left((۲\times۸)^{۳}\right)^{\frac{۱}{۴}}$

$= \left(۲^{۳}\times۸^{۳}\right)^{\frac{۱}{۴}}$

$= \left(۸\times۸^{۳}\right)^{\frac{۱}{۴}}$

$= \left(۸^{۴}\right)^{\frac{۱}{۴}}$

∴ $ل = ۸$ یا $\left(-\frac{۷۴}{۵}\right)^{\frac{۳}{۴}}$

۲۵ $ل + ۱ + \sqrt{ل+۱} = ۶$

∴ $ل + ۱ + \sqrt{ل+۱} + \frac{۱}{۴} = ۶ + \frac{۱}{۴} = \frac{۲۵}{۴}$

∴ $\sqrt{ل+۱} + \frac{۱}{۲} = \pm\frac{۵}{۲}$

∴ $\sqrt{ل+۱} = \pm\frac{۵}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۲$ یا -۳

∴ $ل + ۱ = ۴$ یا ۹ ∴ $ل = ۳$ یا ۸

۲۶ $\sqrt{۲ل+۱} + ۲\sqrt{ل} = \frac{۲۱}{\sqrt{۲ل+۱}}$

طرفین کو $\sqrt{۲ل+۱}$ میں ضرب کیا

∴ $۲ل + ۱ + ۲\sqrt{۲ل^{۲}+ل} = ۲۱$

∴ $۲\sqrt{۲ل^{۲}+ل} = ۲۰ - ۲ل$

∴ $\sqrt{۲ل^{۲}+ل} = ۱۰ - ل$

طرفین کا مجذور کیا

∴ $۲ل^{۲} + ل = ۱۰۰ - ۲۰ل + ل^{۲}$

∴ $ل^{۲} + ۲۱ل = ۱۰۰$

∴ $ل^{۲} + ۲۱ل + \left(\frac{۲۱}{۲}\right)^{۲} = \left(\frac{۲۱}{۲}\right)^{۲} + ۱۰۰$

$= \frac{۴۴۱}{۴} + ۱۰۰$

$= \frac{۸۴۱}{۴}$

∴ $ل + \frac{۲۱}{۲} = \pm\frac{۲۹}{۲}$

∴ $ل = -\frac{۲۱}{۲} \pm \frac{۲۹}{۲} = ۴$ یا -۲۵

۲۷ $۲\sqrt{ل-ط} + ۳\sqrt{۲ل} = \frac{۷ط+۵ل}{\sqrt{ل-ط}}$

کسر دور کی

∴ $۲(ل-ط) + ۳\sqrt{۲ل^{۲}-۲لط} = ۷ط + ۵ل$

∴ $۳\sqrt{۲ل^{۲}-۲لط} = ۹ط + ۳ل$

∴ $\sqrt{۲ل^{۲}-۲لط} = ۳ط + ل$

∴ $۲ل^{۲} - ۲لط = ۹ط^{۲} + ۶لط + ل^{۲}$

$\therefore\ \text{لا}^2 - 8\,\text{ط}\,\text{لا} = 9\,\text{ط}^2$

$\therefore\ \text{لا}^2 - 8\,\text{ط}\,\text{لا} + 16\,\text{ط}^2 = 9\,\text{ط}^2 + 16\,\text{ط}^2 = 25\,\text{ط}^2$

$\therefore\ \text{لا} - 4\,\text{ط} = \pm 5\,\text{ط}\ \therefore\ \text{لا} = 9\,\text{ط}\ \text{یا}\ -\text{ط}$

۲۸ $\sqrt{\text{لا}+60} + \sqrt{\text{لا}^2+9} = \dfrac{2\sqrt{\text{لا}^3+60\,\text{لا}^2+9\,\text{لا}+540} + 89}{\sqrt{\text{لا}+60}+\sqrt{\text{لا}^2+9}}$

کسر دور کی

$\therefore\ \text{لا}+60+\text{لا}^2+9+2\sqrt{\text{لا}^3+60\,\text{لا}^2+9\,\text{لا}+540}$

$= 2\sqrt{\text{لا}^3+60\,\text{لا}^2+9\,\text{لا}+540} + 89$

$\therefore\ \text{لا}^2 + \text{لا} = 20$

$\therefore\ \text{لا}^2 + \text{لا} + \frac{1}{4} = 20 + \frac{1}{4} = \frac{81}{4}$

$\therefore\ \text{لا} + \frac{1}{2} = \pm \frac{9}{2}$

$\therefore\ \text{لا} = \pm\frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4\ \text{یا}\ -5$

۲۹ $\dfrac{123+41\sqrt{\text{لا}}}{5\sqrt{\text{لا}} - \text{لا}} = \dfrac{20\sqrt{\text{لا}}+4\,\text{لا}}{3-\sqrt{\text{لا}}} - \dfrac{2\,\text{لا}^2}{(5\sqrt{\text{لا}}-\text{لا})(3-\sqrt{\text{لا}})}$

اس مساوات کو اسطرح لکھہ سکتی ہین

$\dfrac{41(3+\sqrt{\text{لا}})}{5\sqrt{\text{لا}}-\text{لا}} = \dfrac{4(5\sqrt{\text{لا}}+\text{لا})}{3-\sqrt{\text{لا}}} - \dfrac{2\,\text{لا}^2}{(5\sqrt{\text{لا}}-\text{لا})(3-\sqrt{\text{لا}})}$

طرفین مساوات کو $(5\sqrt{\text{لا}}-\text{لا})(3-\sqrt{\text{لا}})$ مین ضرب کیا

$\therefore\ 41(9-\text{لا}) = 4(25\,\text{لا}-\text{لا}^2) - 2\,\text{لا}^2$

یا $369 - 41\,\text{لا} = 100\,\text{لا} - 4\,\text{لا}^2 - 2\,\text{لا}^2$

$\therefore\ 6\,\text{لا}^2 - 141\,\text{لا} = -369$

طرفین کو ٦ پر تقسیم کیا

$\therefore\ \text{لا}^2 - \frac{47}{2}\text{لا} = -\frac{123}{2}$

$\therefore\ \text{لا}^2 - \frac{47}{2}\text{لا} + \left(\frac{47}{4}\right)^2 = \frac{2209}{16} - \frac{123}{2}$

$= \frac{1225}{16}$

$\therefore\ \text{لا} - \frac{47}{4} = \pm\frac{35}{4}$

$\therefore\ \text{لا} = \frac{47}{4} \pm \frac{35}{4} = \frac{41}{2}\ \text{یا}\ 3$

۳۰ $\dfrac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}}+\sqrt{\text{لا}-\text{ط}}} + \dfrac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}}-\sqrt{\text{لا}-\text{ط}}} = \dfrac{\text{ص}}{\sqrt{\text{لا}}}$

طرفین کو $(\sqrt{\text{لا}}+\sqrt{\text{لا}-\text{ط}})(\sqrt{\text{لا}}-\sqrt{\text{لا}-\text{ط}})$ مین ضرب کیا

$\therefore\ \text{لا}\left(\sqrt{\text{لا}}-\sqrt{\text{لا}-\text{ط}}+\sqrt{\text{لا}}+\sqrt{\text{لا}-\text{ط}}\right) = \dfrac{\text{ص}(2\,\text{لا}-\text{ط})}{\sqrt{\text{لا}}}$

یعنی $2\,\text{لا}\sqrt{\text{لا}} = \dfrac{\text{ص}(2\,\text{لا}-\text{ط})}{\sqrt{\text{لا}}}$ کسر دور کی

$\therefore\ 2\,\text{لا}^2 = 2\,\text{ص}\,\text{لا} - \text{ص}\,\text{ط}$

$\therefore\ 2\,\text{لا}^2 - 2\,\text{ص}\,\text{لا} = -\text{ص}\,\text{ط}$

$\therefore\ \text{لا}^2 - \text{ص}\,\text{لا} + \frac{\text{ص}^2}{4} = \frac{\text{ص}^2}{4} - \frac{\text{ص}\,\text{ط}}{2}$

$= \dfrac{\text{ص}^2 - 2\,\text{ص}\,\text{ط}}{4}$

$\therefore\ \text{لا} - \frac{\text{ص}}{2} = \dfrac{\sqrt{\text{ص}^2 - 2\,\text{ط}\,\text{ص}}}{2}$

$\therefore\ \text{لا} = \dfrac{\text{ص} + \sqrt{\text{ص}^2 - 2\,\text{ط}\,\text{ص}}}{2}$

۳۱ $\sqrt{\text{لا}} + \sqrt{\sqrt{\text{لا}} + 2} = 4$

اس مساوات کو اسطرح لکھہ سکتی ہین

$\sqrt{\text{لا}} + \sqrt{\sqrt{\text{لا}} + 2} = 6 - 2$

$\therefore\ \sqrt{\text{لا}} + 2 + \sqrt{\sqrt{\text{لا}} + 2} = 6$

طرفین پر $\frac{1}{2}$ کا مجذور زیادہ کیا

$\therefore\ \sqrt{\text{لا}} + 2 + \sqrt{\sqrt{\text{لا}} + 2} + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$

∴ √(√لا + ۲ + ۱/۴) = ± ۵/۲

∴ √(√لا + ۲) = ۲ یا − ۳

∴ √لا + ۲ = ۴ یا ۹

∴ √لا = ۲ یا ۷

∴ لا = ۴ یا ۴۹

۳۲ (لا + √(لا² − ۹)) / (لا − √(لا² − ۹)) = (لا − ۲)²

اس مساوات کی شمار کنندہ اور نسب نما کو لا + √(لا² − ۹) میں ضرب کیا

∴ (لا + √(لا² − ۹))² / ۹ = (لا − ۲)²

طرفین کا جذر لیا

∴ (لا + √(لا² − ۹)) / ۳ = لا − ۲

∴ لا + √(لا² − ۹) = ۳لا − ۶

∴ √(لا² − ۹) = ۲لا − ۶

∴ لا² − ۹ = ۴لا² − ۲۴لا + ۳۶

۳لا² − ۲۴لا = − ۴۵

∴ لا² − ۸لا = − ۱۵

∴ لا² − ۸لا + ۱۶ = ۱

∴ لا − ۴ = ± ۱

∴ لا = ۴ ± ۱ = ۵ یا ۳

۳۳ لا + ۵ = √(لا + ۵ + ۶)

∴ لا + ۵ − √(لا + ۵) = ۶

طرفین پر ۱/۴ کا مجذور زیادہ کیا

∴ لا + ۵ − √(لا + ۵) + ۱/۴ = ۲۵/۴

طرفین کا جذر لیا

∴ √(لا + ۵) − ۱/۲ = ± ۵/۲

∴ √(لا + ۵) = ۱/۲ ± ۵/۲ = ۳ یا − ۲

∴ لا + ۵ = ۹ یا ۴

∴ لا = ۴ یا − ۱

۳۵ لا + ۱۶ − ۷√(لا + ۱۶) = ۱۰ − ۴√(لا + ۱۶)

∴ لا + ۱۶ − ۳√(لا + ۱۶) = ۱۰

∴ لا + ۱۶ − ۳√(لا + ۱۶) + ۹/۴ = ۴۹/۴

طرفین کا جذر لیا

∴ √(لا + ۱۶) − ۳/۲ = ± ۷/۲

∴ √(لا + ۱۶) = ۳/۲ ± ۷/۲ = ۵ یا − ۲

∴ لا + ۱۶ = ۲۵ یا ۴

∴ لا = ۹ یا − ۱۲

۳۶ √(لا + ۱۲) + ⁴√(لا + ۱۲) = ۶

طرفین پر ۱/۴ مجذور زیادہ کیا

∴ √(لا + ۱۲) + ⁴√(لا + ۱۲) + ۱/۴ = ۲۵/۴

طرفین کا جذر لیا

∴ ⁴√(لا + ۱۲) + ۱/۲ = ± ۵/۲

∴ ⁴√(لا + ۱۲) = ± ۵/۲ − ۱/۲ = ۲ یا − ۳

∴ ل + ١٢ = ١٦ یا ٨١

∴ ل = ٤ یا ٦٩

٣٧ لٓ - ٢ل + ٦√(لٓ - ٢ل + ٥) = ١١

ظاہر ہی کہ اگر اس مساوات مین عدد ٥ طرفین پر زیادہ کیا جاوے تو یہہ مساوات درجہ دویم کی ہوسکتی ہی اسواسطے طرفین مساوات پر عدد ٥ کا زیادہ کیا

∴ (لٓ - ٢ل + ٥) + ٦√(لٓ - ٢ل + ٥) = ١٦ کیا

طرفین پر ٣ کا مجذور زیادہ کیا

∴ (لٓ - ٢ل + ٥) + ٦√(لٓ - ٢ل + ٥) + ٩ = ٢٥

∴ √(لٓ - ٢ل + ٥) + ٣ = ± ٥

∴ √(لٓ - ٢ل + ٥) = ± ٥ - ٣ = ٢ یا -٨

∴ لٓ - ٢ل + ٥ = ٤ یا ٦٤

∴ لٓ - ٢ل = -١ یا ٥٩

∴ لٓ - ٢ل + ١ = ٠ یا ٦٠

∴ ل - ١ = ٠ یا ± √٦٠

∴ ل = ١ یا ١ ± √٦٠

= ١ ± √(٤ × ١٥)

= ١ ± √(٢ٓ × ١٥)

= ١ ± ٢√١٥

٣٨ ٢لٓ + ٣ل - ٥√(٢لٓ + ٣ل + ٩) + ٣ = ٠

طرفین مساوات پر عدد ٦ کا زیادہ کیا

∴ (٢لٓ + ٣ل + ٩) - ٥√(٢لٓ + ٣ل + ٩) = ٦

∴ (٢لٓ + ٣ل + ٩) - ٥√(٢لٓ + ٣ل + ٩) + ٢٥/٤

∴ √(٢لٓ + ٣ل + ٩) - ٥/٢ = ± ٧/٢

∴ √(٢لٓ + ٣ل + ٩) = ٥/٢ ± ٧/٢ = ٦ یا -١

∴ ٢لٓ + ٣ل + ٩ = ٣٦ یا ١

∴ ٢لٓ + ٣ل = ٢٧ یا -٨

∴ لٓ + ٣/٢ ل = ٢٧/٢ یا -٤

∴ لٓ + ٣/٢ ل + ٩/١٦ = ٢٢٥/١٦ یا -٥٥/١٦

∴ ل + ٣/٤ = ± ١٥/٤ یا ± √(-٥٥/١٦)

∴ ل = ٣ یا -٩/٢ یا ± √(-٥٥/١٦) - ٣/٤

٣٩ (ل - (ل - ٢)ٓ)ٓ - (ل - ٢)ٓ = ٨٨ - (ل - ٢)

= ٩٠ - ل

∴ (ل - (ل - ٢)ٓ)ٓ - (ل - (ل - ٢)ٓ) = ٩٠

طرفین پر ١/٢ کا مجذور زیادہ کیا

∴ (ل - (ل - ٢)ٓ)ٓ - (ل - (ل - ٢)ٓ) + ١/٤ = ٣٦١/٤

طرفین کا جذر لیا

∴ (ل - ٢)ٓ - ل - ١/٢ = ± ١٩/٢

∴ (ل - ٢)ٓ - ل = ١/٢ ± ١٩/٢ = ١٠ یا -٩

طرفین پر عدد ٢ زیادہ کیا

∴ (ل - ٢)ٓ - (ل - ٢) = ١٢ یا -٧

طرفین پر ١/٢ کا مجذور زیادہ کیا

∴ (ل - ٢)ٓ - (ل - ٢) + ١/٤ = ٤٩/٤ یا -٢٧/٤

$\therefore (ل-۲)-\frac{۱}{۲} = \pm\frac{۷}{۲}$ یا $\pm\frac{\sqrt{-۲۷}}{۲}$

$\therefore ل = \frac{۵}{۲} \pm \frac{۷}{۲}$ یا $\frac{۵}{۲} \pm \frac{\sqrt{-۲۷}}{۲}$

$= ۶$ یا -۱ یا $\frac{۵ \pm \sqrt{-۲۷}}{۲}$

۴۰ $(ل+۶)^۲ + ۲\sqrt{ل}\,(ل+۶) = ۱۳۸ + \sqrt{ل}$

اس مساوات مین $۲\sqrt{ل}$ کی نصف کا مجذور طرفین پر زیادہ کرین تو اول طرف کامل مجذور ہو جاویگا

$\therefore (ل+۶)^۲ + ۲\sqrt{ل}\,(ل+۶) + ل = ل + ۱۳۸ + \sqrt{ل}$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore (ل+۶) + \sqrt{ل} = \pm\sqrt{ل + ۱۳۸ + \sqrt{ل}}$

$\therefore (ل+\sqrt{ل}) + ۶ = \pm\sqrt{۱۳۸ + ل + \sqrt{ل}}$

طرفین کا مجذور کیا

$\therefore (ل+\sqrt{ل})^۲ + ۱۲(ل+\sqrt{ل}) + ۳۶ = ۱۳۸ + ل + \sqrt{ل}$

$\therefore (ل+\sqrt{ل})^۲ + ۱۱(ل+\sqrt{ل}) = ۱۰۲$

$\therefore (ل+\sqrt{ل})^۲ + ۱۱(ل+\sqrt{ل}) + \frac{۱۲۱}{۴} = \frac{۱۲۱}{۴} + ۱۰۲ = \frac{۵۲۹}{۴}$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore ل + \sqrt{ل} + \frac{۱۱}{۲} = \pm\frac{۲۳}{۲}$

$\therefore ل + \sqrt{ل} = ۶$ یا -۱۷

طرفین پر $\frac{۱}{۲}$ کا مجذور زیادہ کیا

$\therefore ل + \sqrt{ل} + \frac{۱}{۴} = \frac{۲۵}{۴}$ یا $-\frac{۶۷}{۴}$

$\therefore \sqrt{ل} + \frac{۱}{۲} = \pm\frac{۵}{۲}$ یا $\pm\frac{\sqrt{-۶۷}}{۲}$

$\therefore \sqrt{ل} = ۲$ یا -۳ یا $\frac{-۱ \pm \sqrt{-۶۷}}{۲}$

$\therefore ل = ۴$ یا ۹ یا $\left(\frac{-۱ \pm \sqrt{-۶۷}}{۲}\right)^۲ = \frac{-۳۳ \mp \sqrt{-۶۷}}{۲}$

۴۱ $ل - ۱ = ۲ + \frac{۲}{\sqrt{ل}} = \frac{۲(\sqrt{ل}+۱)}{\sqrt{ل}}$

چونکہ $ل - ۱ = (\sqrt{ل}+۱)(\sqrt{ل}-۱)$

$\therefore (\sqrt{ل}+۱)(\sqrt{ل}-۱) = \frac{۲(\sqrt{ل}+۱)}{\sqrt{ل}}$

طرفین کو $\sqrt{ل}+۱$ پر تقسیم کیا

$\therefore \sqrt{ل} - ۱ = \frac{۲}{\sqrt{ل}}$

$\therefore ل - \sqrt{ل} = ۲$

$\therefore ل - \sqrt{ل} + \frac{۱}{۴} = \frac{۹}{۴}$

$\therefore \sqrt{ل} - \frac{۱}{۲} = \pm\frac{۳}{۲}$

$\therefore \sqrt{ل} = \frac{۱}{۲} \pm \frac{۳}{۲} = ۲$ یا -۱

$\therefore ل = ۴$ یا ۱

۴۲ $ل^۴ - ۲ل^۳ + ل = ۱۳۲$

اس مساوات کی اول طرف مین $ل^۲$ جمع بھی کیا اور تفریق بھی

$\therefore ل^۴ - ۲ل^۳ + ل^۲ - (ل^۲ - ل) = ۱۳۲$

یا $(ل^۲ - ل)^۲ - (ل^۲ - ل) = ۱۳۲$

طرفین پر $\frac{۱}{۲}$ کا مجذور زیادہ کیا

$\therefore (ل^۲ - ل)^۲ - (ل^۲ - ل) + \frac{۱}{۴} = \frac{۵۲۹}{۴}$

∴ (ل² − ل) − ½ = ± ۲۳/۲

∴ ل² − ل = ½ ± ۲۳/۲ = ۱۲ یا −۱۱

طرفین پر ¼ کا مجذور زیادہ کیا

∴ ل² − ل + ¼ = ۴۹/۴ یا −۴۳/۴

∴ ل − ½ = ± ۷/۲ یا ± √(−۴۳)/۲

∴ ل = ۴ یا −۳ یا (۱ ± √(−۴۳))/۲

۴۳ (ل² + ۲ل)(ل + ۴) = ۲ − (ل + ۴) = −(ل + ۲)

یعنے ل(ل + ۲)(ل + ۴) = −(ل + ۲)

طرفین کو ل + ۲ پر تقسیم کیا

∴ ل(ل + ۴) = −۱

یعنے ل² + ۴ل = −۱

∴ ل² + ۴ل + ۴ = ۳

∴ ل + ۲ = ± √۳

∴ ل = ± √۳ − ۲

۴۴ (ط − ل)/ل + ل/(ط − ل) = ص/س

طرفین کو (ط − ل)/ل میں ضرب کیا

∴ ((ط − ل)/ل)² + ۱ = ص/س ((ط − ل)/ل)

∴ ((ط − ل)/ل)² − ص/س ((ط − ل)/ل) = −۱

∴ ((ط − ل)/ل)² − ص/س ((ط − ل)/ل) + (ص/۲س)² = (ص/۲س)² − ۱

جذر لیا

∴ (ط − ل)/ل − ص/۲س = ± √(ص² − ۴س²)/۲س

∴ ط/ل − ۱ = ص/۲س ± √(ص² − ۴س²)/۲س = (ص ± √(ص² − ۴س²))/۲س

∴ ط/ل = (ص ± √(ص² − ۴س²) + ۲س)/۲س

∴ ل = ۲ط س/(ص ± √(ص² − ۴س²) + ۲س)

۴۵ ل = (۱۲ + ۸√ل)/(ل − ۵)

∴ ل² − ۵ل = ۱۲ + ۸√ل

طرفین پر ل زیادہ کیا

∴ ل² − ۴ل = ۱۲ + ۸√ل + ل

۲ کا مجذور طرفین پر زیادہ کیا

∴ ل² − ۴ل + ۴ = ۱۶ + ۸√ل + ل

طرفین کا جذر لیا

∴ ل − ۲ = ۴ + √ل

∴ ل − √ل = ۶

∴ ل − √ل + ¼ = ۲۵/۴

∴ √ل − ½ = ± ۵/۲

∴ √ل = ½ ± ۵/۲ = ۳ یا −۲

∴ ل = ۹ یا ۴

۴۶ ۴۹ل²/۴ + ۴۸/ل² − ۴۹ = ۹ + ۶/ل

ظاہر ہے کہ اگر طرفین پر ۱/ل² زیادہ کیا جاوے تو طرفین مجذور کامل ہو جاویں

∴ ۴۹لا²/۴ − ۴۹ + ۴۹/لا² = ۹ + ۶/لا + ۱/لا²

طرفین کا جذر لیا

∴ ۷لا/۲ − ۷/لا = ۳ + ۱/لا

طرفین کو ۲لا مین ضرب کیا

∴ ۷لا² − ۱۴ = ۶لا + ۲

∴ ۷لا² − ۶لا = ۱۶

∴ لا² − ۶/۷ لا = ۱۶/۷

∴ لا² − ۶/۷ لا + (۳/۷)² = ۹/۴۹ + ۱۶/۷ = ۱۲۱/۴۹

∴ لا − ۳/۷ = ± ۱۱/۷ ∴ لا = ۲ یا − ۸/۷

۷۴ لا⁴/۲ + ۷لا³/۴ − ۱۷لا = ۸

طرفین کو ۲ مین ضرب کیا

∴ لا⁴ + ۷لا³/۲ − ۳۴لا = ۱۶

∴ لا⁴ + ۷لا³/۲ = ۳۴لا + ۱۶

طرفین پر ۷لا/۴ کا مجذور زیادہ کیا

∴ لا⁴ + ۷لا³/۲ + (۷لا/۴)² = (۷لا/۴)² + ۳۴لا + ۱۶

طرفین کا جذر لیا

∴ لا² + ۷لا/۴ = ± (۷لا/۴ + ۴)

اگر لا² + ۷لا/۴ = ۷لا/۴ + ۴

تو لا = ± ۲

اور اگر لا² + ۷لا/۴ = − ۷لا/۴ − ۴

تو لا² + ۷لا/۲ = − ۴

∴ لا² + ۷لا/۲ + (۷/۴)² = ۲۸۹/۱۶ − ۴

طرفین کا جذر لیا = ۲۲۵/۱۶

∴ لا + ۷/۴ = ± ۱۵/۴

∴ لا = − ۱/۲ یا − ۸

۷۸ ۲۷لا² − ۸۴۱/۳لا² + ۱۷/۳ = ۲۳۲/۳لا − ۱/۳لا² + ۵

طرفین کو ۳ مین ضرب کیا

∴ ۸۱لا² − ۸۴۱/لا² + ۱۷ = ۲۳۲/لا − ۱/لا² + ۱۵

∴ ۸۱لا² + ۱۷ + ۱/لا² = ۸۴۱/لا² + ۲۳۲/لا + ۱۵

ظاہر ہی کہ اگر عدد ۱ کا طرفین پر زیادہ کیا جاوے تو طرفین مجذور ہو جاوین

∴ ۸۱لا² + ۱۸ + ۱/لا² = ۸۴۱/لا² + ۲۳۲/لا + ۱۶

طرفین کا جذر لیا

∴ ۹لا + ۱/لا = ± (۲۹/لا + ۴)

پس اگر ۹لا + ۱/لا = ۲۹/لا + ۴

تو ۹لا² + ۱ = ۲۹ + ۴لا

∴ ۹لا² − ۴لا = ۲۸

∴ لا² − ۴/۹ لا = ۲۸/۹

∴ لا² − ۴/۹ لا + (۲/۹)² = ۴/۸۱ + ۲۸/۹ = ۲۵۶/۸۱

∴ لا − ۲/۹ = ± ۱۶/۹

∴ لا = ۲ یا − ۱۴/۹

اور اگر ۹لا + ۱/لا = − ۲۹/لا − ۴

تو ۹لا² + ۱ = − ۲۹ − ۴لا

∴ ۹لا² + ۴لا = − ۳۰

مجذور پورا کیا

∴ ۹لا² + ۴لا + ۴/۹ = ۴/۹ − ۳۰ = − ۲۶۶/۹

طرفین کا جذر لیا

∴ $٣\,\text{لا} + \frac{٢}{٣} = \pm\frac{\sqrt{-٢٦٦}}{٣}$

∴ $\text{لا} = \frac{\pm\sqrt{-٢٦٦}-٢}{٩}$

٢٩ $\left(\text{لا}^٢ - \frac{\text{ط}^٢}{\text{لا}^٢}\right)^{\frac{١}{٢}} + \left(\text{ط}^٢ - \frac{\text{ط}^٢}{\text{لا}^٢}\right)^{\frac{١}{٢}} = \frac{\text{لا}^٢}{\text{ط}}$

∴ $\left(\text{لا}^٢ - \frac{\text{ط}^٢}{\text{لا}^٢}\right)^{\frac{١}{٢}} = \frac{\text{لا}^٢}{\text{ط}} - \left(\text{ط}^٢ - \frac{\text{ط}^٢}{\text{لا}^٢}\right)^{\frac{١}{٢}}$

طرفین کا مجذور کیا

∴ $\text{لا}^٢ - \frac{\text{ط}^٢}{\text{لا}^٢} = \frac{\text{لا}^٤}{\text{ط}^٢} - \frac{٢\text{لا}^٢}{\text{ط}}\left(\text{ط}^٢ - \frac{\text{ط}^٢}{\text{لا}^٢}\right)^{\frac{١}{٢}} + \text{ط}^٢ - \frac{\text{ط}^٢}{\text{لا}^٢}$

∴ $\text{لا}^٢ - \frac{٢\text{لا}^٢}{\text{ط}}\left(\text{لا}^٢ - \frac{\text{ط}^٢}{\text{لا}^٢}\right)^{\frac{١}{٢}} + \frac{\text{لا}^٤}{\text{ط}^٢} - \text{ط}^٢ = ٠$

یا $\text{لا}^٢ - \frac{٢\text{لا}}{\text{ط}}\left(\text{لا}^٤ - \text{ط}^٤\right)^{\frac{١}{٢}} + \frac{\text{لا}^٤ - \text{ط}^٤}{\text{ط}^٢} = ٠$

جذر لیا

∴ $\text{لا} - \frac{\sqrt{\text{لا}^٤ - \text{ط}^٤}}{\text{ط}} = ٠$

∴ $\text{لا} = \frac{\sqrt{\text{لا}^٤ - \text{ط}^٤}}{\text{ط}}$

∴ $\text{لا}^٢ = \frac{\text{لا}^٤ - \text{ط}^٤}{\text{ط}^٢}$

∴ $\text{لا}^٢\text{ط}^٢ = \text{لا}^٤ - \text{ط}^٤$

∴ $\text{لا}^٤ - \text{ط}^٢\text{لا}^٢ = \text{ط}^٤$

∴ $\text{لا}^٤ - \text{ط}^٢\text{لا}^٢ + \frac{\text{ط}^٤}{٤} = \frac{٥\text{ط}^٤}{٤}$

جذر لیا

∴ $\text{لا}^٢ - \frac{\text{ط}^٢}{٢} = \pm\frac{\sqrt{٥}\,\text{ط}^٢}{٢}$

∴ $\text{لا}^٢ = \frac{\text{ط}^٢}{٢} \pm \frac{\sqrt{٥}\,\text{ط}^٢}{٢} = \frac{(١\pm\sqrt{٥})\,\text{ط}^٢}{٢}$

∴ $\text{لا} = \pm\,\text{ط}\sqrt{\frac{١\pm\sqrt{٥}}{٢}}$

یہان سے دو مجہول کی مرکب مساواتین حل کیجاتی ہین

١ $\text{لا} - \text{ی} = ١٥ \ldots\ldots (١)$

$\frac{\text{لا}\,\text{ی}}{٢} = \text{ی}^٣ \ldots\ldots (٢)$

مساوات (٢) کو ی پر تقسیم کیا تو $\text{لا} = ٢\text{ی}^٢$

اور یہہ قیمت لا کی مساوات (١) مین لکہی

تو $٢\text{ی}^٢ - \text{ی} = ١٥$

∴ $\text{ی}^٢ - \frac{١}{٢}\text{ی} = \frac{١٥}{٢}$

طرفین پر $\frac{١}{٤}$ کا مجذور زیادہ کیا

∴ $\text{ی}^٢ - \frac{١}{٢}\text{ی} + \frac{١}{١٦} = \frac{١٢١}{١٦}$

∴ $\text{ی} - \frac{١}{٤} = \pm\frac{١١}{٤}$

∴ $\text{ی} = \frac{١}{٤} \pm \frac{١١}{٤} = ٣$ یا $-\frac{٥}{٢}$

اور $\text{لا} = ٢\text{ی}^٢ = ١٨$ یا $\frac{٢٥}{٢}$

٢ $\frac{١٠\text{لا} + \text{ی}}{\text{لا}\,\text{ی}} = ٣ \ldots\ldots (١)$

$٩\text{ی} - ٩\text{لا} = ١٨ \ldots\ldots (٢)$

مساوات (٢) کو ٩ پر تقسیم کیا

∴ $\text{ی} - \text{لا} = ٢$

∴ $\text{ی} = \text{لا} + ٢ \ldots\ldots (٣)$

اور مساوات (١) سے یہہ حاصل ہوتا ہی

$١٠\text{لا} + \text{ی} = ٣\text{لا}\,\text{ی}$

اسمین قیمت ی کی جو مساوات (٣) سی حاصل ہوئی لکہی

∴ $١٠\text{لا} + \text{لا} + ٢ = ٣\text{لا}^٢ + ٦\text{لا}$

∴ $٣\text{لا}^٢ - ٥\text{لا} = ٢$

∴ $\text{لا}^٢ - \frac{٥}{٣}\text{لا} = \frac{٢}{٣}$

∴ لا² − ۵/۳ لا + (۵/۶)² = ۲/۳ + ۲۵/۳۶ = ۴۹/۳۶

∴ لا − ۵/۶ = ± ۷/۶

∴ لا = ۵/۶ ± ۷/۶ = ۲ یا −۱/۳

اور مساوات (۳) سے ی = لا + ۲ = ۴ یا ۵/۳

۳ (لا + ی) : لا − ی :: ۱۳ : ۵ ......(۱)

اور ی² + لا = ۲۵ ....(۲)

تناسب (۱) سے یہہ حاصل ہوتا ہے

۵ (لا + ی) = ۱۳ (لا − ی)

∴ (لا + ی)/(لا − ی) = ۱۳/۵ ......(۳)

طرفین پر عدد آکا زیادہ کیا

∴ (لا + ی + لا − ی)/(لا − ی) = (۱۳ + ۵)/۵

یا ۲لا/(لا − ی) = ۱۸/۵ ......(۴)

اور پہر مساوات (۳) کے طرفین سے عدد آکا تفریق کیا

∴ ۲ی/(لا − ی) = ۸/۵ ......(۵)

مساوات (۴) کو مساوات (۵) پر تقسیم کیا

∴ لا/ی = ۱۸/۸ = ۹/۴

∴ لا = ۹ی/۴ یہہ قیمت لا کی مساوات (۲) مین لکھی

تو ی² + ۹ی/۴ = ۲۵

∴ ی² + ۹ی/۴ + (۹/۸)² = ۲۵ + ۸۱/۶۴ = ۱۶۸۱/۶۴

∴ ی + ۹/۸ = ± ۴۱/۸

∴ ی = ± ۴۱/۸ − ۹/۸ = ۴ یا −۲۵/۴

اور لا = ۹ی/۴ = ۹ یا −۲۲۵/۱۶

۴ ۴ لا ی = ۹۶ − لا² ی² ......(۱)

لا + ی = ۶ ....(۲)

مساوات (۱) سے یہہ مساوات مرکب درجہ دویم کی حاصل ہوتی ہے

لا² ی² + ۴ لا ی = ۹۶

∴ لا² ی² + ۴ لا ی + ۴ = ۱۰۰

∴ لا ی + ۲ = ± ۱۰

∴ لا ی = ۸ یا −۱۲

∴ ۴ لا ی = ۳۲ یا −۴۸

مساوات (۲) کا مجذور کیا

∴ لا² + ۲ لا ی + ی² = ۳۶

۴ لا ی = ۳۲ یا −۴۸

∴ لا² − ۲ لا ی + ی² = ۴ یا ۸۴ تفریق کی

∴ لا − ی = ± ۲ یا ± √۸۴

اور لا + ی = ۶

جمع کیا

∴ ۲لا = ۸ یا ۴ یا ۶ ± √۸۴

∴ لا = ۴ یا ۲ یا ۳ ± √(۴×۲۱)/۲

= ± ۲√۲۱/۲

= ± √۲۱

اور تفریق کرنی سے ۲ی = ۴ یا ۸ یا ۶ ∓ √۸۴

∴ ی = ۲ یا ۴ یا ۳ ∓ √۲۱

۵ $\text{لا}^{ن} + \text{ی}^{ن} = ۲\text{ط}^{ن}$ .... (۱)

$\text{لا ی} = \text{س}^{۲}$ .... (۲)

مساوات (۲) سے $\text{ی} = \frac{\text{س}^{۲}}{\text{لا}}$ (۱) مین لکھے

∴ $\text{ی}^{ن} = \frac{\text{س}^{۲ن}}{\text{لا}^{ن}}$ یہہ قیمت $\text{ی}^{ن}$ کی مساوات

∴ $\text{لا}^{ن} + \frac{\text{س}^{۲ن}}{\text{لا}^{ن}} = ۲\text{ط}^{ن}$ کسر دور کی

∴ $\text{لا}^{۲ن} + \text{س}^{۲ن} = ۲\text{ط}^{ن}\,\text{لا}^{ن}$

∴ $\text{لا}^{۲ن} - ۲\text{ط}^{ن}\,\text{لا}^{ن} = -\text{س}^{۲ن}$

طرفین پر $\text{ط}^{ن}$ کا مجذور زیادہ کیا

∴ $\text{لا}^{۲ن} - ۲\text{ط}^{ن}\,\text{لا}^{ن} + \text{ط}^{۲ن} = \text{ط}^{۲ن} - \text{س}^{۲ن}$

جذر لیا

∴ $\text{لا}^{ن} - \text{ط}^{ن} = \pm\sqrt{\text{ط}^{۲ن} - \text{س}^{۲ن}}$

∴ $\text{لا}^{ن} = \text{ط}^{ن} \pm\sqrt{\text{ط}^{۲ن} - \text{س}^{۲ن}}$

∴ $\text{لا} = \left(\text{ط}^{ن} \pm\sqrt{\text{ط}^{۲ن} - \text{س}^{۲ن}}\right)^{\frac{۱}{ن}}$

اور $\text{ی} = \frac{\text{س}^{۲}}{\text{لا}} = \frac{\text{س}^{۲}}{\left(\text{ط}^{ن} \pm\sqrt{\text{ط}^{۲ن} - \text{س}^{۲ن}}\right)^{\frac{۱}{ن}}}$

۶ $\text{لا}^{۲} + \text{لا} + \text{ی} = ۱۸ - \text{ی}^{۲}$ ...... (۱)

$\text{لا ی} = ۶$ .... (۲)

مساوات (۱) سے $\text{لا}^{۲} + \text{ی}^{۲} + \text{لا} + \text{ی} = ۱۸$

مساوات (۲) سے $۲\,\text{لا ی} = ۱۲$

جمع کیا ∴ $\text{لا}^{۲} + ۲\,\text{لا ی} + \text{ی}^{۲} + \text{لا} + \text{ی} = ۳۰$

یعنے $(\text{لا}+\text{ی})^{۲} + (\text{لا}+\text{ی}) = ۳۰$

∴ $(\text{لا}+\text{ی})^{۲} + (\text{لا}+\text{ی}) + \frac{۱}{۴} = ۳۰ + \frac{۱}{۴} = \frac{۱۲۱}{۴}$

∴ $\text{لا} + \text{ی} + \frac{۱}{۲} = \pm\frac{۱۱}{۲}$

∴ $\text{لا} + \text{ی} = ۵$ یا -۶

یہہ قیمت $\text{لا} + \text{ی}$ کی مساوات (۱) مین لکھی

∴ $\text{لا}^{۲} + \text{ی}^{۲} = ۱۳$ یا ۲۴

مساوات (۲) سے $۲\,\text{لا ی} = ۱۲$

تفریق کی ∴ $\text{لا}^{۲} - ۲\,\text{لا ی} + \text{ی}^{۲} = ۱$ یا ۱۲

طرفین کا جذر لیا ∴ $\text{لا} - \text{ی} = \pm ۱$ یا $\pm\sqrt{۱۲}$

$\text{لا} + \text{ی} = ۵$ یا -۶

جمع کیا $۲\,\text{لا} = ۶$ یا ۴ یا $-۶ \pm \sqrt{۴\times۳}$

∴ $\text{لا} = ۳$ یا ۲ یا $-۳ \pm \sqrt{۳}$

اور تفریق سے $۲\,\text{ی} = ۴$ یا ۶ یا $-۶ \mp \sqrt{۴\times۳}$

∴ $\text{ی} = ۲$ یا ۳ یا $-۳ \mp \sqrt{۳}$

۷ $\text{لا}^{۲} + ۲\,\text{لا ی} + \text{ی}^{۲} + ۲\,\text{لا} = ۱۲۰ - ۲\,\text{ی}$ .... (۱)

$\text{لا ی} - \text{ی}^{۲} = ۸$ .... (۲)

مساوات (۱) سے $(\text{لا}+\text{ی})^{۲} + ۲(\text{لا}+\text{ی}) = ۱۲۰$

∴ $(\text{لا}+\text{ی})^{۲} + ۲(\text{لا}+\text{ی}) + ۱ = ۱۲۱$

∴ $(\text{لا}+\text{ی}) + ۱ = \pm ۱۱$

∴ $\text{لا} + \text{ی} = ۱۰$ یا -۱۲ .... (ط)

مساوات (۲) سے $\text{لا} - \text{ی} = \frac{۸}{\text{ی}}$

∴ $۲\,\text{لا} = \frac{۸}{\text{ی}} + ۱۰$ یا $\frac{۸}{\text{ی}} - ۱۲$

∴ لا = ۴/ی + ۵ یا ۴/ی − ۶

∴ لای = ۴ + ۵ی یا ۴ − ۶ی

مساوات (۲) سے لای = ی² + ۸

∴ ی² + ۸ = ۴ + ۵ی یا ۴ − ۶ی حاصل ہوتے ہیں

صورت اول یعنی ی² + ۸ = ۴ + ۵ی سے اسطرح قیمت ی کی

ی² − ۵ی = −۴

∴ ی² − ۵ی + ۲۵/۴ = ۲۵/۴ − ۴ = ۹/۴

∴ ی − ۵/۲ = ± ۳/۲

∴ ی = ۵/۲ ± ۳/۲ = ۴ یا ۱ دریافت ہوتی ہے

صورت دوسری یعنی ی² + ۸ = ۴ − ۶ی سے اسطرح قیمت ی کی

ی² + ۶ی = −۴

∴ ی² + ۶ی + ۹ = ۵

∴ ی + ۳ = ± √۵

∴ ی = ± √۵ − ۳

اور لا = ۴/ی + ۵ = ۴/۱ + ۵ یا ۴/۴ + ۵ = ۹ یا ۶

اور بوسیلہ مساوات (ط) لا = −ی − ۱۲ = −۹ ∓ √۵

۸. لا − ۲√(لای) + ی − √لا + √ی = ۰ ...... (۱)

√لا + √ی = ۵ ...... (۲)

مساوات (۱) میں ۱/۲ کا مجذور طرفین پر زیادہ کیا

∴ لا − ۲√(لای) + ی − (√لا − √ی) + ۱/۴ = ۱/۴

جذر لیا ∴ √لا − √ی − ۱/۲ = ± ۱/۲

√لا − √ی = ۱ یا ۰

(۲) سے √لا + √ی = ۵

جمع کیا ۲√لا = ۶ یا ۵

∴ √لا = ۳ یا ۵/۲

∴ لا = ۹ یا ۲۵/۴

اور تفریق کرنی سے ۲√ی = ۴ یا ۵

∴ √ی = ۲ یا ۵/۲

اور ی = ۴ یا ۲۵/۴

۹. لا²/ی² + ۴لا/ی = ۸۵/۹ ...... (۱)

لا − ی = ۲ ...... (۲)

مساوات (۱) میں مجذور پورا کیا یعنی ۲ کا مجذور طرفین پر زیادہ کیا

∴ لا²/ی² + ۴لا/ی + ۴ = ۸۵/۹ + ۴ = ۱۲۱/۹

∴ لا/ی + ۲ = ± ۱۱/۳

∴ لا/ی = ± ۱۱/۳ − ۲ = ۵/۳ یا −۱۷/۳

∴ لا = ۵ی/۳ یا −۱۷ی/۳

مساوات (۲) سے لا = ی + ۲

∴ ی + ۲ = ۵ی/۳ یا −۱۷ی/۳

∴ ۳ی + ۶ = ۵ی یا −۱۷ی

∴ ۲ی = ۶

اور ی = ۳

یا $۲۰ی = -۶$

$\therefore ی = -\frac{۳}{۱۰}$

اور $ل = ی + ۲ = ۵$ یا $۱\frac{۷}{۱۰}$

۱۰ $\sqrt{\frac{۳ل}{ل+ی}} + \sqrt{\frac{ل+ی}{۳ل}} = ۲ \ldots (۱)$

$لی - (ل+ی) = ۵۴ \ldots\ldots (۲)$

مساوات (۱) کو $\sqrt{۳ل}\sqrt{ل+ی}$ مین ضرب کیا تو یہہ حاصل ہوا

$۳ل + ل + ی = ۲\sqrt{۳ل}\sqrt{ل+ی}$

$\therefore ۳ل - ۲\sqrt{۳ل}\sqrt{ل+ی} + ل + ی = ۰$

طرفین کا جذر لیا $\therefore \sqrt{۳ل} - \sqrt{ل+ی} = ۰$

$\therefore \sqrt{۳ل} = \sqrt{ل+ی}$

طرفین کا مجذور کیا $\therefore ۳ل = ل + ی$

$\therefore ۲ل = ی$ یہہ قیمت ی کی مساوات (۲) مین لکھی

$\therefore ۲ل^۲ - (ل + ۲ل) = ۵۴$

$\therefore ۲ل^۲ - ۳ل = ۵۴$

$\therefore ل^۲ - \frac{۳}{۲}ل = ۲۷$

$\therefore ل^۲ - \frac{۳}{۲}ل + \frac{۹}{۱۶} = \frac{۹}{۱۶} + ۲۷ = \frac{۴۴۱}{۱۶}$

$\therefore ل - \frac{۳}{۴} = \pm\frac{۲۱}{۴}$

$\therefore ل = \frac{۳}{۴} \pm \frac{۲۱}{۴} = ۶$ یا $-\frac{۹}{۲}$

اور $ی = ۲ل = ۱۲$ یا -۹

۱۱ $لی + لی^۲ = ۱۲ \ldots\ldots (۱)$

$ل + لی^۳ = ۱۸ \ldots\ldots (۲)$

مساوات (۱) سے $ل = \frac{۱۲}{ی(۱+ی)}$

مساوات (۲) سے $ل = \frac{۱۸}{ی^۳+۱}$

$\therefore \frac{۱۲}{ی(۱+ی)} = \frac{۱۸}{ی^۳+۱} = \frac{۳ \times ۶}{(۱+ی)(ی^۲-ی+۱)}$

طرفین کا اختصار کیا $\therefore \frac{۲}{ی} = \frac{۳}{ی^۲-ی+۱}$

$\therefore ۲ی^۲ - ۲ی + ۲ = ۳ی$

$\therefore ۲ی^۲ - ۵ی = -۲$

$\therefore ی^۲ - \frac{۵}{۲}ی = -۱$

$\therefore ی^۲ - \frac{۵}{۲}ی + \frac{۲۵}{۱۶} = \frac{۲۵}{۱۶} - ۱ = \frac{۹}{۱۶}$

$\therefore ی - \frac{۵}{۴} = \pm\frac{۳}{۴}$

$\therefore ی = \frac{۵}{۴} \pm \frac{۳}{۴} = ۲$ یا $\frac{۱}{۲}$

اور $ل = \frac{۱۲}{ی+ی^۲} = ۲$ یا ۱۶

۱۲ $ل - ل^{\frac{۱}{۲}} = ۳ - ی \ldots\ldots (۱)$

$۴ - ل = ی - ی^{\frac{۱}{۲}} \ldots\ldots (۲)$

دونو کو جمع کیا $\therefore ۴ - ل^{\frac{۱}{۲}} = ۳ - ی^{\frac{۱}{۲}}$

$\therefore ی^{\frac{۱}{۲}} = ل^{\frac{۱}{۲}} - ۱$

$\therefore ی = (ل^{\frac{۱}{۲}} - ۱)^۲$ یہہ قیمت ی کی مساوات (۱) مین لکھی

$\therefore ل - ل^{\frac{۱}{۲}} = ۳ - (ل^{\frac{۱}{۲}} - ۱)^۲ = ۳ - ل + ۲ل^{\frac{۱}{۲}} - ۱$

$\therefore ۲ل - ۳ل^{\frac{۱}{۲}} = ۲$

$\therefore ل - \frac{۳}{۲}ل^{\frac{۱}{۲}} = ۱$

$\therefore ل - \frac{۳}{۲}ل^{\frac{۱}{۲}} + \left(\frac{۳}{۴}\right)^۲ = ۱ + \frac{۹}{۱۶} = \frac{۲۵}{۱۶}$

$\therefore$ لا$^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{4} = \pm \frac{5}{4}$

$\therefore$ لا$^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \pm \frac{5}{4} = 2$ یا $-\frac{1}{2}$

$\therefore$ لا $= 4$ یا $\frac{1}{4}$

اور ی $= ($لا$^{\frac{1}{2}} - 1)^2 = 1$ یا $\frac{9}{4}$

۱۳ لا$^{\frac{2}{3}}$ ی$^{\frac{2}{3}} = 2$ ی^2 ......(۱)

8 لا$^{\frac{1}{3}} -$ ی$^{\frac{1}{3}} = 14$ ......(۲)

مساوات (۱) سے لا$^{\frac{2}{3}} = \frac{2ی^2}{ی^{\frac{2}{3}}} = 2$ ی$^{\frac{4}{3}}$

$\therefore$ لا$^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}}$ ی$^{\frac{2}{3}}$

یہہ قیمت ی$^{\frac{1}{3}}$ کی مساوات (۲) مین لکھی

$\therefore 8$ لا$^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}$ لا$^{\frac{2}{3}} = 14$

کسر دور کی $\therefore 16$ لا$^{\frac{1}{3}} -$ لا$^{\frac{2}{3}} = 28$

علامتین طرفین کی بدلین $\therefore$ لا$^{\frac{2}{3}} - 16$ لا$^{\frac{1}{3}} = -28$

مجذور پورا کیا $\therefore$ لا$^{\frac{2}{3}} - 16$ لا$^{\frac{1}{3}} + 64 = 64 - 28 = 36$

جذر لیا $\therefore$ لا$^{\frac{1}{3}} - 8 = \pm 6$

$\therefore$ لا$^{\frac{1}{3}} = 8 \pm 6 = 14$ یا 2

مکعب کیا $\therefore$ لا $= (14)^3$ یا 8

اور ی$^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}$ لا$^{\frac{2}{3}} = 98$ یا 2

$\therefore$ ی $= (98)^{\frac{3}{2}}$ یا $2^{\frac{3}{2}}$

۱۴ لا$^{\frac{2}{3}} +$ ی$^{\frac{2}{3}} = 3$ لا ......(۱)

لا$^{\frac{1}{2}} +$ ی$^{\frac{1}{2}} =$ لا ....(۲)

مساوات (۲) کا مجذور کیا لا $+ 2$ لا$^{\frac{1}{2}}$ ی$^{\frac{1}{2}} +$ ی $=$ لا^2

اور مساوات (۱) سے لا$^{\frac{2}{3}} +$ ی$^{\frac{2}{3}} = 3$ لا

تفریق کی $\therefore$ لا $-$ لا$^{\frac{2}{3}} + 2$ لا$^{\frac{1}{2}}$ ی$^{\frac{1}{2}} -$ ی$^{\frac{2}{3}} =$ لا$^2 - 3$ لا

اور مساوات (۲) سے ی$^{\frac{1}{2}} =$ لا $-$ لا$^{\frac{1}{2}}$ یہہ قیمت ی$^{\frac{1}{2}}$ کی حاصل تفریق مین لکھی

$\therefore$ لا $-$ لا$^{\frac{2}{3}} + 2$ لا$^{\frac{3}{2}} - 2$ لا $=$ لا$^2 - 3$ لا

$\therefore$ لا $-$ لا$^{\frac{1}{2}} = 2$ لا

طرفین کو لا پر تقسیم کیا $\therefore$ لا $-$ لا$^{\frac{1}{2}} = 2$

$\therefore$ لا $-$ لا$^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

$\therefore$ لا$^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \pm \frac{3}{2}$

$\therefore$ لا$^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = 2$ یا -1

$\therefore$ لا $= 4$ یا 1

اور ی$^{\frac{1}{2}} =$ لا $-$ لا$^{\frac{1}{2}} = 2$

$\therefore$ ی $= 8$

۱۵ لا $+$ لا$^{\frac{1}{2}} = \frac{2 + ی + ی^2}{لا^{\frac{1}{2}}} + 4$ .....(۱)

لا ی $+$ ی $=$ ی$^2 + 4$ ی ....(۲)

مساوات (۱) سے لا$^{\frac{3}{2}} +$ لا $- 4$ لا$^{\frac{1}{2}} =$ ی$^2 +$ ی $+ 2$ ......(۳)

مساوات (۲) سے لا $=$ ی $+ 3$ یہہ قیمت لا کی مساوات (۳) مین لکھی

$\therefore$ لا$^{\frac{3}{2}} +$ ی $+ 3 - 4$ لا$^{\frac{1}{2}} =$ ی$^2 +$ ی $+ 2$

$\therefore$ لا$^{\frac{3}{2}} - 4$ لا$^{\frac{1}{2}} =$ ی$^2 - 1$

یا لا$^{\frac{1}{2}}$ (لا $- 4$) $=$ (ی $- 1$)(ی $+ 1$) ......(۴)

اور چونکہ لا = ی + ۳ ∴ لا − ۴ = ی − ۱ ......(۵)

مساوات (۴) کو مساوات (۵) پر تقسیم کیا

∴ لا^(۱/۲) = ی + ۱

∴ لا = ی² + ۲ی + ۱

اور مساوات (۲) سے لا = ی + ۳

∴ ی² + ۲ی + ۱ = ی + ۳

∴ ی² + ی = ۲

∴ ی² + ی + ۱/۴ = ۹/۴

∴ ی + ۱/۲ = ± ۳/۲

∴ ی = ± ۳/۲ − ۱/۲ = ۱ یا −۲

اور لا^(۱/۲) = ی + ۱ = ۲ یا −۱

∴ لا = ۴ یا ۱

۱۶ | لا²/ی² + ی²/لا² + لا/ی = ۶ ۳/۴ − ی/لا ......(۱)

اور لا − ی = ۲ ......(۲)

مساوات (۱) سے لا²/ی² + ی²/لا² + لا/ی + ی/لا = ۲۷/۴

طرفین پر عدد ۲ کا زیادہ کیا

∴ لا²/ی² + ۲ + ی²/لا² + لا/ی + ی/لا = ۳۵/۴

یعنے (لا/ی + ی/لا)² + (لا/ی + ی/لا) = ۳۵/۴

مجذور پورا کیا (لا/ی + ی/لا)² + (لا/ی + ی/لا) + ۱/۴ = ۳۶/۴

جذر لیا ∴ لا/ی + ی/لا + ۱/۲ = ± ۶/۲

∴ لا/ی + ی/لا = ۵/۲ یا −۷/۲

کسر دور کی ∴ لا² + ی² = ۵لای/۲ یا −۷لای/۲

دوسری مساوات کی مجذور سے لا² + ی² = ۲لای + ۴

∴ ۲لای + ۴ = ۵لای/۲ یا −۷لای/۲

∴ ۴لای + ۸ = ۵لای یا −۷لای

∴ لای = ۸ یا −۸/۱۱ ......(۳)

(۲) مساوات کی مجذور سے لا² − ۲لای + ی² = ۴

(۳) مساوات سے ۴لای = ۳۲ یا −۳۲/۱۱

جمع کرنے سے لا² + ۲لای + ی² = ۳۶ یا ۱۲/۱۱

جذر لیا ∴ لا + ی = ± ۶ یا ± √(۱۲/۱۱) = ± √(۳×۴/۱۱)

اور مساوات (۲) سے لا − ی = ۲ ± ۲√(۳/۱۱)

جمع کیا ∴ ۲لا = ۸ یا −۴ یا ۲ ± ۲√(۳/۱۱)

∴ لا = ۴ یا −۲ یا ۱ ± √(۳/۱۱)

اور تفریق کرنے سے ۲ی = ۴ یا −۸ یا −۲ ± ۲√(۳/۱۱)

∴ ی = ۲ یا −۴ یا −۱ ± √(۳/۱۱)

۱۷ | √ی ± √لا ∴ √ی − √لا ∴ √لا + ۲ :

اور √(ی + ۲)/√لا − ۱ = (۳√لا + ۱ + √(ی/لا))/√ی ......(۲)

جب چار مقدار متناسب ہوتے ہیں تو اول اور دوسری حد کے مجموعہ کو اول اور دوسری حد کے حاصل تفریق کی ساتھ وہ نسبت ہوتی ہے جو تیسری اور چوتھی مقدار کی مجموعہ کو تیسری اور چوتھی کی حاصل تفریق سے ہے اور ثبوت اسکا بعد مساواتوں کے

ہوگا پس موافق بیان بالا کی تناسب (۱) سے یہہ تناسب حاصل ہوتا ہی

۲√ی : ۲√لا :: √لا + ۳ : ۳√لا + ۱

یا √ی : √لا :: √لا + ۳ : ۳√لا + ۱

∴ √لای + √ی = لا + ۳√لا ... (۳)

مساوات (۲) سے ی + √ی - √لای = ۳لا + √لا + √لای

∴ ی + √ی - √لای = ۳لا + √لا

اور (۳) مساوات سی √ی + √لای = لا + ۳√لا

جمع کیا ∴ ی + ۲√ی = ۴لا + ۴√لا

مجذور اکائی زیادہ کیا ∴ ی + ۲√ی + ۱ = ۴لا + ۴√لا + ۱

جذر لیا ∴ √ی + ۱ = ± (۲√لا + ۱)

پس اگر مثبت قیمت لیں تو یہہ حاصل ہوتا ہی

√ی + ۱ = ۲√لا + ۱

∴ √ی = ۲√لا یہہ قیمت √ی کی مساوات (۳) میں لکھی

∴ لا + ۳√لا = ۲√لا + ۲لا

∴ لا = √لا

∴ √لا = ۱

∴ لا = ۱

اور √ی = ۲√لا = ۲

∴ ی = ۴

۱۸ ی + √ی/لا = ۴۲/لا ..... (۱)

لا²/۳ + لا/۲√ی = ۵۴/ی ..... (۲)

مساوات (۲) یعنی مجذور پورا کیا یعنی ۱/۲√لا کا مجذور طرفین پر زیادہ کیا

∴ ی + √ی/لا + ۱/۴لا = ۴۲/لا + ۱/۴لا = ۱۶۹/۴لا

جذر لیا ∴ √ی + ۱/۲√لا = ± ۱۳/۲√لا

∴ √ی = ۶/√لا یا - ۷/√لا ... (۳)

∴ ی = ۳۶/لا یا ۴۹/لا ... (۴)

مساوات (۲) سے لا² + ۳لا/۲√ی = ۱۶۲/ی

مجذور پورا کیا یعنی ۳/۴√ی کا مجذور طرفین پر زیادہ کیا

∴ لا² + ۳لا/۲√ی + ۹/۱۶ی = ۹/۱۶ی + ۱۶۲/ی = ۲۶۰۱/۱۶ی

جذر لیا ∴ لا + ۳/۴√ی = ± ۵۱/۴√ی

∴ لا = ۱۲/√ی یا - ۲۷/۲√ی

لیکن مساوات (۳) سے √ی = ۶/√لا یا - ۷/√لا

∴ لا = ۲√لا یا - ۱۲√لا/۷ یا ۹√لا/۴ یا ۲۷√لا/۱۴

∴ √لا = ۲ یا - ۱۲/۷ یا ۹/۴ یا ۲۷/۱۴

∴ لا = ۴ یا ۱۴۴/۴۹ یا ۸۱/۱۶ یا ۷۲۹/۱۹۶

اور ی = ۳۶/لا یا ۴۹/لا مساوات (۴) سے

∴ ی = ۹ یا ۴۹/۴ یا ۵۷۶/۸۱ یا ۱۹۶×۴۹/۷۲۹

۱۹ ل۲/ی۲ + ل۲+ی / ما ی = ل+۲ی / ی − ۲۰ .... (۱)

ل + ۸ = ۴ ی .... (۲)

مساوات (۱) سے ل۲/ی۲ + ل۲ / ما ی + ما ی = ل/ی − ی − ۲۰

∴ ل۲/ی۲ + ل۲/ما ی + ی + ل/ی + ما ی = ۲۰

یا (ل/ی + ما ی)۲ + (ل/ی + ما ی) = ۲۰

مجذور پورا کیا ∴ (ل/ی + ما ی)۲ + (ل/ی + ما ی) + ۱/۴ = ۸۱/۴

جذر لیا ∴ ل/ی + ما ی + ۱/۲ = ± ۹/۲

∴ ل/ی + ما ی = ۴ یا −۵

∴ ل + ی۳/۲ = ۴ ی یا −۵ ی

لیکن مساوات (۲) سے ل + ۸ = ۴ ی

مثبت قیمت سے تفریق کی ∴ ی۳/۲ − ۸ = ۰

∴ ی۳/۲ = ۸

کعب لیا ∴ ی۱/۲ = ۲

∴ ی = ۴

اور ل = ۴ی − ۸ = ۱۶ − ۸ = ۸

اب اگر منفی قیمت لیں یعنی ل + ی۳/۲ = −۵ ی

اور تفریق کریں تو ل + ۸ = ۴ ی

ی۳/۲ − ۸ = −۹ ی

یا ی۳/۲ − ۸ = ۹ ی

∴ ی۳/۲ + ی = ۸ ی − ۸

یا ۸ (ی − ۱) = ی (ی۱/۲ + ۱)

∴ ۸ (ی۱/۲ − ۱) (ی۱/۲ + ۱) = ی (ی۱/۲ + ۱)

∴ ۸ (ی۱/۲ − ۱) = ی

یا ۸ ی۱/۲ − ۸ = ی

∴ ی + ۸ ی۱/۲ = ۸

∴ ی + ۸ ی۱/۲ + ۱۶ = ۲۴

∴ ما ی + ۴ = ± ما ۶×۴

= ± ۲ ما ۶

∴ ما ی = ± ۲ ما ۶ − ۴

ی = ۴۰ ∓ ۱۶ ما ۶

اور ل = ۴ ی − ۸ = ۱۵۲ ∓ ۶۴ ما ۶

۲۰ ل/ی − ۸ ما (ل − ۹ ی۲) = ۹ ی − ۱۶ ل ی ...(۱)

اور ل ۵ = ۴ + ۲۵ ی۲ ......(۲)

مساوات (۱) سے ل − ۸ ل۱/۲ ی ما (ل − ۹ ی۲) = ۹ ی۲ − ۱۶ ل ی۲

∴ (ل − ۹ ی۲) − ۸ ل۱/۲ ی ما (ل − ۹ ی۲) + ۱۶ ل ی۲ = ۰

جذر لیا ∴ ما (ل − ۹ ی۲) − ۴ ی ل۱/۲ = ۰

∴ ما (ل − ۹ ی۲) = ۴ ی ل۱/۲

مجذور کیا ∴ ل − ۹ ی۲ = ۱۶ ل ی۲

∴ ل = ی۲ (۹ + ۱۶ ل)

∴ ی۲ = ل / (۹ + ۱۶ ل)

لیکن (۲) مساوات سے ی² = (۵لا − ۴)/۲۵

∴ لا/(۱۲لا + ۹) = (۵لا − ۴)/۲۵

کسر دور کی ∴ ۸۰لا² − ۱۵لا − ۴۸لا − ۳۶ = ۲۵لا

∴ ۸۰لا² − ۴۴لا = ۳۶

∴ لا² − ۲۲/۴۰ لا = ۱۸/۴۰

∴ لا² − ۲۲/۴۰ لا + (۱۱/۴۰)² = ۱۲۱/۱۶۰۰ + ۱۸/۴۰ = ۸۴۱/۱۶۰۰

∴ لا − ۱۱/۴۰ = ± ۲۹/۴۰

∴ لا = ۱۱/۴۰ ± ۲۹/۴۰ = ۱ یا − ۹/۲۰

اور ی² = (۵لا − ۴)/۲۵ = ۱/۲۵ یا − ۱/۴

∴ ی = ± ۱/۵ یا (± √(−۵/۴) = ± ۱/۲ √−۵)

۲۱۔ ۱۶لا − ی = ۲ی^½ لا^½ ..... (۱)

لا^½/ی − ۱۲/لا^½ = لا/√ی ..... (۲)

مساوات (۱) سے ۱۶لا = ی + ۲لا^½ ی^½

طرفین پر ۳لا^½ کا مجذور زیادہ کیا

∴ ۲۵لا = ی + ۲لا^½ ی^½ + ۹لا

∴ ± ۵√لا = ی^½ + ۳لا^½

∴ ی^½ = ۲لا^½ یا − ۸لا^½

∴ ی = ۴لا یا ۶۴لا ..... (۳)

اور مساوات (۲) سے لا²/ی − لا/√ی = ۱۲/لا²

مجذور پورا کیا یعنے ۱/۲لا کا مجذور طرفین پر زیادہ کیا

∴ لا²/ی − لا/(۲√ی) + ۱/(۱۶لا) = ۱/(۱۶لا) + ۱۲/لا = ۴۹/(۱۶لا)

جذر لیا ∴ لا²/√ی − ۱/(۴لا) = ± ۷/(۴لا)

∴ لا²/√ی = ± ۷/(۴لا) + ۱/(۴لا) = ۲/لا یا − ۳/(۲لا)

∴ لا³/√ی = ۲ یا − ۳ ..... (۴)

اور مساوات (۳) سے √ی = ۲لا یا ۸لا

یہہ قیمت √ی کی مساوات (۴) میں لکھی

∴ لا²/۲ یا لا²/۸ = ۲ یا − ۳

جذر لیا ∴ لا/√۲ یا لا/√۸ = ± ۲ یا ± √−۳

∴ لا = ± ۲ یا ± ۴ یا ± √−۶ یا ± ۲√−۶

اور ی = ۱۶ یا (۲۵۶) یا − ۲۴ یا − ۳(۴۸)

۲۲۔ ی² − ۸لا^½ ی = ۶۴ ..... (۱)

ی − ۲لا^½ ی^½ = ۴ ..... (۲)

مساوات (۱) سے ی² − ۸لا^½ ی = ۶۴

مجذور پورا کیا یعنے ۴لا^½ کا مجذور طرفین پر زیادہ کیا

∴ ی² − ۸لا^½ ی + ۱۶لا = ۱۶لا + ۶۴

= ۱۶(لا + ۴)

جذر لیا ∴ ی − ۴√لا = ± ۴√(لا + ۴)

∴ ی = ۴√لا ± ۴√(لا + ۴) ..... (۳)

مساوات (۲) سے ی − ۲لا^½ ی^½ = ۴

طرفین پر لا^½ کا مجذور زیادہ کیا

∴ ی − ۲لا^½ ی^½ + لا = ۴ + لا

جذر لیا ∴ √د − √ل = ± √(۴ل + ل)

طرفین کو ۴ میں ضرب کیا

∴ ۴√د − ۴√ل = ± ۴√(ل + ۴)

∴ ۴√د = ۴√ل ± ۴√(ل + ۴)

∴ بوسیلہ اس مساوات کے اور (۳) مساوات کے

د = ۴√د

∴ √د = ۴

∴ د = ۱۶

اور مساوات (۲) سے ۱/ل = (د − ۴)/(۲√د) = ۱۲/۸ = ۳/۲

∴ ل = ۹/۴

۲۳ ل − ۳ = (۳ + ۴√ل)/ل

طرفین پر ۱ + ۱/ل زیادہ کیا

∴ ل − ۲ + ۱/ل = (۴ + ۴√ل + ل)/ل

یعنی (√ل − ۱/√ل)² = ((۲ + √ل)/ل)²

طرفین کا جذر لیا ∴ √ل − ۱/√ل = (۲ + √ل)/√ل

∴ (ل − ۱)/√ل = (۲ + √ل)/√ل

∴ ل − ۱ = ۲ + √ل

∴ ل − √ل = ۳

∴ ل − √ل + ۱/۴ = ۱۳/۴

جذر لیا √ل − ۱/۲ = ± √۱۳/۲

∴ √ل = (۱ ± √۱۳)/۲

∴ ل = (۱ ± √۱۳)²/۴ = (۷ ± √۱۳)/۲

۲۴ ل² + ۱/ل² + ل + ۱/ل = ۴

عدد ۲ کا طرفین پر زیادہ کیا

∴ ل² + ۲ + ۱/ل² + ل + ۱/ل = ۶

یعنی (ل + ۱/ل)² + (ل + ۱/ل) = ۶

∴ (ل + ۱/ل)² + (ل + ۱/ل) + ۱/۴ = ۲۵/۴

∴ ل + ۱/ل + ۱/۲ = ± ۵/۲

∴ ل + ۱/ل = ۲ یا −۳

∴ ل² + ۱ = ۲ل یا −۳ل

پس اگر ل² + ۱ = ۲ل

تو ل² − ۲ل = −۱

∴ ل² − ۲ل + ۱ = ۰

∴ ل − ۱ = ۰

∴ ل = ۱

اور اگر ل² + ۱ = −۳ل

تو ل² + ۳ل = −۱

∴ ل² + ۳ل + ۹/۴ = ۹/۴ − ۱ = ۵/۴

∴ ل + ۳/۲ = ± √۵/۲

∴ ل = (−۳ ± √۵)/۲

۲۵ ۲ل² − ل − ۲ل √(۱ − ل²) = ۱ ۱/۲

∴ ٢لا^٢ − لا − ١/٢ = ٢لا √(١ − لا^٢) + ١

∴ لا^٢ − لا − ١/٢ = ٢لا √(١ − لا^٢) + ١ − لا^٢

یا ١ − لا^٢ + ٢لا √(١ − لا^٢) = لا^٢ − لا − ١/٢ اور کم بھی کیا

اس مساوات کی دوسری طرف عدد آ زیادہ بہی کیا

∴ ١ − لا^٢ + ٢لا √(١ − لا^٢) = لا^٢ − لا − ١/٢ + ١ − ١

= لا^٢ − ١ − لا − ١/٢ + ١

= −(١ − لا^٢) − لا + ١/٢

∴ ٢(١ − لا^٢) + ٢لا √(١ − لا^٢) = −لا + ١/٢

∴ (١ − لا^٢) + لا √(١ − لا^٢) = −لا/٢ + ١/٤

مجذور پورا کیا یعنی لا/٢ کا مجذور طرفین پر زیادہ کیا

∴ (١ − لا^٢) + لا √(١ − لا^٢) + لا^٢/٤ = لا^٢/٤ − لا/٢ + ١/٤

جذر لیا ∴ √(١ − لا^٢) + لا/٢ = لا/٢ − ١/٢

∴ √(١ − لا^٢) = −١/٢

∴ ١ − لا^٢ = ١/٤

∴ لا^٢ = ٣/٤

∴ لا = ± √٣/٢

٢٦ لا + ٧ لا^(١/٣) = ٢٢

طرفین مساوات سے ١١ لا^(١/٣) تفریق کے

∴ لا + ٧ لا^(١/٣) − ١١ لا^(١/٣) = ٢٢ − ١١ لا^(١/٣)

∴ لا − ٤ لا^(١/٣) = ١١(٢ − لا^(١/٣))

= −١١(لا^(١/٣) − ٢)

∴ لا − ٤ لا^(١/٣) = −١١(لا^(١/٣) − ٢)

یا (لا^(٢/٣) + ٢ لا^(١/٣))(لا^(١/٣) − ٢) = −١١(لا^(١/٣) − ٢)

∴ لا^(٢/٣) + ٢ لا^(١/٣) = −١١

لا^(٢/٣) + ٢ لا^(١/٣) + ١ = −١٠

∴ لا^(١/٣) + ١ = ± √−١٠

∴ لا = (−١ ± √−١٠)^٣

اور موافق خواص مساوات کی لا^(١/٣) − ٢ = ٠

∴ لا^(١/٣) = ٢

∴ لا = ٨

٢٧ لا^٢ + لا ی = ١٢ ......(١)

لا ی − ٢ ی^٢ = ١ ......(٢)

فرض کیا کہ ی ر = لا

∴ لا^٢ + لا ی = ی^٢ ر^٢ + ی^٢ ر = ١٢ ...(٣)

اور لا ی − ٢ ی^٢ = ی^٢ ر − ٢ ی^٢ = ١ ...(٤)

مساوات (٣) سے ی^٢ (ر^٢ + ر) = ١٢

∴ ی^٢ = ١٢/(ر^٢ + ر)

مساوات (٤) سے ی^٢ = ١/(ر − ٢)

∴ ١/(ر − ٢) = ١٢/(ر^٢ + ر)

∴ ر^٢ + ر = ١٢ر − ٢٤

∴ ر^٢ − ١١ر = −٢٤

∴ ر^٢ − ١١ر + ١٢١/٤ = ١٢١/٤ − ٢٤ = ٢٥/٤

∴ ر − ۱۱/۲ = ± ۵/۲

∴ ر = ۱۱/۲ ± ۵/۲ = ۸ یا ۳

اور د^۲ = ۱/(ر−۲) = ۱/۲ یا ۱

∴ د = ± ۱/√۲ یا ± ۱

اور لا = د ر = ± ۸/√۲ یا ± ۳

۲۸ لا + د = ۴ .... (۱)

(لا^۲ + د^۲)(لا^۳ + د^۳) = ۲۸۰ ... (۲)

فرض کیا کہ لا = س + ر

اور د = س − ر

∴ لا + د = ۲ س = ۴

∴ س = ۲

اور لا^۲ + د^۲ = (۲ + ر)^۲ + (۲ − ر)^۲ = ۸ + ۲ ر^۲

اور لا^۳ + د^۳ = (۲ + ر)^۳ + (۲ − ر)^۳ = ۱۶ + ۱۲ ر^۲

∴ (لا^۲ + د^۲)(لا^۳ + د^۳) = (۸ + ۲ ر^۲)(۱۶ + ۱۲ ر^۲) = ۲۸۰

یا ۸ (۴ + ر^۲)(۴ + ۳ ر^۲) = ۲۸۰

∴ (۴ + ر^۲)(۴ + ۳ ر^۲) = ۳۵

یا ۱۶ + ۱۶ ر^۲ + ۳ ر^۴ = ۳۵

∴ ر^۴ + ۱۶/۳ ر^۲ = ۱۹/۳

∴ ر^۴ + ۱۶/۳ ر^۲ + (۸/۳)^۲ = ۶۴/۹ + ۱۹/۳ = ۱۲۱/۹

∴ ر^۲ + ۸/۳ = ± ۱۱/۳

∴ ر^۲ = ± ۱۱/۳ − ۸/۳ = ۱ یا − ۱۹/۳

∴ ر = ± ۱ یا ± √(−۱۹/۳)

اور لا = س + ر = ۳

اور د = س − ر = ۱

واضح ہو کہ مساوات درجہ دویم مین خاص ترکیبین اکثر کام اتی ہین اور ان ترکیبون مین خواص مساوات سی بہت مدد ہوتی ہی اسواسطی یہان چند ہی مثالین حل کی گئی ہین تا کہ طریقہ خاص ترکیبونکا کچھہ معلوم ہوجاوے اس جبر و مقابلہ کے آخر مین ایک ضمیمہ مساوات کا ہوگا جسمین بہت سی مساوات خاص ترکیبون سے حل کیجائینگی جاننا چاہئے کہ مقادیر نزولی کے اعمال بہی مساوات حل کرنے مین مدد ہوتی ہین اسواسطی مقادیر نزولی کا بیان ایک فصل مین اچھی طرح لکھا جاویگا یہان تہوڑی سی مثالین لکھی جاتی ہین تا کہ طالب علم کو کچھہ واقفیت ہوجاوے

مثالین مقادیر نزولی کے

۱ ثابت کرو کہ ∛۱۰۸ = ۳ ∛۴

جواب ظاہر ہی کہ ∛۱۰۸ = ∛(۴ × ۲۷) = ∛(۳^۳ × ۴) = ۳ ∛۴

۲ ثابت کرو کہ ∛۲۴۳ = ۳ ∛۹

ظاہر ہی کہ ∛۲۴۳ = ∛(۹ × ۲۷) = ۳ ∛۹

۳ √۵۸۸ = √(۱۲ × ۴۹) = ۷ √۱۲

۴ √۸ + √۳۲ = √۲۰۰ = ۱۰ √۲ اسواسطی کہ

$\sqrt{٣٢} = \sqrt{٢ \times ١٦} = ٤\sqrt{٢}$ اور

$\sqrt{٢٠٠} = \sqrt{٢ \times ١٠٠} = ١٠\sqrt{٢}$

پس $\sqrt{٣٢} + \sqrt{٢٠٠} = ٤\sqrt{٢} + ١٠\sqrt{٢} = ١٤\sqrt{٢}$

٥ $\frac{٢}{٣}\sqrt{\frac{١}{٨}} \times \frac{٣}{٤}\sqrt{\frac{٧}{١٠}} = \frac{١}{٤٠}\sqrt{٣٥}$

اسواسطی کہ $\frac{٢}{٣}\sqrt{\frac{١}{٨}} \times \frac{٣}{٤}\sqrt{\frac{٧}{١٠}} = \frac{١}{٢}\sqrt{\frac{٧}{٨٠}} =$

$\frac{١}{٢}\sqrt{\frac{٥ \times ٧}{٥ \times ٨٠}} = \frac{١}{٢}\sqrt{\frac{٣٥}{٤٠٠}} = \frac{١}{٢}\sqrt{\frac{٣٥}{(٢٠)^٢}}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢٠}\sqrt{٣٥} = \frac{١}{٤٠}\sqrt{٣٥}$

٦ $\frac{٨\sqrt{١٠٨}}{٢\sqrt{٦}} = ١٢\sqrt{٢}$

اسواسطی کہ $\frac{٨\sqrt{١٠٨}}{٢\sqrt{٦}} = \frac{٤\sqrt{١٠٨}}{\sqrt{٦}} = ٤ \times \sqrt{\frac{١٠٨}{٦}}$

$= ٤\sqrt{١٨} = ٤\sqrt{٩ \times ٢} = ٤ \times ٣\sqrt{٢} = ١٢\sqrt{٢}$

٧ ثابت کرو کہ جذر $١٠^٣$ کا $= ١٠\sqrt{١٠}$

ظاہر ہی کہ جذر $١٠^٣$ کا $= \sqrt{١٠^٣} = \sqrt{١٠ \times ١٠٠} = ١٠\sqrt{١٠}$

٨ $\frac{٢٠}{\sqrt{٨}} = ٥\sqrt{٢}$

اسواسطی کہ $\frac{٢٠}{\sqrt{٨}} = \frac{١٠ \times ٢}{\sqrt{٢ \times ٤}} = \frac{١٠ \times ٢}{٢\sqrt{٢}} = \frac{١٠}{\sqrt{٢}} = \frac{٥ \times ٢}{\sqrt{٢}}$

$= \frac{٥ \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = ٥\sqrt{٢}$

٩ $\frac{\sqrt{٤٠}}{\sqrt{٢٠}} = \sqrt{٢}$

اسواسطی کہ $\frac{\sqrt{٤٠}}{\sqrt{٢٠}} = \frac{\sqrt{١٠ \times ٤}}{\sqrt{٥ \times ٤}} = \frac{٢\sqrt{٢ \times ٥}}{٢\sqrt{٥}} = \frac{\sqrt{٢ \times ٥}}{\sqrt{٥}} = \sqrt{٢}$

١٠ $\frac{\sqrt{٥٤}}{٦} = \sqrt{\frac{٣}{٢}}$

اسواسطی کہ $\frac{\sqrt{٥٤}}{٦} = \frac{\sqrt{٢ \times ٢٧}}{٦} = \frac{\sqrt{٢ \times ٣ \times ٩}}{٦}$

$= \frac{٣\sqrt{٢ \times ٣}}{٢ \times ٣} = \frac{\sqrt{٢ \times ٣}}{٢} = \frac{\sqrt{٢ \times ٣}}{\sqrt{٢ \times ٢}} = \sqrt{\frac{٣}{٢}}$

١١ $\frac{٣}{\sqrt{١٨}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

اسواسطی کہ $\frac{٣}{\sqrt{١٨}} = \sqrt{\frac{٩}{١٨}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

یہاں سے مشق کی واسطے بغیر حل کی ہوئی مساواتین درجہ دویم کی لکھے جاتے ہیں

١ $\text{لا}^٢ + ٤\text{لا} = ١٤٠$ — جواب $\text{لا} = ١٠$ یا -١٤

٢ $\text{لا}^٢ - ٦\text{لا} + ٨ = ٨٠$ — $\text{لا} = ١٢$ یا -٦

٣ $\text{لا}^٢ - ١٠\text{لا} + ١٧ = ١$ — $\text{لا} = ٨$ یا ٢

٤ $\text{لا}^٢ - \text{لا} - ٤٠ = ١٧٠$ — $\text{لا} = ١٥$ یا -١٤

٥ $٣\text{لا}^٢ - ٩\text{لا} - ٤ = ٨٠$ — $\text{لا} = ٧$ یا -٤

٦ $٧\text{لا}^٢ - ٢١\text{لا} + ١٣ = ٢٩٣$ — $\text{لا} = ٨$ یا -٥

٧ $\frac{\text{لا}^٢}{٣} + \frac{٤\text{لا}}{٥} - ١٩ = ١٥\frac{١}{٥}$ — $\text{لا} = ٩$ یا $-\frac{٥٧}{٥}$

٨ $\frac{٢\text{لا}^٢}{٣} + ٣\frac{١}{٢} = \frac{\text{لا}}{٢} + ٨$ — $\text{لا} = ٣$ یا $-\frac{٩}{٤}$

٩ $\text{لا} + ٤ + \frac{٧\text{لا} - ٨}{\text{لا}} = ١٣$ — $\text{لا} = ٤$ یا -٢

١٠ $٤\text{لا} - \frac{٣٦ - \text{لا}}{\text{لا}} = ٤٦$ — $\text{لا} = ١٢$ یا $-\frac{٣}{٤}$

١١ $١٦ - \frac{٥ - \text{لا}}{٢} = \frac{٩ + ٣\text{لا}}{\text{لا}} + ٣\text{لا}$ — $\text{لا} = ٣$ یا $\frac{٦}{٥}$

١٢ $\frac{\text{لا} + ٣}{٢} + \frac{١٦ - ٢\text{لا}}{٢\text{لا} - ٥} = ٥\frac{١}{٥}$ — $\text{لا} = ٥$ یا $\frac{٦٩}{١٠}$

١٣ $١٤ + ٤\text{لا} - \frac{\text{لا} + ٧}{\text{لا} - ٧} = ٣\text{لا} + \frac{٩ + ٤\text{لا}}{٣}$

$\text{لا} = ٩$ یا ٢٨

۱۴ $\frac{ل+4}{3} - \frac{7-ل}{ل-3} = \frac{4ل+7}{9} - 1$

$ل = 21$ یا 5

۱۵ $\frac{15-ل}{4} - \frac{12-3ل}{4ل-5} = 7ل - \frac{23ل+60}{7}$

$ل = 3$ یا $\frac{225}{148}$

۱۶ $\frac{ل+11}{ل} + \frac{9+4ل}{ل^2} = 7$ $\quad ل = 3$ یا $-\frac{1}{2}$

۱۷ $\frac{2ل+9}{9} + \frac{4ل-3}{4ل+3} = 3 + \frac{3ل-16}{18}$

$ل = 6$ یا $-\frac{19}{4}$

۱۸ $\frac{ل}{ل+60} = \frac{7}{3ل-5}$ $\quad ل = 14$ یا -10

۱۹ $\frac{3ل-7}{ل} + \frac{4ل-10}{ل+5} = 3\frac{1}{2}$ $\quad ل = 7$ یا $-\frac{10}{7}$

۲۰ $\frac{ل+2}{ل-1} - \frac{4-ل}{2ل} = 2\frac{1}{3}$ $\quad ل = 3$ یا $-\frac{4}{5}$

۲۱ $\frac{8ل}{ل+2} - 6 = \frac{20}{3ل}$ $\quad ل = 10$ یا $-\frac{2}{3}$

۲۲ $\frac{40}{ل-5} + \frac{27}{ل} = 13$ $\quad ل = 9$ یا $\frac{15}{13}$

۲۳ $\frac{5ل-12}{9} + \frac{3ل-24}{4ل-12} = 9 - \frac{7ل-34}{15}$

$ل = 12$ یا $\frac{477}{184}$

۲۴ $\frac{2ل}{ل-4} + \frac{2ل-5}{ل-3} = 8\frac{1}{3}$ $\quad ل = 6$ یا $\frac{40}{13}$

۲۵ $\frac{2ل+3}{10-ل} = 6\frac{1}{2} - \frac{2ل}{25-3ل}$

$ل = 8$ یا $13\frac{22}{31}$

۲۶ $\frac{4ل-5}{ل} - \frac{3ل-7}{3ل+7} = \frac{9ل+23}{13ل}$

$ل = 2$ یا $-\frac{154}{45}$

۲۷ $2ل+18 - \frac{8ل^2+16}{4ل+7} = 27 - \frac{12ل-11}{2ل-3}$

$ل = 8$ یا 5

۲۸ $\frac{ل}{ل+9} + \frac{5}{2ل+18} = \frac{ل - \frac{ل^2+20}{ل+8}}{2}$

$ل = 4$ یا $-\frac{55}{6}$

۲۹ $\frac{ل+4}{ل+6} + \frac{5}{2ل+4} = \frac{3ل+7}{3ل+4}$

$ل = 8$ یا $-\frac{2}{3}$

۳۰ $\frac{4}{2ل+3} + \frac{3ل+6}{5ل+18} = \frac{3ل+5}{5ل}$

$ل = 6$ یا $-\frac{45}{2}$

۳۱ $\frac{8}{9+5ل} + \frac{8ل-17}{2+4ل} = \frac{4ل+3}{2ل+12}$

$ل = 3$ یا $-\frac{283}{132}$

۳۲ $\frac{12}{5-ل} + \frac{8}{4-ل} = \frac{32}{ل+2}$

$ل = 2$ یا $\frac{58}{13}$

۳۳ $\frac{2ل-1}{3-ل} = \frac{8-ل^2}{2ل-2} + \frac{ل}{2}$

$ل = 2$ یا $-\frac{11}{3}$

۳۴ $\frac{3}{6ل-ل^2} + \frac{6}{ل^2+2ل} = \frac{11}{5ل}$

$ل = 3$ یا $\frac{26}{11}$

٣٥ $\frac{٤ل^٢ + ٧ل}{١٩} + \frac{٥ل - ل^٢}{ل+٣} = \frac{٤ل^٢}{٩}$

$ل = ٣$ يا $-\frac{٨٧}{١٠}$

٣٦ $\frac{ل^٢ + ٢ل + ٨}{ل^٢ + ل - ٦} = ل^٢ + ل + ٨$

$ل = ٤$ يا $-\frac{١٤}{٣}$

٣٧ $\frac{ل + ١٢}{ل} + \frac{ل}{ل + ١٢} = ٥\frac{٣}{١٥}$

$ل = ٣$ يا -١٥

٣٨ $\sqrt{٤ل + ٥} \times \sqrt{٧ل + ١} = ٣٠$

$ل = ٥$ يا $-\frac{١٧٩}{٢٨}$

٣٩ $\frac{\sqrt{ل + ٩}}{\sqrt{ل}} = \frac{\sqrt{٩ل - ٣\frac{٤}{٥}}}{\sqrt{ل} - ٩}$

$ل = ٥$ يا $\frac{٤٥٦١}{٤٠٠}$

٤٠ $\frac{ل + \sqrt{ل}}{ل - \sqrt{ل}} = \frac{ل^٢ - ل}{٤}$

$ل = ٤$ يا ١ يا $\frac{-٣ \pm \sqrt{-٧}}{٢}$

٤١ $\frac{ل - \sqrt{ل + ١}}{ل + \sqrt{ل + ١}} = \frac{٥}{١١}$

$ل = ٨$ يا $-\frac{٨}{٩}$

٤٢ $٥ \times \frac{٣ل - ١}{١ + ٥\sqrt{ل}} + \frac{٢}{\sqrt{ل}} = ٣\sqrt{ل}$

$ل = ٤$ يا $\frac{١}{٩}$

٤٣ $\sqrt{ل^٩} - \frac{٤٠}{\sqrt{ل}} = ٣ل$

$ل = ٤$ يا $(-٥)^{\frac{٢}{٣}}$

٤٤ $ل^{\frac{٤}{٣}} + ٧ل^{\frac{٢}{٣}} = ٤٤$

$ل = \pm ٨$ يا $\pm (-١١)^{\frac{٣}{٢}}$

٤٥ $٢ل^{\frac{١}{٣}} + ٧ل^{\frac{١}{٦}} = ٣٩$

$ل = ٧٢٩$ يا $\left(\frac{١٣}{٢}\right)^٦$

٤٦ $٣ل^٦ + ٤٢ل^٣ = ٣٣٢١$

$ل = ٣$ يا $-\sqrt[٣]{٤١}$

٤٧ $\frac{٨}{ل^٣} + ٢ = \frac{١٧}{ل^{\frac{٣}{٢}}}$ $ل = ٤$ يا $\sqrt[٣]{\frac{١}{٤}}$

٤٨ $ل^{\frac{٣}{٢}} + \frac{\sqrt[٣]{٣١ل}}{ل} = \frac{٩٧}{\sqrt[٣]{ل^٢}} + \frac{٥}{ل^٦}$

$ل = ٤$ يا $(-٧)^{\frac{٣}{٢}}$

٤٩ $\sqrt[٦]{\frac{١}{ل^٣}} + \sqrt[٣]{\frac{١}{ل}} = \frac{٣ - \sqrt[٣]{ل^٢}}{ل}$

$ل = ١$ يا $-\frac{٢٧}{٨}$

٥٠ $٣ل^{ن} - \sqrt{ل^{ن}} - \frac{٢ل^{ن}}{\sqrt{ل^{ن}}} = ٤$

$ل = (٨)^{\frac{١}{٢ن}}$ يا $\left(-\frac{٨}{٢٧}\right)^{\frac{١}{٢ن}}$

٥١ $\frac{٣\sqrt{ل - ل^٢}}{ل + ٢} = \frac{\frac{١}{٣}ل^٢ + ٣\sqrt{ل - ٢ل}}{٢\sqrt{ل} - ٣}$

$ل = ٤$ يا $\frac{١}{٢٥}$

٥٢ $٢ل^{\frac{٣}{٢}}(ل^٢ + ط^٢)^{\frac{٣}{٢}} = ٢ل^٢(ل + ٢ط) + ط^٢(ل - ط)$

$ل = \frac{ط}{٢}$ يا $-ط$

٥٣ $ط ع ل - ط س ل^٢ = ص س ل - ص ع$

$ل = \frac{ع}{س}$ يا $-\frac{ص}{ط}$

٥٤ $\frac{ط^2 ل^2}{ص^2} - \frac{2طل}{س} + \frac{ع^2}{س^2} = 0$

$ل = \frac{ص}{ط} \times \frac{ص \pm \sqrt{ص^2 - ع^2}}{س}$

٥٥ $9ط^2ص^2 ل^2 - 6ط^3ص^2 ل = ص^2$

$ل = \frac{ط^2 \pm \sqrt{ط^2 + ص^2}}{3ط^2ص^2}$

٥٦ $(ط + ص) ل^2 = س ل + \frac{ط س}{ط + ص}$

$ل = \frac{س \pm \sqrt{س^2 + 4طس}}{2(ط + ص)}$

٥٧ $3\sqrt{112 - 8ل} = 19 + \sqrt{3ل + 7}$

$ل = 6 \text{ يا } \frac{7398}{625}$

٥٨ $\sqrt{2ل + 7} + \sqrt{3ل - 18} = \sqrt{7ل + 1}$

$ل = 9 \text{ يا } -\frac{18}{5}$

٥٩ $7\sqrt{\frac{3ل}{2} - 5} - \sqrt{\frac{ل}{5} + 45} = \frac{2}{3}\sqrt{10ل + 56}$

$ل = 20 \text{ يا } -\frac{13568980}{2874649}$

٦٠ $\frac{16 - 4\sqrt{ل}}{8 - 3\sqrt{ل}} = \frac{88 + 33\sqrt{ل}}{4 + \sqrt{ل}} + \frac{ل^2 - 5ل + 11}{(8 - 3\sqrt{ل})(4 + \sqrt{ل})}$

$ل = 93 \text{ يا } 7$

٦١ $\frac{42 - 9\sqrt{ل}}{ل + 2\sqrt{ل}} = \frac{123 - 40\sqrt{ل}}{6 + \sqrt{ل}} + \frac{7ل^2 - 3ل + 4}{(ل + 2\sqrt{ل})(6 + \sqrt{ل})}$

$ل = 5 \text{ يا } \frac{32}{15}$

٦٢ $ل + \sqrt{ل} : ل - \sqrt{ل} :: 3\sqrt{ل} + 1 : 2\sqrt{ل}$

$ل = 9 \text{ يا } 4$

٦٣ $ل^2 + 11 + \sqrt{ل^2 + 11} = 42$

$ل = \pm 5 \text{ يا } \pm\sqrt{38}$

٦٤ $(ل - 5)^3 - 3(ل - 5)^{\frac{3}{2}} = 40$

$ل = 9 \text{ يا } (-5)^{\frac{2}{3}} + 5$

٦٥ $ل + \sqrt{ل + 6} = 2 + 3\sqrt{ل + 6}$

$ل = 10 \text{ يا } -2$

٦٦ $(ل^2 + 5)^2 - 4ل^2 = 160$

$ل = \pm 3 \text{ يا } \pm\sqrt{-15}$

٦٧ $ل^2 - 7ل + \sqrt{ل^2 - 7ل + 18} = 24$

$ل = 9 \text{ يا } -2 \text{ يا } \frac{7 \pm \sqrt{173}}{2}$

٦٨ $9ل - 4ل^2 + \sqrt{4ل^2 - 9ل + 11} = 5$

$ل = 2 \text{ يا } \frac{1}{4} \text{ يا } \frac{9 \pm \sqrt{-31}}{8}$

٦٩ $ل^2 + \sqrt{5ل + ل^2} = 42 - 5ل$

$ل = 4 \text{ يا } -9 \text{ يا } \frac{-5 \pm \sqrt{221}}{2}$

٧٠ $\frac{2}{(ل + 2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sqrt{ل + 2}}{2} = \frac{17}{4\sqrt{ل + 2}}$

$ل = 6 \text{ يا } -\frac{3}{2}$

٧١ $\frac{ل}{ل + 4} + \frac{4}{\sqrt{ل + 4}} = \frac{21}{ل}$

$ل = 12 \text{ يا } -3 \text{ يا } \frac{29 \pm \sqrt{3185}}{2}$

٧٢) $\frac{س+٧}{س-٧}+\frac{س-٧}{س+٧}=\frac{٢٩}{١٠}$

$س=\pm ٣$

٧٣) $\frac{٥+٣س}{٥-٣س}-\frac{٥-٣س}{٥+٣س}=\frac{١٣٥}{١٧٤}$

$س=٩$ يا $-\frac{٢٥}{٨١}$

٧٤) $س+\sqrt{س}+٢=\frac{س^2+س-٤}{\sqrt{س}}$

$س=٤$ يا ١

٧٥) $\frac{س^2}{٢(س-٢)}+\frac{٦}{س^2-٤}=\frac{٣٥١}{٢٥س^2}$

$س=\pm ٣$ يا $\pm\sqrt{\frac{٣٩}{١١}}$

٧٦) $\left(س+\frac{٨}{س}\right)^2+س=٤٢-\frac{٨}{س}$

$س=٤$ يا ٢ يا $\frac{-٧\pm\sqrt{١٧}}{٢}$

٧٧) $س+٤-٢\times\sqrt{\frac{س+٤}{س-٤}}=\frac{٣}{س-٤}$

$س=\pm ٥$ يا $\pm\sqrt{١٧}$

٧٨) $\sqrt{س^2-١٢}+\sqrt{\frac{١٢}{س^2}-١٢}=س^2$ ...

$س=\pm ٢$ يا $\pm\sqrt{٣}$ ...

٧٩) $س^2\left(١+\frac{١}{س^3}\right)^2-\left(س^3+س\right)=٠$

$س=٣$ يا $-\frac{١٠}{٣}$ يا $\frac{-١\pm\sqrt{٢٥١}}{٦}$

٨٠) $س^2-\frac{٥س}{٢}+١٥=\frac{٢٥س^2}{١٤}-\frac{٩٤}{س^2}$

$س=٤$ يا $-\frac{٨}{٩}$ يا $\frac{-٢\pm\sqrt{٧١}}{٩}$

٨١) $\frac{٥\pm٣\sqrt{٩-س^2}}{\sqrt{٩-س^2}}+\frac{٩-\sqrt{٩-س^2}}{٧س}=\frac{١٩}{٧س}$

$س=\pm ٥$ يا $\frac{\sqrt{١٠٦٩}}{٢}$

٨٢) $٢\left((س-١)^2-س\right)^2+س^2=٢٢٢\,١٤(س-١)^2$

$س=٥$ يا -٢ يا $\frac{١٠٩\pm\sqrt{٣٢}}{٣\sqrt{٢}}$

٨٣) $س-٢س^2+٢س^2-\sqrt{س}=٦$

$س=٣$ يا ٢ يا $\frac{-٥\pm\sqrt{٧-١١}}{٢}$

٨٤) $س^2+\frac{١٣س^2}{٤}-٣٩س=٨١$

$س=\pm ٣$ يا $\frac{-١٣\pm\sqrt{١٥٥}}{٢}$

٨٥) $\frac{٨+س^2}{٦}-\frac{٦+٤س}{س^2}=\frac{٨-\frac{٢}{س^2}}{٣}$

$س=٤$ يا -٢ يا $-١\pm\sqrt{-٣}$

٨٦) $\sqrt{س}-\frac{٨}{س}=\frac{٤}{\sqrt{س}-٢}$

$س=٤$ يا ١

٨٧) $٤س^2+\frac{س}{٢}=٤س^2+٣٢$

$س=٢$ يا $-\frac{٣}{٢}$ يا $\frac{-١\pm\sqrt{-٣٣}}{٤}$

٨٨) $(س-٢)^2-٤س^2(س-٢)=٢٤-٤س+١٥س^{\frac{1}{2}}$

٨٩) $\left(٤س+١\right)^2+٤س^{\frac{1}{2}}(٤س+١)=١٩١٢-(١٠س+٢س)^{\frac{1}{2}}$

$س=١٦$ يا ١ يا $\frac{-١١\pm\sqrt{٣}}{٢}$

$س=٩$ يا $\frac{٤٩}{٤}$ يا $-٩٠\pm\frac{\sqrt{١٨١}}{٨}$

٩٠) $٨س^2-١٢=\frac{٥٣}{٢}+\sqrt{٤س^2+٥٢س^2}$

$س=٢$ يا $-\frac{١٣}{٨}$ يا $\frac{-٣\pm\sqrt{٣٣٣٧}}{٤٣}$

۹۱ $۳ل^۲ + ۲۱ل + ۸ + ل^{\frac{۱}{۲}}\sqrt{۷ل^۲ - ۵ل} = ۲۰۷ - \frac{۳ل^{\frac{۳}{۲}}}{۲}$

$ل = ۳$ یا $\frac{۲۰۷}{۱۶}$ یا $\frac{۳۱ \pm ۳ \sqrt{- ۳۵۴۷}}{۳۲}$

۹۲ $\frac{۲ل + \sqrt{ل}}{۲ل - \sqrt{ل}} = \frac{۷}{۱۵} ۳ - ۲ \frac{۲ل - \sqrt{ل}}{۲ل + \sqrt{ل}}$

$ل = ۴$ یا $\frac{۴۹}{۱۶}$

یہاں سے دو مجہول کی مساواتیں شروع ہیں

۱ $\begin{cases} ل + ۴ی = ۱۳ \\ ی^۲ + ۴ل = ۳ی + ۱۱ \end{cases}$ $\begin{cases} ل = ۲ \text{ یا } -۴۶ \\ ی = ۱۵ \text{ یا } ۳ \end{cases}$

۲ $\begin{cases} ۲ل + ۳ی = ۱۱۸ \\ ۵ل^۲ - ۷ی^۲ = ۴۳۲۳ \end{cases}$ $\begin{cases} ل = ۳۵ \text{ یا } \frac{۲۸۹۹}{۱۷} \\ ی = ۱۶ \text{ یا } \frac{۳۲۴۸}{۱۷} \end{cases}$

۳ $\begin{cases} \frac{۲ل + ۷ی}{۴ل} = ۲ی - \frac{۱۵ + ۲ل}{۱۰} \\ \frac{۴ل + ۳ی}{۱۴} = ی - ۲ \end{cases}$ $\begin{cases} ل = ۵ \text{ یا } -\frac{۵۶}{۲۷} \\ ی = ۴ \text{ یا } \frac{۶۳۰}{۳۵۱} \end{cases}$

۴ $\begin{cases} \frac{۳ل ی + ۳ی - ۳}{۵ل} = ۱ - \frac{۴ی + ۳ل - ۲}{۵} - \frac{۱۸ - ل}{۳} \\ \frac{۳ل + ی}{۷} = \frac{۳ل - ۵ی}{۳} + ۲ \end{cases}$

$\begin{cases} ل = ۹ \text{ یا } -\frac{۳}{۲۶۶} \\ ی = ۳ \text{ یا } \frac{۲۷۸۳}{۲۰۲۷} \end{cases}$

۵ $\begin{cases} ل^۲ - ی^۲ = ط^۲ \\ (ل + ی + ص)^۲ + (ل - ی + ص)^۲ = ۲س^۲ \end{cases}$

$\begin{cases} ل = \frac{-ص \pm \sqrt{۲ط^۲ - ص^۲ + ۲س^۲}}{۲} \\ ی = \pm \sqrt{س^۲ - ط^۲ \mp \sqrt{۲ط^۲ - ص^۲ + ۲س^۲}} \end{cases}$

۶ $\begin{cases} ل^۲ + ی : ل^۲ - ی :: ۹ : ۷ \\ ل^۲ + ۱ : ۴ + ی :: ۵ی + ۷ : ۳ی \end{cases}$

$\begin{cases} ل = \pm ۴ \text{ یا } \pm ۴\sqrt{-\frac{۷}{۱۹}} \\ ی = ۲ \text{ یا } -\frac{۱۴}{۱۹} \end{cases}$

۷ $\begin{cases} ل^۲ + ۲ل^۳ ی = ۱۴۴ - ل^۳ ی^۲ \\ ل ی = ۳ + ل \end{cases}$

$\begin{cases} ل = ۳ \text{ یا } -۷ \text{ یا } -۲ \pm \sqrt{-۱۷} \\ ی = ۲ \text{ یا } \frac{۴}{۷} \text{ یا } \frac{۵ \mp \sqrt{-۱۷}}{۷} \end{cases}$

۸ $\begin{cases} ل^۲ + ۴ی^۲ = ۲۵۶ - ۴ل ی \\ ۳ی^۲ - ل^۲ = ۳۹ \end{cases}$

$\begin{cases} ل = \pm ۶ \text{ یا } \pm ۱۰۲ \\ ی = \pm ۵ \text{ یا } \pm ۵۹ \end{cases}$

۹ $\begin{cases} (ل + ی)^۲ - ۳ی = ۲۸ + ۳ل \\ ۲ل ی + ۳ل = ۳۵ \end{cases}$

$$ل = ٥ \text{ يا } \frac{٥}{٢} \text{ يا } \frac{-٥ \pm \sqrt{-٢٥٥}}{٤}$$

$$ى = ٢ \text{ يا } \frac{٥}{٢} \text{ يا } \frac{-١١ \mp \sqrt{-٢٥٥}}{٤}$$

١٠

$$(٢ل - ٣ى)^٢ + ل - ٢ى = ٥$$

$$ل^٢ - ى^٢ = ٨$$

$$ل = ٣ \text{ يا } \frac{٢٣٧}{١٣٧}$$

$$ى = ١ \text{ يا } \frac{٣٩}{٩}$$

١١

$$\frac{٣}{٤}\sqrt{ل - ى} + ١ = \frac{١}{\sqrt{ل - ى}}$$

$$\sqrt{ل + ى} + \sqrt{ل - ى} = ٥$$

$$ل = \frac{١٣}{٢}$$

$$ى = \frac{٥}{٢}$$

١٢

$$ل + ى + \sqrt{ل + ى} = ٦$$

$$ل^٢ + ى^٢ = ١٠$$

$$ل = ٣ \text{ يا } ١ \text{ يا } \frac{٩ \pm \sqrt{-٦١}}{٢}$$

$$ى = ١ \text{ يا } ٣ \text{ يا } \frac{٩ \mp \sqrt{-٦١}}{٢}$$

١٣

$$ل^٢ + ٣\sqrt{ل^٢ + ٣ى + ٥} = ٥٥ - ٣ى$$

$$٦ل - ٧ى = ١٦$$

$$ل = ٥ \text{ يا } -\frac{٥٣}{٧} \text{ يا } \frac{-٩ \pm \sqrt{٣٨٩٥}}{٧}$$

$$ى = ٢ \text{ يا } -\frac{٤٦}{٧} \text{ يا } \frac{-٧٠ \pm \sqrt{٣٨٩٥}}{٤٩}$$

١٤

$$ل^٢ + ٣ل ى + ى = ٤٣ - ٢ل ى$$

$$ى^٢ + ٣ى + ل = ٤٣$$

$$ل = ٣ \text{ يا } ٦ \text{ يا } -١٣ \pm \sqrt{٥٨}$$

$$ى = ٥ \text{ يا } -٧ \text{ يا } -١ \pm \sqrt{٥٨}$$

١٥

$$ى - ى^{\frac{١}{٢}} = ١٤ - ل$$

$$٢٨ - ى = ل + ٣ل^{\frac{١}{٢}}$$

$$ل = ٤ \text{ يا } \left(\frac{٥٨}{١٧}\right)^٢$$

$$ى = ١٤ \text{ يا } \frac{٧٨٤}{٢٨٩}$$

١٦

$$ل^٤ + ى^٤ = ٩٧$$

$$ل + ى = ٥$$

$$ل = ٣ \text{ يا } ٢ \text{ يا } \frac{٥ \pm \sqrt{-١٥١}}{٢}$$

$$ى = ٢ \text{ يا } ٣ \text{ يا } \frac{٥ \mp \sqrt{-١٥١}}{٢}$$

١٧

$$ل + ى = ٥$$

$$(ل^٢ + ى^٢)(ل^٣ + ى^٣) = ٤٥٥$$

$$ل = ٣ \text{ يا } ٢ \text{ يا } \frac{٥}{٢} \pm \frac{١}{٢}\sqrt{-\frac{١٠٣}{٣}}$$

$$ى = ٢ \text{ يا } ٣ \text{ يا } \frac{٥}{٢} \mp \frac{١}{٢}\sqrt{-\frac{١٠٣}{٣}}$$

١٨

$$ل + ى - \sqrt{\frac{ل + ى}{ل - ى}} = \frac{٦}{ل - ى}$$

$$ل^٢ + ى^٢ = ٤١$$

ل = ± ۵ یا ± ۳ √(۵/۲)
ی = ± ۴ یا ± √(۳۷/۲)

۱۹ — (ل + ی)/(ل − ی) − (ل − ی)/(ل + ی) = ۴ ۳/۵
۴/(ی − ۸√۹) = ۱/ل + √((ل − ی)/۴ل)
ل = ۳ یا ۴۵/۲ یا ۳/۱۶ یا ۴۵/۳۲
ی = ۲ یا − ۱۳۵/۴ یا − ۱/۸ یا − ۱۳۵/۶۴

۲۰ — ی² − ۴۳۲ = ۱۲ ل ی²
ی² = ۱۲ + ۲ ل ی
ل = ۲
ی = ۶

۲۱ — ل² ی − ۴ = ۴ ل^{۱/۲} ی − ۳/۴
۳/ل² − ۳ = ل^{۱/۲} ی^{۱/۲} (۱/ل − ۱/ی)
ل = ۱
ی = ۴

مثالیں مساوات مفرد کی

۱ — ل + ی : ی :: ۳ : ۱
ل ی = ۱۸
ل = ± ۶
ی = ± ۳

۲ — ل − ی : ی :: ۴ : ۵
ل² + ۴ ی² = ۱۸۱
ل = ± ۹
ی = ± ۵

۳ — ل + ی : ل − ی :: ط : ص
ل ی = س²
ل = ± س √((ط + ص)/(ط − ص))
ی = ± س √((ط − ص)/(ط + ص))

۴ — ل² + ی² : ل² − ی² :: ۱۷ : ۸
ل ی² = ۴۵
ل = ۵
ی = ۳

۵ — ل² − ل ی = ۵۴
ل ی − ی² = ۱۸
ل = ± ۹
ی = ± ۳

۶ — ل + ی : ل² − ی² :: ۱ : ۴
ل ی = ۲۱
ل = ۷ یا − ۳
ی = ۳ یا − ۷

۷ — ل³ + ی³ : ل³ − ی³ :: ۵۵۹ : ۱۲۷
ل² ی = ۲۹۴
ل = ۷
ی = ۶

۸ — ل² − ل ی : ل ی − ی² :: ۳ : ۷
ل ی² = ۱۴۷
ل = ۳
ی = ۷

۹ — √ل + √ی : √ل − √ی :: ۴ : ۱
ل − ی = ۱۶
ل = ۲۵
ی = ۹

۱۰ — ∜ل − ∜ی = ۳
∜ل + ∜ی = ۷
ل = ۶۲۵
ی = ۱۶

۱۱ — ل − ی : √ل − √ی :: ۸ : ۱
√(ل ی) = ۱۵
ل = ۲۵ یا ۹
ی = ۹ یا ۲۵

۱۲ — ل³ − ی³ : ل² ی − ل ی² :: ۷ : ۲
ل + ی = ۶
ل = ۴ یا ۲
ی = ۲ یا ۴

۱۳ — ۱/ل + ۱/ی = ۱/۲
۲/(ل ی) = ۱/۹
ل = ۶ یا ۳
ی = ۳ یا ۶

۱۴ $\left\{\begin{array}{l} \text{ل}^4 - \text{د}^4 = 369 \\ \text{ل}^2 - \text{د}^2 = 9 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \text{ل} = \pm 5 \\ \text{د} = \pm 4 \end{array}\right.$

۱۵ $\left\{\begin{array}{l} \text{ل}^3 - \text{د}^3 = 56 \\ \text{ل} - \text{د} = \frac{16}{\text{لد}} \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \text{ل} = 4 \text{ یا } -2 \\ \text{د} = 2 \text{ یا } -4 \end{array}\right.$

۱۶ $\frac{1}{\sqrt{\text{ل}^2-1}-1} = \frac{1}{\sqrt{\text{ل}^2-1}+1} = \frac{\sqrt{3}}{\text{ل}^2}$ ۔

$\text{ل} = \pm\frac{1}{2}$

۱۷ $\left\{\begin{array}{l} \text{ل}^2\text{د} + \text{د}^2 = 116 \\ \text{ل}\,\text{د}^{\frac{1}{2}} + \text{د} = 14 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \text{ل} = 5 \text{ یا } 2\sqrt{\frac{2}{5}} \\ \text{د} = 4 \text{ یا } 10 \end{array}\right.$

۱۸ $\left\{\begin{array}{l} \sqrt[3]{\text{ل}} + \sqrt[3]{\text{د}} = 6 \\ \text{ل} + \text{د} = 72 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \text{ل} = 64 \text{ یا } 8 \\ \text{د} = 8 \text{ یا } 64 \end{array}\right.$

۱۹ $\left\{\begin{array}{l} 4\text{ل}^2 + \frac{5}{2} = \frac{\text{ل}^2}{\text{د}} + 10\text{د} \\ \text{ل}^2 + 3\text{د} = 55 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \text{ل} = \pm 5 \\ \text{د} = 10 \end{array}\right.$

۲۰ $\frac{1}{\text{ل}+\sqrt{\text{ل}^2-2}} + \frac{1}{\text{ل}-\sqrt{\text{ل}^2-2}} = \text{ط}\,\text{ل}$

$\text{ل} = \pm\sqrt{\frac{\text{ط}+1}{\text{ط}}}$

۲۱ $\frac{\text{ل}}{\sqrt{\text{ط}^2+\text{ل}^2-\text{ل}}} = \text{ص}$ $\text{ل} = \pm\frac{\text{ط}\,\text{ص}}{\sqrt{2\text{ص}+1}}$

۲۲ $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\sqrt{4\text{د}-\text{ل}} + \frac{1}{2}\sqrt{\text{د}-\text{ل}} = \sqrt{2\text{د}-\text{ل}} \\ \frac{3}{4}\sqrt{\text{ل}^2-6\text{د}} + \sqrt{\text{د}^2-9\text{ل}} : \sqrt{\text{ل}^2-6\text{د}} :: 1\frac{3}{4} : 1 \end{array}\right.$

$\left\{ \text{ل} = 7 \text{ اور } \text{د} = 8 \right\}$

۲۳ $\left\{\begin{array}{l} \frac{9}{8}\sqrt[3]{\frac{\text{ل}+\text{د}}{\text{د}}} + \frac{9}{8}\sqrt[3]{\frac{\text{ل}+\text{د}}{\text{ل}}} = 1\frac{1}{7} \\ \frac{4}{4}\sqrt[3]{\frac{\text{ل}-\text{د}}{\text{د}}} - \frac{7}{4}\sqrt[3]{\frac{\text{ل}-\text{د}}{\text{ل}}} = \frac{1}{9} \end{array}\right.$

$\left\{ \text{ل} = \frac{7}{2} \text{ اور } \text{د} = \frac{9}{2} \right\}$

۲۴ $\left\{\begin{array}{l} \text{ل}^{\frac{4}{3}} + \text{د}^{\frac{2}{5}} = 20 \\ \text{ل}^{\frac{2}{3}} + \text{د}^{\frac{1}{5}} = 6 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \text{ل} = \pm 8 \text{ یا } \pm\sqrt{8} \\ \text{د} = 32 \text{ یا } 1024 \end{array}\right.$

۲۵ $\left\{\begin{array}{l} \text{ل}^4 + 2\text{ل}^2\text{د}^2 + \text{د}^4 = 1296 - 4\text{لد}(\text{ل}^2+\text{لد}+\text{د}^2) \\ \text{ل} - \text{د} = 4 \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} \text{ل} = 5 \text{ یا } -1 \\ \text{د} = 1 \text{ یا } -5 \end{array}\right.$

۲۶ $\text{ط} = \frac{\sqrt{\text{ط}} - \sqrt{\text{ط}-\text{ل}}}{\sqrt{\text{ط}} + \sqrt{\text{ط}-\text{ل}}}$ $\text{ل} = \frac{4\text{ط}^2}{(\text{ط}+1)^2}$

۲۷ $\left\{\begin{array}{l} 4 = \frac{\sqrt{\text{ل}} + \sqrt{\text{ل}-\text{د}}}{\sqrt{\text{ل}} - \sqrt{\text{ل}-\text{د}}} \\ \sqrt{\text{ل}} : \sqrt{\text{د}} :: \sqrt{\text{د}} : \text{[illegible]} \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \text{ل} = \frac{225}{16} \\ \text{د} = 25 \end{array}\right.$

۲۸ $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\text{د}} - \frac{1}{\text{ل}} = \frac{1}{4} \\ \text{ل}^2\text{د} - \text{ل}\text{د}^2 = 16 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \text{ل} = 4 \text{ یا } -2 \\ \text{د} = 2 \text{ یا } -4 \end{array}\right.$

۲۹ $9 = \frac{\sqrt{4\text{ل}+1} + \sqrt{4\text{ل}}}{\sqrt{4\text{ل}+1} - \sqrt{4\text{ل}}}$ $\text{ل} = \frac{4}{9}$

۳۰. $\text{ص} = \dfrac{\text{ط} + \text{لا} + \sqrt{۲\text{طلا} + \text{لا}^۲}}{\text{ط} + \text{لا} - \sqrt{۲\text{طلا} + \text{لا}^۲}}$ $\therefore \text{لا} = \pm \text{ط} \dfrac{(\sqrt{\text{ص}} \mp ۱)^۲}{۲\sqrt{\text{ص}}}$

۳۱. $\left\{\begin{array}{l} \sqrt{\text{لا} - \text{ی}} + \frac{۱}{۲}\sqrt{\text{لا} + \text{ی}} = \dfrac{\text{لا} - ۱}{\sqrt{\text{لا} - \text{ی}}} \\ \text{لا}^۲ + \text{ی}^۲ : \text{لای} :: ۳۴ : ۱۵ \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} \text{لا} = ۵ \\ \text{ی} = ۳ \end{array}\right.$

۳۲. $\left\{\begin{array}{l} \text{لا}^۴\text{ی}^۳ - \text{لا}^۳\text{ی}^۴ = ۲۱۶ \\ \text{لا}^۲\text{ی} - \text{لای}^۲ = ۶ \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} \text{لا} = ۳ \text{ یا } -۲ \\ \text{ی} = ۲ \text{ یا } -۳ \end{array}\right.$

۳۳. $\left\{\begin{array}{l} \text{لا}^۲ + \text{لا}\sqrt[۳]{\text{لای}^۲} = ۲۰۸ \\ \text{ی}^۲ + \text{ی}\sqrt[۳]{\text{لا}^۲\text{ی}} = ۱۰۵۳ \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} \text{لا} = \pm ۸ \\ \text{ی} = \pm ۲۷ \end{array}\right.$

۳۴. $\left\{\begin{array}{l} \text{لا}^{\frac{۳}{۲}} + \text{لا}^{\frac{۳}{۴}}\text{ی}^{\frac{۳}{۴}} + \text{ی}^{\frac{۳}{۲}} = ۱۰۰۹ \\ \text{لا}^۳ + \text{لا}^{\frac{۳}{۲}}\text{ی}^{\frac{۳}{۲}} + \text{ی}^۳ = ۵۸۲۱۹۳ \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} \text{لا} = ۸۱ \text{ یا } ۱۶ \\ \text{ی} = ۱۶ \text{ یا } ۸۱ \end{array}\right.$

۳۵. $\left\{\begin{array}{l} \text{لا}^۲ + \text{ی}^۲ + \text{لای}(\text{لا} + \text{ی}) = ۶۸ \\ \text{لا}^۳ + \text{ی}^۳ - ۳\text{لا}^۲ = ۱۲ + ۳\text{ی}^۲ \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} \text{لا} = ۴ \text{ یا } ۲ \\ \text{ی} = ۲ \text{ یا } ۴ \end{array}\right.$

۳۶. $\left\{\begin{array}{l} \text{لای}(\text{لا} + \text{ی}) = ۸۴ \\ \text{لا}^۲\text{ی}^۲(\text{لا}^۲ + \text{ی}^۲) = ۳۶۰۰ \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} \text{لا} = ۴ \text{ یا } ۳ \\ \text{ی} = ۳ \text{ یا } ۴ \end{array}\right.$

۳۷. $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\text{لا}^۲ + \text{لای} + \text{ی}^۲}{\text{لا} + \text{ی}} = ۷ \\ \dfrac{\text{لا}^۲ - \text{لای} + \text{ی}^۲}{\text{لا} - \text{ی}} = ۹ \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} \text{لا} = ۶ \\ \text{ی} = ۳ \end{array}\right.$

مقدار غیر ممکن

چونکہ حاصل ضرب دو مقدارون کا جنکی پہلی علامات متماثل ہون ہمیشہ مثبت ہوتا ہی اور چونکہ حاصل ضرب ایک مقدار کا اوسی مین اوسکا مجذور کہلاتا ہی تو ظاہر ہے کہ کوئی ایسی مقدار نہین ہی جسکا مجذور منفی ہو اور اگر کوئی ایسی مقدار حساب جبریہ مین واقع ہو تو جاننا چاہئی کہ سوال جسکو ہم حل کر رہی ہون غلط ہی ایسی مقدارون کو مقادیر ناممکن کہتے ہین مثلاً $\sqrt{-\text{ط}^۲}$ ایک مقدار ناممکن ہی کیونکہ $\text{ط} \times \text{ط} = \text{ط}^۲$ اور $-\text{ط} \times -\text{ط} = \text{ط}^۲$ تو اس سبب سے معلوم ہوا کہ $\sqrt{-\text{ط}^۲}$ نہ تو ط اور نہ $-\text{ط}$ ہی اور اسی دلیل سے $\sqrt{-\text{ط}^۲}$ ایک مقدار ناممکن ہی بوسیلہ مقدار ناممکن کے معلوم ہو سکتا ہی ہمین سوال سائل کا درست ہی یا غلط مثلاً اگر کوئی سوال کرے کہ کونسی وے دو عدد ہین جنکا حاصل جمع $= ۱۲$ اور حاصل ضرب اونکا $= ۴۰$ اب ظاہر ہی کہ یہہ سوال غلط ہی اور غلطی اسطرح سی ثابت ہو سکتی ہی فرض کرو بڑا عدد مجہول $= \text{لا}$ اور چھوٹا عدد مجہول $= \text{ی}$ تو بموجب شرایط سوال کے $\text{لا} + \text{ی} = ۱۲$ (۱) اور $\text{لای} = ۴۰$ (۲) مساوات اول سے $\text{لا} = ۱۲ - \text{ی}$ اور لکھو اس قیمت لا کو مساوات دویم مین تو حاصل ہوتا ہی

$۱۲\text{ی} - \text{ی}^۲ = ۴۰$ اور $\text{ی}^۲ - ۱۲\text{ی} = -۴۰$ اور بموجب قاعدہ اول مساوات درجہ دویم کے

$\text{ی}^۲ - ۱۲\text{ی} + ۳۶ = ۳۶ - ۴۰ = -۴$ اور

$\text{ی} - ۶ = \sqrt{-۴}$ جو محال ہی

تناسب کا بیان

اگر دو مقداریں ہون اور اول مقدار دوسری مقدار پر تقسیم کیجاوی تو خارج قسمت ہی نسبت جو مقدار اول دویم سی رکھتی ہی یعنے نسبت ۴ کی ۲ کو = $\frac{4}{2}$ = ۲ یعنی ۴ ۲ سے دو چند کی نسبت رکھتا ہی اور $\frac{ح}{ط}$ = نسبت جو ح ط سے رکھتی ہی چار مقداریں متناسبہ کہلاتی ہین جب نسبت اول کی دوسری سے اور تیسری کی چوتھی سے مساوی ہوتی ہی مثلاً ح اور ط اور س اور ص مقادیر متناسبہ کہلاتے ہین اگر $\frac{ح}{ط} = \frac{س}{ص}$ اور چار مقادیر متناسبہ کو موافق حدود کی اسطور پر ثبت کرتے ہین

ح : ط : : س : ص ح اور ص یعنی اول اور چوتھی کو اطراف کہتے ہین اور ط اور س یعنی دوسری اور تیسری کو اوساط کہتے ہین اگر چار مقادیر متناسبہ مین سے اطراف کو اسمین ضرب کرین اور پھر ارقام اوسط کو اسمین ضرب کرین تو حاصل ضرب دونو حالتوںمین مساوی ہوتا ہی یہہ ظاہر ہی کیونکہ اگر ح : ط : : س : ص تو $\frac{ح}{ط} = \frac{س}{ص}$ اور اگر دو تو طرف اس مساوات کی ط ص مین ضرب کی جائین تو

ح ص = س ط اور یہی مراد تھی

اس عمل سی ظاہر ہی کہ اگر تین مقداریں ہون اور اول مقدار دوسری سے وہی نسبت رکھتی ہی جو دوسری رکھتی ہی تیسری کو تو حاصل ضرب اطراف کا مساوی ہوتا ہی مجذور رقم اوسط کی اس سے یہہ بہی ظاہر ہی کہ اگر تین ارقام چار ارقام متناسبہ مین سے معلوم ہون تو چوتھی بہی معلوم ہوسکتی ہی بوسیلہ مساوات ح ص = س ط

۲ چاہتے ہین ہم ثابت کرنا اس بات کا کہ اگر ح : ی : : ص : س تو ح + ی : ی : : ص + س : س کیواسطی کہ $\frac{ح}{ی} = \frac{ص}{س}$ عدد ایک کو دو تو طرف اس مساوات کی زیادہ کرو تو $\frac{ح}{ی} + ۱ = \frac{ص}{س} + ۱$ یعنے $\frac{ح + ی}{ی} = \frac{ص + س}{س}$ یعنے ح + ی : ی : : ص + س : س

۳ چاہتے ہین ہم ثابت کرنا اس امر کا کہ اگر ح : ی : : ص : س تو ح − ی : ی : : ص − س : س موافق فرض کے $\frac{ح}{ی} = \frac{ص}{س}$ تفریق کرو ہر دو طرف اس مساوات سے عدد ۱ کو تو

$\frac{ح}{ی} - ۱ = \frac{ص}{س} - ۱$ یا $\frac{ح - ی}{ی} = \frac{ص - س}{س}$ یعنے

ح − ی : ی : : ص − س : س لیکن بموجب دعوی (۲) سے کے

ح + ی : ی : : ص + س : س تو ح + ی : ح − ی : : ص + س : ص − س

۴ چاہتے ہین ہم ثابت کرنا اسکا کہ اگر ح : ی : : ص : س تو ط ح : ط ی : : و ص : و س یہہ ظاہر ہی کیواسطی کہ $\frac{ح}{ی} = \frac{ط ح}{ط ی}$ اور $\frac{ص}{س} = \frac{و ص}{و س}$ تو $\frac{ط ح}{ط ی} = \frac{و ص}{و س}$ یعنے ط ح : ط ی : : و ص : و س

اور اسیطرح سے یہہ بھی ثابت ہوسکتا ہی کہ طح : دی : : طص : دس

اور $\frac{\text{ح}}{\text{ط}} : \frac{\text{ی}}{\text{ط}} : : \frac{\text{ص}}{\text{د}} : \frac{\text{س}}{\text{د}}$ اور $\frac{\text{ح}}{\text{ط}} : \frac{\text{ی}}{\text{د}} : : \frac{\text{ص}}{\text{ط}} : \frac{\text{س}}{\text{د}}$

اور $\text{ح}^2 : \text{ی}^2 : : \text{ص}^2 : \text{س}^2$

۵ اگر ح : ی : : س : ل اور ی : ص : : ل : ع تو

ح : ص : : س : ع کیونکہ چونکہ ح : ی : : س : ل تو

ح : س : : ی : ل یعنے $\frac{\text{ح}}{\text{س}} = \frac{\text{ی}}{\text{ل}}$ اور نسبت دویم سے چونکہ

ی : ص : : ل : ع تو ی : ل : : ص : ع یعنے $\frac{\text{ص}}{\text{ع}} = \frac{\text{ی}}{\text{ل}}$

اور $\frac{\text{ح}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}}{\text{ع}}$ یعنے ح : س : : ص : ع یعنے ح : ص : : س : ع

۶ اگر ح : ی : : ل : ع اور ی : ص : : س : ل تب ح : ص : : س : ع کیونکہ نسبت اول سے

ح ع = ی ل اور ی ل = ص س تو ح ع = ص س یعنے ح : ص : : س : ع

۷ اگر ح : ی : : ص : س اور ل : ع : : ط : د اور ف : کہ : : م : ن

تو ح × ل × ف : ی × ع × کہ : : ص × ط × م : س × د × ن

کیونکہ $\frac{\text{ح}}{\text{ی}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$ اور $\frac{\text{ل}}{\text{ع}} = \frac{\text{ط}}{\text{د}}$ اور $\frac{\text{ف}}{\text{کہ}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$ ان سب مساوات کو آپسمین ضرب کرو تو

$\frac{\text{ح}\times\text{ل}\times\text{ف}}{\text{ی}\times\text{ع}\times\text{کہ}} = \frac{\text{ص}\times\text{ط}\times\text{م}}{\text{س}\times\text{د}\times\text{ن}}$ یعنی ح×ل×ف : ی×ع×کہ : : ص×ط×ل : س×د×ن

سلسلہ جمع اور تفریق

اگر ہم کوئی مقدار فرض کرین اور اسکی ایک جای ثبت کرین اور اسپر ایک خاص مقدار زیادہ کرین اور بعد ازان اس جمع کو ایک اور جای ثبت کرین اور پھر اس جمع پر اوسی خاص مقدار کو کہ اوسکو فرق عام کہتے ہین زیادہ کرین اور اس نئی جمع کو ایک اور جای ثبت کرین اور یہی عمل کئے جائین جہانتک چاہین تو ظاہر ہی کہ ایک ایسا سلسلہ مقدارونکا پیدا ہوگا کہ اونمین کی دوسری مقدار اول سے اوتنا ہی فرق رکھیگی جتنا تیسری دوسری سے اور چوتھی تیسری سے اور پانچوین چوتھی سے اور علی ہذا القیاس اگر ساری مقادیر اس سلسلہ کو جمع کرین تو اس عمل کو سلسلہ جمع کا نام دیتے ہین مثلاً ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷ ، ۸ ، ۹ ایک سلسلہ اعداد کا ہی اول رقم ایک ہی اور فرق عام بھی ایک ہی اسیطور پر

س ، س + ط ، س + ۲ط ، س + ۳ط .... س + (ع − ۱)ط

اس صورت مین س تو اول رقم ہی اور ط فرق عام اور ع تعداد رقمون کی ہی اگر فرق عام ایک مقدار منفی ہو تو ظاہر ہی کہ رقم دوسری رقم اول سے اوتنی کم ہوگی جتنی تیسری دوسری سے اور چوتھی تیسری سے اور اسی قیاس پر مثلاً

۸ ۷ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ایک سلسلہ اعداد کا ہی اسمین اول رقم ۸ ہی اور فرق عام -۱ اور تعداد رقمونکی ۸ ہی اور یہہ سلسلہ تفریق کا ہی اسیطور پر س س - ط س - ۲ط س - ۳ط ..... س - ع - ۱ط

فرض کرو کہ ایک سلسلہ کی اول رقم س ہی اور فرق عام مثبت خواہ منفی ط ہی اور تعداد رقمونکی ع ہی اور مجموعہ اس سلسلہ کا ح ہی تو رقوم بالا سی واضح ہی کہ س + س + ط + س + ۲ط + س + ۳ط ..... س + ع - ۱ط = ح

س + ع - ۱ط + س + ع - ۲ط + س + ع - ۳ط + س + ع - ۴ط وغیرہ = ح

حاصل جمع (س + س + ع - ۱ط) + (س + س + ع - ۱ط) + (س + س + ع - ۱ط) وغیرہ = ۲ح

لیکن ظاہر ہی کہ (س + س + ع - ۱ط) کی مانند کتنی رقمین تعداد مین ہین یعنے ع

انکی جمع = (س + س + ع - ۱ط) × ع ہی اور اسی سبب سے

(س + س + ع - ۱ط) × ع = ۲ح اور

ح = (س + س + ع - ۱ط) × ع/۲

مثال اول ایک ایسا سلسلہ ہی کہ اوسکی رقم اول = ۴ اور فرق عام = ۴ اور تعداد رقمون کی = ۱۲ جانتے ہین ہم معلوم کرنا جمع اس سلسلہ کی تو اس صورت مین

ح = (۴ + ۴ + ۱۲ - ۱ ۴) × ۱۲/۲ = ۵۲ × ۶ = ۳۱۲

مثال دویم ایک ایسا سلسلہ ہی کہ اوسکی رقم اول = ۲۲ اور فرق عام = -۳ اور تعداد رقمونکی = ۹ تو

ح = (۲۲ + ۲۲ - ۹ - ۱ ۳) × ۹/۲ = ۲۸ × ۹/۲ = ۱۴ × ۹ = ۱۲۶

سلسلہ ضرب اور تقسیم

اگر ایک رقم کو فرض کر کی ایک جا ثبت کرین اور اوسکا نام رقم اول رکھین اور ایک اور رقم فرض کرین اور اوسکا نام مضروب فیہ عام رکھین اور ضرب دین اوسی رقم اول مین اور حاصل ضرب کو ایک اور جا ثبت کرین اور بعد ازان اسی حاصل ضرب کو بھی مضروب فیہ عام مین ضرب کرین اور اس حاصل ضرب کو ایک جا ثبت کرین اور یہی عمل کئے جائین جہان تک چاہین تو ظاہر ہی کہ ایک سلسلہ مقادیر کا پیدا ہوگا اور اس سلسلہ کو سلسلہ ضرب اور تقسیم کہتے ہین اگر مضروب فیہ عام ایک عدد صحیح ہو تو سلسلہ ضرب کہلاتا ہی اور اگر کسر ہو تو وہ سلسلہ سلسلہ تقسیم کہلاتا ہی

مثلاً ۱ ۲ ۴ ۸ ۱۶ ۳۲ ۶۴ ایک سلسلہ ضرب ہی اور ۱ ۱/۲ ۱/۴ ۱/۸ ۱/۱۶ ۱/۳۲ ۱/۶۴ ایک سلسلہ تقسیم کا ہی سلسلہ اول مین رقم اول ۱ ہی اور مضروب فیہ عام ۲ ہی اور تعداد رقمون کی ۷ ہی اور سلسلہ دویم مین رقم اول ۱ ہی اور مضروب فیہ عام ۱/۲ ہی اور تعداد رقمون کی ۷ ہی قاعدہ واسطی جمع کرنے

ایسی سلسلوں کے اسطور سی دریافت ہوسکتا ہی فرض کرو کہ ایک ایسا سلسلہ ہی کہ اوسکی رقم اول = س اور مضروب فیہ عام = ط اور تعداد رقمون کی = ع اور جمع اس سلسلہ کی = ح تب

ح = س + س ط + س ط^{۲} + س ط^{۳} + س ط^{۴} .... س ط$^{ع-۱}$

ضرب کرو ہر دو طرف اس مساوات کو ط مین تب حاصل ضرب یہہ ہے

ح ط = س ط + س ط^{۲} + س ط^{۳} + س ط^{۴} .... س ط$^{ع-۱}$ + س ط^{ع}

اس مساوات مین سے تفریق کرو مساوات اول کو تو ح ط − ح = − س + س ط^{ع} = س ط^{ع} − س یعنے (ط − ۱) ح = س ط^{ع} − س اور ح = $\frac{\text{س ط}^{ع} - \text{س}}{\text{ط} - ۱}$

= جمع کی مثال اول فرض کرو کہ ایک ایسا سلسلہ ہی کہ اوسکی رقم اول = ۱ اور مضروب فیہ عام = ۲ اور تعداد رقمون کی = ۸ تب ح = $\frac{۲^{۸} - ۱}{۲ - ۱}$ = $\frac{۲۵۵}{۱}$ = ۲۵۵ مثال دوئم فرض کرو کہ ایک ایسا سلسلہ ہے کہ اوسکی رقم اول = ۱ اور مضروب فیہ عام = $\frac{۱}{۲}$ اور تعداد رقمون کی = ۶

$$\text{تو ح} = \frac{(\frac{۱}{۲})^{۶} - ۱}{\frac{۱}{۲} - ۱} = \frac{\frac{۱}{۶۴} - ۱}{\frac{۱}{۲} - ۱} = \frac{-\frac{۶۳}{۶۴}}{-\frac{۱}{۲}} = \frac{۱۲۶}{۶۴}$$

سوالات اول درجہ کی مساوات کے

سوالات

۱ ایک شخص ۳۰۰ روپیہ کا قرض دار ہی جسمین سے کچھ روپیہ تو اوسی زید کو دینا ہی اور اوس سے دوچند عمر کو اور مجموعہ اون دونوں کی قرض کا بکر کو دینا ہی تو شخص مذکور کو کتنا زید کو دینا ہی اور کتنا عمر کو اور کتنا بکر کو فرض کرو لا روپیہ زید کو دینا ہی تب بموجب سوال کے ظاہر ہی کہ ۲ لا عمر کو دینا ہی اور لا + ۲ لا یعنے ۳ لا بکر کو دینا ہی لیکن کل قرض ۳۰۰ روپیہ ہی تو لا + ۲ لا + ۳ لا = ۳۰۰ اور ۶ لا = ۳۰۰ اور لا = $\frac{۳۰۰}{۶}$ = ۵۰ یعنے زید کا روپیہ = ۵۰ اور عمر کا روپیہ ۲ × ۵۰ = ۱۰۰ اور بکر کا روپیہ = ۵۰ + ۱۰۰ = ۱۵۰

۲ دو عدد کون سے ہیں جنکا حاصل تفریق ۹ ہی اور اگر تگنا بڑا عدد و پانچ گنی چھوٹے عدد پر زیادہ کیا جاے تو مجموعہ ۳۵ ہوتا ہی فرض کرو کہ چھوٹا عدد = لا تو بموجب شرایط سوال کے بڑا عدد = لا + ۹ اور تگنا بڑا عدد = ۳ (لا + ۹) اور پانچ گنا چھوٹا عدد = ۵ لا اور ۳ (لا + ۹) + ۵ لا = ۳۵ یعنے ۳ لا + ۲۷ + ۵ لا = ۳۵ یعنے ۸ لا + ۲۷ = ۳۵ اور ۸ لا = ۳۵ − ۲۷ = ۸ اور لا = ۱ = عدد چھوٹے کے اور لا + ۹ = ۱ + ۹ = ۱۰ = عدد بڑے کے

۳ ایک لکڑی کا پانچوان حصہ تو زمین مین گڑا ہوا ہی اور تین ساتوین حصے پانی مین ہین اور سوا گز باہر پانی کی ہے

اوس لکڑی کا طول ہم فرض کرو کہ لکڑی = لا تو موافق شرایط سوال کے لا − لا/۵ − ۳لا/۷ = ۱۳ ضرب کرو

ہر دو طرف اس مساوات کو ۵ مین تو ۵ لا − لا − ۱۵لا/۷ = ۶۵

ایضاً .... ۷ مین تو ۳۵ لا − ۷ لا − ۱۵ لا = ۴۵۵

یعنی ۱۳ لا = ۴۵۵ اور لا = ۴۵۵/۱۳ = ۳۵ = طول لکڑی کے

۴ ایک شخص کے پاس ایک تھیلی روپیوں کی تھی اور اوس روپیوں مین سے چوتھائی تو ایک شخص کو دیئے اور ساتوان حصہ دوسرے شخص کو پھر جو اوسنے روپیئے شمار کیے تو ۸۵ نکلے بتاؤ اوسکے پاس کتنے روپیئے تھے

فرض کرو کہ تعداد روپیوں کی کہ تھیلی مین اول تھی = لا تو موجب شرایط سوال کے لا/۴ + لا/۷ = روپیئے جو خرچ ہوگئے اور اسیواسطے لا − لا/۴ − لا/۷ = ۸۵ ضرب کرو ہر دو طرف اس مساوات کو ۴ مین اور بعد ازان ۷ مین تو ۲۸ لا − ۷ لا − ۴ لا = ۲۳۸۰ یعنی ۱۷ لا = ۲۳۸۰ اور لا = ۲۳۸۰/۱۷ = ۱۴۰ روپئے مطلوبہ کے

۵ ایک پلٹن سپاہیوں کی ہے اوس مین سے تین چوتھائی تو کام پر بیٹھے ہوئی ہین اور دسوان حصہ بیمار ہے اور کچھ باقی رہا ہے اوس باقی کے تین پانچوین حصے غیر حاضر ہین بعد اسکے ۴۸ سپاہی حاضر پایے بتاو کتنے آدمی اس پلٹن مین تھے

فرض کرو کہ تعداد مردمان پلٹن = لا تو موجب شرایط سوال کے تین چوتھائی لا کی یعنی ۳لا/۴ کام پر تعین ہین اور دسوان حصہ لا کا یعنی لا/۱۰ بیمار ہین اور مجموعہ ۳لا/۴ + لا/۱۰ یعنی ۳۴لا/۴۰ = ۱۷لا/۲۰ = مردمان کام پر اور بیمار تو لا − ۱۷لا/۲۰ = ۳لا/۲۰ = مردمان جو باقی رہے اور تین پانچوین حصے باقی کے یعنی ۹لا/۱۰۰ = مردمان غیر حاضر کے

تو ۱۷لا/۲۰ + ۹لا/۱۰۰ + ۴۸ = لا = کل مردمان پلٹن اور

۱۷ لا + ۹لا/۵ + ۹۶۰ = ۲۰ لا اور ۸۵ لا + ۹ لا + ۴۸۰۰ = ۱۰۰ لا

یعنی ۱۰۰ لا − ۸۵ لا − ۹ لا = ۶ لا = ۴۸۰۰ اور لا = ۴۸۰۰/۶ = ۸۰۰

۶ ایک ایسی کسر ہے کہ اگر ہم اوسکی شمارکنندہ پر ۳ زیادہ کرین تو کسر = ۱/۳ ہو جاتی ہے اور اگر ہم اوسی کسر کے نسب نما سے ۱ کو تفریق کرین تو وہ کسر = ۱/۵ وہ کسر کیا ہے فرض کرو کہ لا = شمارکنندہ اور د = نسب نما کے

تو (لا + ۳)/د = ۱/۳ اور لا/(د − ۱) = ۱/۵ یعنی

{ ۳ لا + ۹ = د ، ۵ لا = د − ۱ } یعنی { د − ۳ لا = ۹ (ل) ، د − ۵ لا = ۱ (م) } مساوات (ل) سے

مساوات (م) کو تفریق کرو تو حاصل تفریق ۲ لا = ۸ اور لا = ۴ اور

۳ لا + ۹ = ۱۲ + ۹ = ۲۱ = د پس معلوم ہوا کہ کسر مطلوبہ = ۴/۲۱ ہے

۷ آ اور ب نامی دو شخص کچھ روپیہ الگ الگ رکھتے ہیں آ نے ب سے یہہ کہا کہ اگر تم مجھے ۱۵ روپیے اپنے روپیوں میں سے دو تو میری پاس پانچ گنے روپیے اوس روپئی سے ہوجاینگی جو تمہاری پاس باقی رہنگی بعد ازاں ب نے کہا کہ اگر تم مجھے پانچ روپیے دو تو ہماری تمہاری پاس روپے برابر ہوجاینگی بتاو کتنے کتنے روپیے ہر شخص کے پاس تھے

فرض کرو کہ لا = اوسکے روپیہ ہے } تو لا + ۱۵ = روپیہ جو آ پاس ہوگیا بعد وصول ۱۵ روپیہ کے ب سے اور

اور د = ب کے روپیہ ہے } ∴ د − ۱۵ = روپیے جو ب پاس باقی رہا

اور د + ۵ = روپیہ جو ب پاس ہوگیا بعد وصول ۵ روپیہ کے آ سے اور لا − ۵ = روپیہ جو آ پاس باقی رہے تو موافق شرایط سوال کے

لا + ۱۵ = ۵ (د − ۱۵) = ۵ د − ۷۵ اور د + ۵ = لا − ۵

یعنے ۵ د − لا = ۹۰ (ل) } تفریق کرو مساوات (ل) سے

د − لا = ۱۰ (م) } مساوات (م) کو

تو حاصل تفریق یہہ ہی ۴ د = ۱۰۰ اور د = ۲۵ = روپیہ ب کے اور مساوات (۲) سے

لا = د + ۱۰ = ۲۵ + ۱۰ = ۳۵ = روپئی آ کے

۸ ایک ایسا عدد ہی کہ خواہ اوسی دو مساوی حصوں میں خواہ تین مساوی حصوں میں تقسیم کرو تو دونوں صورتوں میں حاصل ضرب اقسام کا ایک ہی مقدار ہوتا ہی فرض کرو کہ لا = عدد مطلوبہ کی تو بموجب شرایط سوال کے

لا/۲ × لا/۲ = حاصل ضرب دو مساوی اقسام کی اور

لا/۳ × لا/۳ × لا/۳ = حاصل ضرب تین مساوی اقسام کے اور موافق شرط سوال کے

لا/۲ × لا/۲ = لا/۳ × لا/۳ × لا/۳ یعنے

لا²/۴ = لا³/۲۷ اور ۴ لا³ = ۲۷ لا² اور ۴ لا = ۲۷

اور لا = ۲۷/۴ = ۶ ۳/۴ = عدد مطلوبہ ہے

۹ ایک عدد دو مرتبہ کا ہی اور مجموعہ اوسکی دو مرتبہ کے ارقام کا = ۵ اور اگر ۹ کو عدد مذکور پر زیادہ کریں تو ارقام مرتبے کے اولٹے ہوجاتے ہیں یعنے جو رقم اکائی کے مرتبہ پر تھی وہ دہائی کے مرتبہ پر آجاتی ہی اور بالعکس فرض کرو کہ لا = رقم دہائی کے مرتبہ کے اور د = رقم اکائی کے مرتبہ کی تو ظاہر ہی کہ عدد = ۱۰ لا + د اور ۱۰ د + لا = عدد کے اوس حالت میں جب اوسکی ارقام بلحاظ مرتبہ کے اولٹا دینگے تو موافق شرایط

سوال سے کہ لا+د = ۵ (ل)

۱۰ لا + د + ۹ = ۱۰ د + لا یا ۹ لا - ۹ د = - ۹ یا لا - د = - ۱ (م)

تفریق کرو مساوات (م کو مساوات (ل) سے تو ۲ د = ۶ اور د = ۳ اور لا = ۵ - د = ۵ - ۳ = ۲

اور عدد مطلوبہ = ۱۰ لا + د = ۲۰ + ۳ = ۲۳ زیادہ کرو ۹ اس عدد پر تو مجموعہ

= ۹ + ۲۳ = ۳۲ = عدد کی اوس حالت مین جب اوسکے مرتبہ کے ارقام اولٹ گئے ہین

۱۰ وہ عدد کونسا ہی کہ اگر اوسکے ضعف پر ۱۸ زیادہ کیئے جائین تو مجموعہ مساوی ہو ۸۲ کے اب فرض کرو عدد مطلوبہ = لا کے تو بموجب شرایط سوال کے یہہ مساوات حاصل ہوتی ہی ۲ لا + ۱۸ = ۸۲ اور بعد علامت ابدال کے ۲ لا = ۶۴ ∴ لا = ۳۲ تو معلوم ہوا کہ عدد مطلوبہ ۳۲ ہی

۱۱ وہ عدد کونسا ہی جسکے ضعف پر (۴۴) زیادہ کیئے جائین تو مجموعہ مساوی ہو چوگنے عدد مطلوبہ کے اب فرض کرو لا = عدد مطلوبہ کے تو بموجب شرایط سوال کے ۲ لا + ۴۴ = ۴ لا یا بعد ابدال ۲ لا = ۴۴

∴ لا = ۲۲

۱۲ وہ کونسا عدد ہی کہ جسکا ضعف زیادہ ہی نصف اوسی عدد سے بقدر چھہ کی یعنے نصف عدد مطلوبہ کم ہو ضعف عدد مطلوبہ سے بمقدار چھہ کے فرض کرو لا = عدد مطلوبہ کے تو بموجب شرط سوال کے

$\frac{لا}{۲}$ = ۲ لا - ۶ بعد دور کرنی کسر کے لا = ۴ لا - ۱۲ یا ۳ لا = ۱۲ ∴ لا = ۴ = عدد مطلوبہ کے

۱۳ دو مسافر دو شہرون سے کہ بفاصلہ ۱۸۷ کوس کے ہین واسطے ملاقات کی ایک ہی وقت مین گئے اور ہر ایک اونمین سے ایک دن مین ۸ کوس طے کرتا تھا اور دوسرا ۹ کوس اب دریافت کیا چاہتے ہین ہم یہہ بات کہ کتنے دنون کے بعد وہ ایک دوسرے سے ملین گے اور ہر ایک اونمین سے کتنی مسافت طی کریگا فرض کرو لا = تعداد دنون مطلوبہ کے تو ظاہر ہی کہ ۸ لا = اوس مسافت کے جو ایک نے اونمین سے طی کی اور ۹ لا = اوس مسافت کے جو دوسری نے طی کی ہی اور چونکہ بموجب فرض کے بعد طی کرنے اپنی مسافت کے وہ ملتی ہین تو ظاہر ہی کہ مسافت دونو کی ملکر مساوی ہوگی ۱۸۷ کے

یعنے ۸ لا + ۹ لا = ۱۸۷ یا ۱۷ لا = ۱۸۷ ∴ لا = ۱۱ = دنون کے جنمین وہ دونو ایک دوسرے سے ملین گے اور ۸۸ کوس مساوی اوس مسافت کے جو ۸ کوس چلنے والے نے طی کی اور ۹۹ کوس مساوی اوس مسافت کی جو نو کوس چلنے والے نے طی کی

۱۴ ایک شخص بارادہ تقسیم ۶۰ روپیہ کی گھر سے باہر نکلا چار فقیر اوسکو ملے اوسنی دوسرے کو دوگنا دیئے اور تیسری کو تگنا اور چوتھی کو چوگنا دیا اول سے بتاؤ اوسنی ہر ایک کو کیا کیا دیا پس فرض کرو کہ لا = اون روپیون

جو اوسنی اول کو دیئے

اور ۲ لا = اون روپیون جو دوسرے کو دیئے

اور ۳ لا = اون کے جو تیسری کو دیئے

اور ۴ لا = اون سے کے جو چوتھے کو دیئے

∴ لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا = ۶۰

یا ۱۰ لا = ۶۰

∴ لا = ۶

یعنی اوسنے ۶ اور ۱۲ اور ۱۸ اور ۲۴ روپیئے علیحدہ علیحدہ ہر ایک کو دیئے

۱۵ ایک کتاب فروش نے دس کتابین کسی خاص قیمت کو فروخت کین اور بعد ازان ۵ کتابین اسی نرخ سے فروخت کین لیکن بہ نسبت پہلی کے ۳۵ روپیئے اوسنی زیادہ لیئے بتاؤ کیا ہی قیمت ہر ایک کتاب کے

فرض کرو لا = قیمت کتاب کے تو ۱۰ لا = اون روپیون کے جو اوسنے اول دفعہ بیچنے سے پائے

اور ۱۵ لا = اون روپیون کے جو دوسری دفعہ حاصل کیئے لیکن موافق شرط سوال کے

۱۰ لا + ۳۵ = ۱۵ لا یا بعد ابدال کے ۵ لا = ۳۵ ∴ لا = ۷

۱۶ تین شخص (ا) اور (ت) اور (س) ۱۴۰ روپیہ مین اپنا اپنا حصہ کچھ رکھتی تھے اسطرح کہ روپیہ (ا) کا ضعف روپیہ (ت) کا اور روپیہ (ت) سہ چند روپیہ (س) کا تھا بتاؤ ہر ایک کا روپیہ کتنا تھا

فرض کرو لا = حصہ (س) تو بموجب فرض کے ۳ لا = حصہ (ت) کے

اور ۶ لا = حصہ (ا) کے

اور یہی مجموعہ انکا مساوی ہی ۱۴۰ کے تو لا + ۳ لا + ۶ لا = ۱۴۰ یعنی ۱۰ لا = ۱۴۰ ∴ لا = ۱۴

یعنی حصہ (س) کا ۱۴ ہی اور حصہ (ت) کا ۴۲ اور حصہ (ا) کا ۸۴

۱۷ چار سوداگر مثلاً آ ت س د نے بارادہ سوداگری کے ۴۷۵۵ روپیہ جمع کیا اسی تفصیل سے کہ ت نے سہ چند آ سے دیا اور س نے مجموعہ اون روپیونکا جو ت اور آ نے دیا اور د نے مجموعہ اون روپیونکا جو س اور ت نی دیا بتاؤ کتنا روپیہ ہر ایک نے دیا فرض کرو لا = تعداد اوس روپیہ کے جو آ نے دیا تو ۳ لا = اوس روپیہ کے جو ت نے دیا

اور ۴ لا = اوس روپیہ کے جو س نے دیا

اور ۷ لا = اوس روپیہ کے جو د نے دیا

لیکن مجموعہ ان سب روپیون کا = ۴۷۵۵ ہے یعنے

لا + ۳لا + ۴لا + ۷لا = ۴۷۵۵

یا ۱۵لا = ۴۷۵۵

∴ لا = ۳۱۷ = اوس روپیہ کی جو آپ نے دیا

اور ۹۵۱ = اوس روپیہ کے جو ب نے دیا

اور ۱۲۶۸ = روپیہ ت سے کے اور ۲۲۱۹ = روپیہ د سے کے

۱۸ ایک سوداگر نے تین تہان خریدے اس تفصیل سے کہ طول دوسرے کا بہ نسبت اول کے ۱۵ گز زیادہ تہے اور طول تیسری کا بہ نسبت دوسرے کے ۲۴ گز زیادہ تہا لیکن مجموعہ گزون تینون تہانون کا مساوی ۱۵۹ کے تہے تو بتاؤ طول ہر ایک تہان کا کیا ہی فرض کرو لا = تعداد گزون طول تہان اول کے تو بموجب شرائط سوال کے

لا + ۱۵ = تعداد گزون طول تہان دوسرے کے اور

لا + ۳۹ = تعداد گزون طول تہان تیسرے کے

لیکن مجموعہ گزون تینون تہانون کا = ۱۵۹ تو معلوم ہوا کہ

لا + لا + ۱۵ + لا + ۳۹ = ۱۵۹ یعنے ۳لا + ۵۴ = ۱۵۹

یا ۳لا = ۱۰۵ ∴ لا = ۳۵ = طول تہان اول کے

اور ۵۰ = گزون طول تہان دوسرے کے اور ۷۴ = طول تہان تیسرے کے

۱۹ ایک برتن میں کچہہ سرکہ اور کچہہ شہد اور کچہہ پانی تہا اس تفصیل سے کہ سرکہ بہ نسبت شہد کی ۱۵ سیر زیادہ تہا اور پانی مساوی تہا مجموعہ شہد اور سرکہ کے لیکن مجموعہ ان تینون چیزون کا ۱۴۶ سیر تہا تو بتاؤ کتنی کتنی ہر چیز اوسمین تہی + فرض کرو لا = سیرون شہد کی تو بموجب سوال کے

لا + ۱۵ = سیرون سرکہ کے

اور ۲لا + ۱۵ = سیرون پانی کے

لیکن ۴لا + ۳۰ = ۱۴۶ یا ۴لا = ۱۱۶ ∴ لا = ۲۹ تو معلوم ہوا کہ شہد (۲۹) سیر تہا اور سرکہ (۴۴) سیر اور پانی ۷۳ سیر

۲۰ ایک شخص نے ۴ مزدورون کو اس تفصیل سے روپئے دیئے کہ اول کو دو روپیہ زیادہ بہ نسبت دوسری کے اور دویم کو تین روپئے زیادہ بہ نسبت تیسری کے اور تیسرے کو چار روپئے زیادہ بہ نسبت چوتہے کے لیکن کل روپئے جو اونے چارون کو دیئے مساوی (۴۲) کے ہین بتاؤ اوسنے ہر ایک کو کیا کیا دیا

ع ف اور د ج میں سے گذرنے والی سطح کے ذریعہ منشورنما کو دو فانوں ا ب ج د ع ف اور ع ف گ ہ ج د میں منقسم کرو۔

فرض کرو کہ ا ب، ع ف، ک ل، ا د، ع ہ اور ک ن کے ناپ اُسی طولی اکائی کے لحاظ سے بالترتیب $ل_۱، ل_۲، ل، ض_۱، ض_۲، ض$ ہیں۔

فرض کرو کہ فانوں ا ب ج د ع ف اور ع ف گ ہ ج د کے ناپ متناظر مکعب اکائی کے لحاظ سے بالترتیب $ح_۱$ اور $ح_۲$ ہیں۔

تب —

$$ح_۱ = \frac{ع ض_۱}{۶}(۲ ل_۱ + ل_۲) \text{ . . . . دفعہ ۱۴۶}$$

اور

$$ح_۲ = \frac{ع ض_۲}{۶}(۲ ل_۲ + ل_۱) \text{ . . . . دفعہ ۱۴۶}$$

$$\therefore ح = ح_۱ + ح_۲ = \frac{ع}{۶}(۲ ل_۱ ض_۱ + ل_۲ ض_۱ + ۲ ل_۲ ض_۲ + ل_۱ ض_۲)$$

$$= \frac{ع}{۶}(ل_۱ ض_۱ + ل_۱ ض_۱ + ل_۲ ض_۲ + ل_۲ ض_۲ + ل_۲ ض_۱ + ل_۱ ض_۲)$$

$$= \frac{ع}{۶}\{(ل_۱ + ل_۲)(ض_۱ + ض_۲) + ل_۱ ض_۱ + ل_۲ ض_۲\}$$

$$= \frac{ع}{۶}\{(۲ ل \times ۲ ض) + ل_۱ ض_۱ + ل_۲ ض_۲\}$$

$$= \frac{ع}{۶}(۴ ق + ق_۱ + ق_۲)$$

پس قاعدہ —

منشورنما کے سروں میں کی کسی مربع اکائیوں کی تعداد میں سروں کے متوازی اور اُن کی وسطی تراش میں کی اُن ہی مربع اکائیوں کی تعداد کا چار گنا جمع کرو پھر اِس مجموعہ کو اس کے ارتفاع میں کی متناظر طولی اکائیوں کی تعداد سے ضرب دو تب اس

لا = حصہ اول کے بموجب سوال کے

لا - ۱۰ = حصہ دوسرے کے

اور لا - ۱۴ = حصہ تیسرے کے

اور لا - ۲۵ = حصہ چوتھے کے

اور لا - ۲۸ = حصہ پانچوین کے

اور لا - ۳۳ = حصہ چھٹے کے

تو اب چونکہ مجموعہ ان سب کے حصوں کا مساوی ہی تگنی حصہ اول مع ۱۰ کو تو معلوم ہوا کہ

۶ لا - ۱۱۰ = ۳ لا + ۱۰ اسیواسطی ۳ لا = ۱۲۰

∴ لا = ۴۰ = حصہ اول کے اور ۳۰ = حصہ دویم کے

اور ۲۶ = حصہ سویم کے اور ۱۵ = حصہ چہارم کے اور

۱۲ = حصہ پنجم کے اور ۷ = حصہ ششم کے

۲۳ تقسیم کرو عدد ۹۹ کو ایسی پانچ حصوں مین کہ اول زیادہ ہو دوسرے سے ۳ اور کم ہو بہ نسبت تیسری کے ۱۰ اور زیادہ ہو بہ نسبت چوتھی کے ۹ اور کم ہو بہ نسبت پانچوین کے ۱۶ فرض کرو

لا = حصہ اول کے تو بموجب سوال کے

لا - ۳ = حصہ دویم کے

اور لا + ۱۰ = حصہ سویم کے

اور لا - ۹ = حصہ چہارم کے

اور لا + ۱۶ = حصہ پنجم کے

∴ لا + لا - ۳ + لا + ۱۰ + لا - ۹ + لا + ۱۶ = ۹۹

∴ ۵ لا + ۱۴ = ۹۹

∴ بعد ابدال کے ۵ لا = ۸۵

اور لا = ۱۷ = حصہ اول کے اور باقی حصہ ۱۴ اور ۲۷ اور ۸ اور ۳۳

۲۴ دو عدد کونسی ہین کہ جنکا مجموعہ ۵۹ ہی اور حاصل تفریق ۱۷ فرض کرو

لا = چھوٹے عدد کے تو بموجب سوال کے

لا + ۱۷ = بڑے عدد کے

اور ٣٤ + لا + ١ = ٥٩ یا بعد ابدال کے ٢ لا = ٤٢

∴ لا = ٢١ = چھوٹے عدد کی

اور ٣٨ = بڑے عدد کے

٢٥ کون عدد ہی کہ سہ چند اوسکا ١٢ اکے ٥٤ سے اتنا زیادہ ہی جیسا کہ سہ چند اوسکا کم ہی ایک سو چوالیس سے فرض کرو لا = عدد مطلوبہ کی تو بموجب سوال کے ٣ لا + ١٢ − ٥٤ = ١٤٤ − ٣ لا

یا بعد ابدال کے ٦ لا = ١٨٦ ∴ لا = ٣١ = عدد مطلوبہ کے

٢٦ دو شخص قمار باز کہ مساوی روپیہ رکھتے تھے جوا کھیلنے لگے تو اول شخص ١٤ ہارا اور دوسرا شخص ٢٤ جیتا اور بعد کھیل کے معلوم ہوا کہ پاس دوسرے کے دو چند تھا اوس روپیہ کا جو اول پاس بچا تھا کہو ہر ایک پاس کتنا روپیہ تھا فرض کرو لا = اون روپیون جو دونو پاس تھے اور لا − ١٤ = اوس روپیئے کے جو ایک پاس بچے اور لا + ٢٤ = اوس روپیہ کے جو دوسرے پاس تھے لیکن بموجب سوال کے لا + ٢٤ = ٢ لا − ٢٨ تو بعد ابدال کے لا = ٥٢ = برابر اوس روپئے کے جو ہر ایک پاس تھے

٢٧ دو فریق آدمیون کے کہ مجموعہ اونکا ٩٤٣ تھا ایک امر مین بحث کرتی تھی اوسکے ہونے اونھونے مین لیکن جو کہ اقرار ہونیکا کرتے تھے ٦٥ زیادہ تھے بہ نسبت دوسرے کے تو بتاؤ کتنے ایک طرف تھے اور کتنے ایک طرف فرض کرو لا = تعداد آدمیون اوس فریق کے جو انکار کرتے تھے تو بموجب سوال کے لا + ٦٥ = تعداد اون آدمیون کے جو کہ اقرار امر مذکور کا کرتے تھے لیکن مجموعہ ان دونو کا مساوی ٩٤٣ کے یعنی لا + لا + ٦٥ = ٩٤٣ یا ٢ لا + ٦٥ = ٩٤٣ یا بعد ابدال کے ٢ لا = ٨٧٨

∴ لا = ٤٣٩ = تعداد اوس فریق کے جو انکار کرتے تھے اور ٥٠٤ = تعداد اوس فریق کے جو اقرار کرتے تھے

٢٨ دو چورون نے لوٹ مین ٣٥ روپئے لوٹے اگر ایک پاس اونمین سے چار روپیہ زیادہ ہوتے تو اوس پاس دو گنے روپیہ ہوتی بہ نسبت دوسرے کے بتاؤ کتنے کتنے روپیہ ہر ایک پاس تھے فرض کرو لا = حصہ ایک چور کے تو بموجب سوال کے ٣٥ − لا = حصہ دوسرے چور کے اور لا + ٤ = ٧٠ − ٢ لا

اور بعد ابدال کے ٣ لا = ٦٦ ∴ لا = ٢٢ = حصہ ایک چور کے اور ١٣ = حصہ دوسرے چور کے

٢٩ چار ٹکڑے ریشم کے متساوی تھے جبکہ نکال ڈالے تین مین سے ١٩ ١٩ گز اور چوتھے مین سے ١٧ گز اور باقی کو جمع کیا تو مجموعہ ہوا ١٤٢ بتاؤ طول چارون کا کیا تھا فرض کرو طول ہر ایک ٹکڑے کا اونمین سے = لا تو اسیواسطے بموجب سوال کے لا − ١٩ + لا − ١٩ + لا − ١٩ + لا − ١٧ = ١٤٢

یعنے ٤لا − ٢٦ = ٢٤٢ یا بعد ابدال کے ٤لا = ٢١٦ ∴ لا = ٥٤ یعنے ہر ایک ٹکڑا چار ٹکڑوں ریشم کا ٥٤ ، ٥٤ ، ٥٤ ، ٥٤ گز تھا

٣٠ دو ریوڑ مساوی بکریوں مین سے صاحب ریوڑ نے کچھ بکریاں بیچین اسطرح کہ ایک مین سے ٣٩ اور دوسرے مین سے ٩٣ لیکن بعد فروخت کی معلوم ہوا کہ جنمین ٩٣ بیچی گئی ہین وہ دوگنا ہی بہ نسبت دوسرے کے تو بتاؤ کتنی بکریاں ہر ایک مین اون دونوں سے تہی فرض کرو لا = تعداد ایک کے اون دونو مین سے تو موجب سوال کے لا − ٣٩ = ٢لا − ١٨٦ یا بعد ابدال کے لا = ١٤٧ = تعداد ایک ریوڑ کے

٣١ ایک سوداگر نے ١٢ گز کپڑا کچھ اونمین سے فی گز ١٩ روپیہ کے نرخ سے اور باقی فی گز ١٧ روپیہ کے نرخ سے خریدا لیکن کل کپڑا ٢١٤ روپیہ کا خریدا بتاؤ کتنے گز اوسمین سے فی گز ١٩ روپیہ کے نرخ سے اور کتنے فی گز ١٧ روپیہ کے نرخ سے خریدا فرض کرو لا = اون گزون کے جو فی گز ١٩ روپیہ کے نرخ سے خریدا اور اسیواسطی ١٢ − لا = اون گزون کے جو فی گز ١٧ روپیہ کے نرخ سے خریدا اور ١٩لا = قیمت اون گزون کی جو فی گز ١٩ روپیہ کے نرخ سے خریدا اور ١٧ × (١٢ − لا) = قیمت اون گزون کے جو ١٧ روپیہ کے نرخ سے خریدا گیا ∴ ١٩لا + ٢٠٤ − ١٧لا = ٢١٤ اور بعد ابدال کے ٢لا = ١٠ اور لا = ٥ = مساوی اون گزون کے جو ١٩ روپیہ کے نرخ سے خریدا گیا اور ٧ = مساوی اون گزون کے جو فی گز ١٧ روپیہ نرخ سے خریدا گیا

٣٢ تقسیم کرو عدد ١٩٧ کو ایسی دو حصہ غیر مساوی مین کہ چہار چند بڑے حصہ کا پانچ گنے چھوٹے سے ٥٠ زیادہ ہو فرض کرو لا = چھوٹے عدد کے تو موجب سوال کے ١٩٧ − لا = بڑے عدد کے اور ٧٨٨ − ٤لا = ٥لا + ٥٠ اور بعد ابدال کے ٩لا = ٧٣٨ ∴ لا = ٨٢ = چھوٹے قسم کے اور ١١٥ = بڑے قسم کے

٣٣ ایک شخص قاصد کہ ٦٠ میل ایک روز مین چلتا ہی ایک جای روانہ کیا گیا تہا لیکن بعد پانچ روز کے ایک اور قاصد واسطی اوسکے بلانی کے بھیجا گیا اور قاصد دویم ٧٥ کوس روز چلتا ہی تو بتاؤ کتنی روز مین قاصد اول کو پکڑیگا فرض کرو لا = تعداد دنون کے جتنی دنوں مین قاصد دویم قاصد اول کو پکڑیگا اور لا + ٥ = تعداد اون دنون کے جو قاصد اول نے اونمین مسافت طی کی ∴ ٧٥ لا = اوس مسافت کے جو قاصد دویم نے طے کی اور ٦٠لا + ٣٠٠ = اوس مسافت کی جو قاصد اول نے طی کی لیکن چونکہ بعد اپنی مسافت کی دونوں ملجائینگی تو معلوم ہوا ٧٥لا = ٦٠لا + ٣٠٠ اور بعد ابدال کے ١٥لا = ٣٠٠ ∴ لا = ٢٠ مساوی تعداد دنون پکڑنے کے

۳۴ دو شخص آ اور ب کے پاس ٦٠ روپیہ تھے آ نے ب کو دس روپے دیئے اور بعد اسکے آ پاس اتنے روپئے رہی کہ اگر ٨ روپیہ اور اوسکے پاس ہون تو وہ برابر اون روپیون سے جو ب پاس ہوگئے فرض کرو لا = اون روپیون سے جو آ پاس تہے تو ٦٠ - لا = اون روپیون سے جو ب پاس تہے اور لا - ١٠ = اون روپیون سے جو آ پاس رہے اور ٧٠ - لا = اون روپیون سے جو ب پاس ہوگئے لیکن بموجب سوال کے

لا - ١٠ + ٨ = ٧٠ - لا یا لا - ٢ = ٧٠ - لا یا ٢ لا = ٧٢ ∴ لا = ٣٦ مساوی اون روپیون کے جو آ پاس تہے اور ٢٤ مساوی اون روپیون سے جو ب پاس تہے

۳۵ دو شخصون آ اور ب نے کہ مساوی روپیہ ملا کر تجارت کی تہے اس تفصیل سے فائدہ حاصل کیا کہ آ نے سہ چند اپنی مال مع ٢٧ کے اور ب نے دو چند اپنی مال کا مع ١٥٣ کے لیکن کل نفع = ہی پانچ سے گنے حصہ ایک کو اونین سے بتاو حصہ اونکا کیا تہا یعنے اونہون نے کتنا کتنا روپیہ ملا کر تجارت کی ہی فرض کرو لا = حصہ آ کے یا ب کے تو اسیواسطی فائدہ جو کہ آ نے حاصل کیا مع اوسکے مال کے = ٣ لا + ٢٧ اور فائدہ جو ب نے حاصل کیا مع اوسکی مال کے = ٢ لا + ١٥٣ اور چونکہ مال دونونکا = ٢ لا اور حاصل جمع فائدونکا = ٥ لا تو معلوم ہوا ٣ لا + ١٨٠ = ٥ لا یا ٢ لا = ١٨٠ ∴ لا = ٩٠ تو معلوم ہوا کہ اونہون نے ٩٠ ٩٠ روپئی ملا کر تجارت کی ہتی

۳۶ دو کاریگر مثلا آ اور ب کو ٦٠ پیسی روز مزدوری پاتے تہے پچاس دن تک مزدوری کرتے رہے اور خرچ بہی کرتے رہیے لیکن آ بہ نسبت ب کے چہ پیسی روز کم خرچ کرتا تہا تو بعد پچاس دنکی معلوم ہوا کہ آ پاس پیسے دو چند ب کے پیسون سے مع اوسکی دو دنکی خوراک کے جمع ہوئے بتاو ہر روز ہر ایک اونمین سے کیا خرچ کرتا تہا فرض کرو لا = اون پیسون کے جو آ ہمیشہ خرچ کرتا تہا اور ٦٠ - لا = اوس پیسے کے جو ہر روزہ اوسکی پاس بچتا تہا اور لا + ٦ = اون پیسون سے جو ب ہر روزہ خرچ کرتا تہا اور ٥٤ - لا = اون پیسون کے جو ب ہر روز بچاتا تہا اور ٣٠٠٠ - ٥٠ لا = تمام بچت کے جو کہ آ نے جمع کیا اور ٢٧٠٠ - ٥٠ لا = اون پیسون سے جو ب پاس جمع ہوئے لیکن بموجب سوال کے

٣٠٠٠ - ٥٠ لا = ٥٤٠٠ - ١٠٠ لا + ٢ لا اور بعد ابدال کے ٤٨ لا = ٢٤٠٠ ∴ لا = ٥٠ اور اس سے معلوم ہوا کہ آ ہر روزہ پچاس پیسے خرچ کرتا تہا اور ب ٥٦ پیسے

۳۷ آ اور ب نے مساوی روپیہ سے تجارت کرنی شروع کی آ نے اول سال مین ٤٠ روپیئے حاصل کیئے اور ب نے اوسی سال ٤٠ کہوئیے بعدہ دوسرے سال مین آ نے تہائی اوس روپئی کے

جو اوسکے پاس ہوگئے تہے کہوسئے اور ب سے نے حاصل کیا جو کچھ کہ آ سینے کہویا تہا اگر اوسکو دوچند کرکے ۴۰ نکال لیتی لیکن پہر معلوم ہوا کہ ب پاس دوچند روپیہ ہی بہ نسبت آ کے فرض کرو لا = اوس مال کے کہ ہرایکنے اونمین سے تجارت کرنی شروع کی تہی ∴ لا + ۴۰ = روپئے اول سال آ کے

اور لا − ۴۰ = روپئے اول سال ب کی اور لا + ۴۰ − (لا + ۴۰)/۲ = روپیہ سال دویم آ کے

اور لا − ۴۰ + (۲لا + ۸۰)/۳ − ۴۰ = روپیہ سال دویم ب کے

∴ لا − ۴۰ + (۲لا + ۸۰)/۳ − ۴۰ = ۲لا + ۸۰ − (۲لا + ۸۰)/۳ سے یعنی

۳لا − ۱۲۰ + ۸۰ + ۲لا − ۱۲۰ = ۶لا + ۲۴۰ − ۲لا − ۸۰ اور بعد ابدال سے کے

لا = ۳۲۰ مساوی اوس رقم کے جس سے ہرایکنے تجارت کرنی شروع کی تہی

۴۸ تقسیم کرو عدد ۶۸ کو ایسے دو اقسام مختلف مین کہ حاصل تفریق بڑے کا ۸۴ سے مساوی ہو سہ چند حاصل تفریق چہوٹے کو ۴۰ مین سے فرض کرو لا = چہوٹے عدد کے ∴ ۶۸ − لا = بڑی عدد کے اور بموجب سوال سے کے ۸۴ − (۶۸ − لا) = ۱۲۰ − لا × ۳ سے یعنی

۸۴ − ۶۸ + لا = ۱۲۰ − ۳لا اور بعد ابدال سے کے ۴لا = ۱۰۴ ∴ لا = ۲۶ = چہوٹے عدد کے اور ۴۲ = بڑے عدد کے

۴۹ وہ کونسا عدد ہے جسکی چوتہائی پر ۱۶ زیادہ کرین تو تہائی اوس عدد کی ہو لا = عدد مطلوب کے تو اب بموجب سوال کے لا/۴ + ۱۶ = لا/۳ ∴ ۳لا + ۱۹۲ = ۴لا ∴ بعد ابدال کے لا = ۱۹۲

۵۰ ایک شخص نے کچھ اناج بویا تہا جب وہ تیار ہوا تو معلوم ہوا کہ ۴۸ من اناج پیدا ہوا اور پہلے اناج بوئی ہوئے سے ایک تہائی زیادہ ہی بتاو اناج کتنا پہلے بویا تہا فرض ۳لا = اناج پہلے بوئے ہوئے کے ∴ ۳لا + لا = ۴۸ یعنی لا = ۱۲ ∴ اناج جو اوسنے پہلی بویا تہا ۳۶ من تہا

۵۱ ایک شخص نے اپنی ایک گٹھے گہاس کی چوتہائی در نصف کو بیچ ڈالا جسکا مجموعہ = ۹۶ من کے تہا پس بتاو سب گٹہا گہانس کا کتنے من کا تہا فرض کرو ۴لا = تعداد من گٹھے کے ∴ ۲لا + لا = ۹۶ یعنی ۳لا = ۹۶ ∴ لا = ۳۲ اور ۱۲۸ = تعداد من گٹھے کے

۵۲ ایک شخص نے دو نوکرون کو ۲۱۰ روپیہ اس تفصیل سے دیئے کہ ایک کو بہ نسبت دوسرے کے آدہا دیا تو بتاو ہرایک کو کتنا کتنا روپیہ دیا فرض کرو لا = اوس آدمی کے روپیہ کے جس پاس کم ہین تو بموجب سوال کے ۲لا = حصہ اوس نوکر کے جس پاس روپیہ مضعف ہین بہ نسبت دوسرے کے لیکن ۲لا + لا = ۲۱۰ یا ۳لا = ۲۱۰ ∴ لا = ۷۰ حصہ ایک نوکر کے اور ۱۴۰ = حصہ نوکر دوسرے کے

۴۳ دو عدد کونسی ہین کہ اونمین وہ نسبت ہی جو ۲ کو ۳ سے ہے اور اگر ہر واحد پر اون دونون مین سے
چار چار بڑہائی جاوین تو مجموعون کو آپسمین وہی نسبت ہوگی جو ۵ رکھتا ہی ۷ سے تو بموجب شرائط سوال کے
۲ لا = ایک عدد کی اور ۳ لا = دوسرے عدد کی اور ۲ لا + ۴ : ۳ لا + ۴ :: ۵ : ۷ سے
اور ۱۴ لا + ۲۸ = ۱۵ لا + ۲۰ ∴ بعد ابدال کے لا = ۸ اور ۱۶ = ایک عدد کے اور ۲۴ = دوسرے عدد کے

۴۴ ایک شخص کو کچھ گوشت درکار رہتا وہ بازار کو کچھ پیسے لیکر خریدنے گیا اور دل مین سوچا کہ اگر ہرن کا گوشت
جو چار پیسے سیر ہی لیجئے تو کچھ نہین بچتا اور اگر بہیڑ کا گوشت جو ساڑہے تین پیسے سیر ہی لیجئے تو ۴ پیسے بچتے
ہین بتاو کتنا گوشت اوسکو درکار رہتا فرض کرو ۲ لا = سیرون گوشت کی ∴ ۸ لا = قیمت گوشت ہرن کے
اور ۷ لا = قیمت گوشت بہیڑ کے اور بموجب سوال کے ۸ لا − ۷ لا = ۲۴ یا لا = ۲۴ = نصف
تعداد سیرون گوشت کی اور کل تعداد = ۴۸

۴۵ ایک مچھلی ہی کہ اوسکی دم ہی ۹ سیر کی اور دہڑ ہی اتنا جتنا اوسکا سر اور دم اور سر اوسکا اتنا
وزنی ہی جتنی ساری دم اور آدہا دہڑ بتاو مچھلی کتنی وزنی ہی فرض کرو ۲ لا = تعداد سیرون دہڑ کے
تو ∴ لا + ۹ = سر مچھلی کے لیکن بموجب فرض کے ۲ لا = لا + ۹ + ۹ ∴ لا = ۱۸ = اصل تعداد
سیرون دہڑ مچھلی کے اور ۳۶ + ۱۸ + ۹ + ۹ = ۷۲ = تعداد سیرون مچھلی کے

۴۶ ایک سیدہ مین چار مقام آ ف س د ہین کسی خاص فاصلہ پر یعنے آ سے د تک ۳۴ میل اور
فاصلہ آ کا ف تک : فاصلہ س سے د تک :: ۲ : ۳ اور ایک ربع فاصلہ آ کا ف تک مع نصف فاصلہ
س کے د تک کما ہی فاصلہ ف سے س تک بتاو وے فاصلے کتنے ہین فرض کرو ۲ لا = فاصلہ کے
جو درمیان آ اور ف کے ہی ∴ ۳ لا = اوس فاصلہ کے جو درمیان س اور د کے ہی
اور $\left(\frac{لا}{۲} + \frac{۳لا}{۲}\right) = ۲لا = ۳$ ف س یعنے فاصلہ کے جو درمیان ف اور س کے ہی
∴ ف س = $\frac{۲}{۳}$ لا اور بموجب سوال کے $\left(۲لا + ۳لا + \frac{۲}{۳}لا\right) = \frac{۱۷لا}{۳} = ۳۴$
∴ $\frac{لا}{۳} = ۲$ اور لا = ۶ اور ۱۲ میل = فاصلہ آ اور ف کے اور ۱۸ = فاصلہ س اور د کے
اور ۴ میل = فاصلہ ف اور س کے

۴۷ وہ کونسا عدد ہی جس پر اگر علیحدہ علیحدہ زیادہ کرین ۱ ۵ ۱۳
تو مجموعہ اول : مجموعہ ثانی :: مجموعہ ثانی : مجموعہ ثالث سے فرض کرو لا = عدد مطلوبہ کے
تو لا + ۱ : لا + ۵ :: لا + ۵ : لا + ۱۳ تو بموجب قاعدہ تناسب کے لا + ۱ : ۴ :: لا + ۵ : ۸ اور بعد ابدال
نسبت کے لا + ۱ : لا + ۵ :: ۴ : ۸ :: ۱ : ۲ اور پہر بموجب قاعدہ تناسب کے

لا+۱ : ۴ :: ۱ : ۱ ∴ لا+۱ = ۴ اور لا = ۳

۴۸ ایک شخص مع اپنی زوجہ کی ایک برتن پانی کا ۱۲ دنین پی تا تہا لیکن جب وہ کہین جاتا تہا تو فقط اوسکی زوجہ اوسکو تیس دن مین پی تی تہی تو بتاؤ شخص مذکور اوسکو اکیلا کتنے دنونین پیئیگا فرض کرو لا = تعداد دنون مطلوبہ کے

تب لا : ۱۲ :: ۱ : اوس حصہ پانی سی جو مرد نی پیا ∴ ۱۲/لا = اوس حصہ کے جو مرد نی پیا

اور ۳۰ : ۱۲ :: ۱ : اوس حصہ پانی سے جو عورت نی پیا بارہ دنین سے یعنے حصہ عورت کا ۱۲ دن مین = ۱۲/۳۰ = ۲/۵ ∴ ۱۲/لا + ۲/۵ = ۱ اور ۶۰ + ۲ لا = ۵ لا سے یعنے ۳ لا = ۶۰ اور

∴ لا = ۲۰ = تعداد اون دنون سے کے جنمین کہ فقط شخص مذکور پانی پی لیگا

۴۹ ایک حوض ہی کہ اوسمین دو بمبہ پانی کے آ اور ب ہین اگر دونون برابر جاری رہین تو ۱۲ گھنٹے مین حوض مذکور پر ہوتا ہی اور اگر فقط ایک بمبہ آ جاری رہے تو بیس گھنٹہ مین پر ہوتا ہی پس اگر جاری رکہین فقط بمبہ ب کو تو بتاؤ حوض مذکور کتنے وقت مین پر ہوگا فرض کرو لا = تعداد اون گھنٹون سے کے جنمین حوض مذکور پر ہوگا

تب لا : ۱۲ :: ۱ : اوس حصہ پانی سے جو کہ بارہ گھنٹہ مین بمبہ ب سی آتا ہی ∴ ۱۲/لا = حصہ مذکور کے

اور اسیطور ثابت ہوسکتا ہی کہ وہ حصہ پانی کا جو ۱۲ گھنٹہ مین بمبہ آ سی آتا ہی = ۳/۵ ∴ ۱۲/لا + ۳/۵ = ۱

اور ۶۰ + ۳ لا = ۵ لا یا ۲ لا = ۶۰ ∴ لا = ۳۰ = گھنٹون مطلوبہ

۵۰ ایک تالاب ہی کہ اوسمین ۴۴۲ من پانی ہی اور اوسکو دو ڈولون سے کہ ایک اونین کا ضعف ہی بہ نسبت دوسرے کے خالی کرتے ہین اسطرحسی کہ بڑا ڈول تین منٹ مین دو دفعہ باہر کہینچتے ہین اور چہوٹا ڈول ۲ منٹ مین تین دفعہ کہینچ ڈالتے ہین تو بعد خالی ہونے تالاب کے معلوم ہوا کہ ۱۲ منٹ مین خالی ہوا بتاؤ مقدار ہر ایک ڈول کی کہ کتنا پانی اوسمین آتا تہا فرض کرو لا = تعداد منون پانی کے جو کہ چہوٹے ڈول مین آتا تہا

∴ ۲ لا = تعداد منون بڑے ڈول کے اور ۴ لا = اوس حصہ پانی کے جو تین منٹ مین بڑے ڈول سے نکلتا ہی ۳ : ۱۲ :: ۱ : ۴ :: ۴ لا : اوس پانی سے جو پہینکا گیا ۱۲ منٹ مین یعنے ۱۶ لا

اسیطور سی دریافت ہوسکتا ہی کہ پانی پہینکا گیا چہوٹے ڈول سے = ۱۸ لا

∴ (۱۶ لا + ۱۸ لا) = ۳۴ لا = ۴۴۲ ∴ لا = ۱۳ = تعداد منون چہوٹے ڈول کے

∴ ۲۶ = تعداد منون بڑے ڈول کے

۵۱ ایک خرگوش کہ جسکی تین چوکڑیون کے برابر دو چوکڑیان ایک شکاری کتے کی ہین اور جسوقت مین کہ خرگوش چار چوکڑیان بہرتا ہی اوسوقت وہی کتا تین چوکڑیان بہرتا ہی ۵۰ چوکڑیان آگی نکلے ہوے تہا تو اوسے بتاؤ کہ کتا کتنے چوکڑیون مین خرگوش کو پکڑیگا فرض کرو کہ ۳ لا = تعداد چوکڑیون کے جو کتا

وقت پکڑنے تک لیگا ∴ ٤ لا = تعداد چوکڑیون کے جو خرگوش اوسی وقت مین لیگا

∴ ٤ لا + ٥٠ = تمام چوکڑیون خرگوش کے اور ٢ : ٣ :: ٣ لا : ٤ لا + ٥٠

∴ ٩ لا = ٨ لا + ١٠٠ ∴ لا = ١٠٠ اور اسیواسطی ٣٠٠ = چوکڑیون کے جنمین کہ کتا خرگوش کو پکڑیگا

٥٢ سیب اور انار اسطرح سے فروخت ہوتی ہو کہ دس سیب ایک پیسی کے اور ٢٥ انار دو پیسی کے اگر ہم خریدنا چاہین مجموعہ ١٠٠ اسیبون اور انار کو ١٩/٢ پیسے کی بدلی تو بتاؤ کتنے انار ہونگی اور کتنے سیب فرض کرو لا = تعداد سیبون کے ∴ ١٠٠ − لا = تعداد انارون کے
اور ١٠ : لا :: ١ : قیمت لا کتنی سیب کی ہے ∴ قیمت لا کتنے سیب کی = لا/١٠ اور اسیطرح ثابت کرسکتے ہین ہم کہ ١٠٠ − لا کتنی انار کی قیمت = (٢٠٠ − ٢ لا)/٢٥ ∴ لا/١٠ + (٢٠٠ − ٢ لا)/٢٥ = ١٩/٢
اور بعد دور کرنے کسر اور اختصار کے ٥ لا + ٤٠٠ − ٤ لا = ٤٧٥ اور ابدال کے بعد
لا = ٧٥ = تعداد سیبون کے اور ٢٥ = تعداد انارون کے

٥٣ ایک شخص جوا کہیلنے لگا اول دفعہ جتنے روپئے سی کہیلنا شروع کیا تہا اوس سے دو چند جیتا اور پہر ١٦ روپیہ ہارا اور بعد اوسکے باقی کا ٤/٥ ہارا تب جتنی روپئے سے کہیلنا شروع کیا تہا اوس سے دو چند جیتا پہر بعد شمار کے معلوم ہوا کہ ٨٠ روپئے اوسکی پاس تہے بتاؤ کتنے روپئے سی کہیلنا شروع کیا تہا فرض کرو لا = اون روپیون کے جتنی سے کہیلنا شروع کیا تہا تو ٢ لا = اون روپیون کے جو اول دفعہ جیتا اور پہر بموجب سوال کے ٣ لا − ١٦ − (١٢ لا − ٦٤)/٥ + لا = ٨٠ اور بعد دور کرنے کسر
١٥ لا − ٨٠ − ١٢ لا + ٦٤ + ٥ لا = ٤٠٠ اور بعد ابدال کے ٨ لا = ٤١٦ ∴ لا = ٥٢

٥٤ تقسیم کرو عدد ٣٦ کو ایسے تین حصون مین کہ آدہا اول کا اور ثلث دوسرے کا اور چوتہائی تیسرے کا مساوی ہو ایک دوسری کے فرض کرو ٢ لا = حصہ اول کے اسیواسطے لا = ١/٣ حصہ دوسرے کے اور ∴ ٣ لا = حصہ دوسرے کے اور چونکہ لا = ١/٤ حصہ تیسری کے تو ∴ حصہ تیسرے کا = ٤ لا
اور (٢ لا + ٣ لا + ٤ لا) = ٩ لا = ٣٦ ∴ لا = ٤ اور حصہ مطلوبہ ٨ ١٢ ١٦

٥٥ تین فریق نے سپاہیون کے ایک ریوڑ لوٹا اسطرح سے کہ فریق اول نے لوٹا چوتہائی تمام ریوڑ کا اور چوتہائی ایک بکری کا اور فریق دویم نے ثلث مابقی کا اور ثلث ایک بکری کا اور فریق سیوم نے آدہا بچے ہوئے کا اور آدہا ایک بکری کا لوٹا اور بعد اسکے ریوڑ مین پچیس بکریان بچین بتاؤ کل بکریان کتنی تہین ریوڑ مذکور مین فرض کرو لا = تعداد بکریون ریوڑ کے تو بموجب کم ہونے بکریون کے دفعہ اول مین حاصل ہوئے لا − (لا + ١)/٤ = (٣ لا − ١)/٤ اور پہر بموجب دفعہ ثانی کے

(۳لا − ۱)/۴ − (۳لا − ۱)/۱۲ − ۱/۴ = (۶لا − ۲)/۱۲ − ۱/۴

= (۶لا − ۶)/۱۲ = (۳لا − ۳)/۶ = (لا − ۱)/۲ اب موافق ذریق ثالث کے

(لا − ۱)/۲ − (لا − ۱)/۴ − ۱/۲ = (لا − ۳)/۴ ∴ بموجب سوال کے

(لا − ۳)/۴ = ۲۵ اور لا − ۳ = ۱۰۰ ∴ لا = ۱۰۳ = تعداد بکریون کے

۵۶ ایک شخص نے پیپہ شراب کا واسطے ۴۸ روپیہ کے خریدا اور تین چوتہائی اوسمین سے بحساب فی صدی ۲۵ روپیہ فائدہ کے معہ دو سیر زیادہ کے بیچ ڈالا اور باقی کو ایسی قیمت سے بیچا کہ کل شراب مین اوسکو فی صدی ۶۰ روپیہ فائدہ حاصل ہوا لیکن اگر وہ کل کو اسی قیمت سے بیچتا تو اوسکو فی صدی ۱۲۵ روپیہ فائدہ حاصل ہوتا تو بتاؤ شراب کتنی سیر تہی فرض کرو ۴لا = تعداد سیرون شراب کے اور چونکہ کل سیر شراب کے اوسنے ۴۸ روپیہ کو خریدی تہے تو ۱۲/لا = قیمت ایک سیر شراب کی اور ۱۰۰ : ۱۲۵ :: ۱۲/لا : اوس قیمت سیر سے جو فروخت اول مین اوسنے مقرر کی تہی تو اسیواسطے قیمت اول دفعہ کی = ۱۵/لا اور اسیطرح سے ۱۰۰ : ۲۷۵ :: ۱۲/لا اوس قیمت سیر سے جو دوسری دفعہ اوسنے بیچی تو ∴ قیمت دوسری دفعہ کی = ۳۳/لا ∴ (۳لا + ۲) ۰ ۱۵/لا + (لا − ۲) ۰ ۳۳/لا − ۴۸ = تمام فائدہ کے = ۳۰ − ۳۶/لا اور ۱۰۰ : ۶۰ :: ۴۸ : ۳۰ − ۳۶/لا اور موافق قاعدہ تناسب کے ۵ : ۳ :: ۸ : ۵ − ۶/لا ∴ ۲۴ = ۲۵ − ۳۰/لا اور بعد ابدال کے ۳۰/لا = ۱ ∴ لا = ۳۰ اور اور عدد مطلوب = ۱۲۰ کے یعنی شراب مذکور ۱۲۰ سیر تہی

۵۷ ایک حوض ہے کہ اوسمین ایک یکہ یکسان جاری ہی اور پانی اوسمین تہا ۲۰۷ من اور ہی ایک پمپ جسکے وسیلہ سے کہ تین آدمی ایک منٹ مین ۴ دفعہ کی صدمہ سے نکالتے تہی لگا ہوا تہا اوس ترکیب سے چہہ گہنٹہ مین پانی تو اسیواسطے آدمی مذکور ایک اور پمپ کہ نکلنا پانی اوسکی کا ایک صدمہ سی دوسرے پمپ کی نکال پانی سے جو ایک صدمہ سی ہو وہی نسبت رکہتا ہی جو ۲ رکہتا ہی تین سے لگایا اور بعد انی اسی پمپ کے ایک آدمی پمپ اول سے موقوف کیا گیا تو اوسمین صرف تین منٹ مین ۱۰ صدمہ ہوتی تہے اور دوسرے پمپ مین ۲ منٹ مین پانچ صدمہ تو اس ترکیب سے حوض مذکور ۱۲ گہنٹہ مین خالی ہوا تو بتاؤ ہر ایک پمپ مین ایک صدمہ سی کتنا پانی گرتا ہی اور یکہ مین سے کتنا جاری ہی فرض کرو ۳لا = تعداد منون پانی کے جو ایک صدمہ سی پمپ اول سی گرتا ہی اور ۲لا = تعداد منون پانی کے جو ایک صدمہ سی دوسرے پمپ مین سے نکلتا ہی اور ۱۲لا = تمام پانی نکلے ہوئے ایک منٹ کی پمپ اول سے جب کہ تین آدمی اوسپر مقرر تہے اور پانی جو ۶ گہنٹہ مین نکلتا ہی = ۶ × ۶۰ × ۱۲لا

اور پانی جو کل پکہ مین سے آیا = ۶ × ۶۰ × ۱۲ لا + ۷۲۰ = ۷۲۰ (۶ لا + ۱) اور ۱ لا = مقدار
اوس پانی کے جو نکالا گیا ایک صد مسی ڈول سے اور ۵ لا = مقدار اوس پانی کے جو نکالا گیا دوسرے
پمپ سے ایک صد مسی ∴ ۱۱۵ لا × ۱۲ × ۶۰ = مقدار سے کے جو ۱۲ گھنٹہ مین نکلا
∴ ۱۱۵ لا × ۷۲۰ = ۲ × ۷۲۰ (۶ لا + ۱) + ۷۲۰ یا ۱۱۵ لا = ۱۲ لا + ۲ + ۱ ... = ۳
اور لا = ۱ تو معلوم ہوا کہ اول پمپ مین ایک صد مسی ۳ من پانی اور دوسرے سے ۲ من پانی نکلتا تھا اور
پانی جو پکہ مین سے ایک منٹ مین آتا تھا = $\frac{(۶ لا + ۱) \times ۷۲۰}{۶۰ \times ۶}$ = ۲ × (۶ لا + ۱)
= ۱۲ لا + ۲ = ۱۴ = تعداد منون کے

۵۸ وہ کونسی دو عدد ہین جنکا حاصل تفریق = ۱۰ اور اگر ۱۵ زیادہ کئے جائین انکی مجموعہ پر تو کل
= ۴۳ جواب ۹ اور ۱۹

۵۹ وہ دو اعداد کیا ہین جنکا حاصل تفریق = ۱۴ اور اگر نو گنا چھوٹا چھوٹے بڑے سے تفریق
کیا جاوے تو حاصل = ۳۳ جواب ۱۷ اور ۳۱

۶۰ وہ عدد کیا ہی جسپر اگر ۲۰ زیادہ کرین اور اس جمع کی دو تہائی مین سے ۲۲ تفریق کرین تو حاصل
تفریق = ۱۰ ہوتا ہی جواب ۱۳

۶۱ ا اور ب نے برابر روپیہ تجارت مین لگایا ہی ا کو ۲۲۰ روپیہ کا فائدہ ہوا اور ب کو ۸۰ روپیہ کا
نقصان ہوا بعد ازان دریافت ہوا کہ ا کی پاس جو روپئے باقی رہے وہ تگنی ہین ان روپیون سے جو
ب کے پاس باقی رہے بتاو کتنا روپیہ ہر شخص کے پاس اول مین تھا جواب ۱۸۰

۶۲ وہ عدد کونسا ہی جسکی تہائی اور پانچوین حصے مین ۷۲ کا فرق ہی جواب ۵۴۰

۶۳ ایک قمار باز نے اول بیٹہ تے ہی پانچوان حصہ اپنی روپیون کا ہار دیا اور بعد اسکے دس روپئے
جیتا اور پھر کہیلا اور جو کچھ اوسکے پاس تھا اوسکا تہائی ہارا اور بعد اسکے تین روپئے جیتا اور بعد ازان اوسنے
روپیون کی شمار کی تو دریافت ہوا کہ اوس پاس ۴۳ روپئے رہگئی بتاو کتنے روپیہ اوسکے پاس اول تھا جواب ۱۰۰ روپیہ

۶۴ عدد ۹۰ کو ایسے چار حصون مین تقسیم کرو کہ اگر اول حصہ پر ۲ زیادہ کرین اور دوسرے سی ۲ تفریق کرین
اور تیسری کو ۲ مین ضرب کرین اور چوتھے کو ۲ پر قسمت کرین تو مجموعہ اور حاصل تفریق اور حاصل ضرب اور خارج
قسمت سب آپس مین مساوی ہو سکتے ہین جواب ۱۸ اور ۲۲ اور ۱۰ اور ۴۰

سوالات دویم درجہ کی مساواتے

۱ ایک شخص نے چند بیل ۸۰ روپیہ کے خرید کیے اور اگر اوسی ۸۰ روپیہ کے چار بیل زیادہ آتی تو اوس شخص کو ایک روپیہ فی بیل کم دینا پڑتا بتاؤ کہ کتنے بیل تھے اور کیا تھی قیمت ہر بیل کی۔ فرض کرو کہ تعداد کل بیلوں کے = لا ∴ قیمت ہر بیل = ۸۰/لا اور اگر چار بیل زیادہ آتے تو اوس حالت میں قیمت ہر بیل کی = ۸۰/(لا + ۴) تب موافق شرایط سوال کے

۸۰/(لا + ۴) = ۸۰/لا − ۱ اور (۸۰ لا + ۳۲۰)/لا − لا − ۴ = ۸۰ اور ۸۰ لا = ۸۰ لا + ۳۲۰ − لا² − ۴ لا

یعنی لا² + ۴ لا = ۳۲۰ اور لا² + ۴ لا + ۴ = ۳۲۴ ∴ لا + ۲ = ± ۱۸ اور لا = ± ۱۸ − ۲ = ۱۶ ایا

اور ۸۰/لا = ۸۰/۱۶ = ۵ = قیمت ہر بیل کے

۲ دو عدد ایسی ہیں کہ اونکا فرق تو ۸ ہی اور اگر اونہیں آپسمیں ضرب دیں تو حاصل ضرب ۲۴۰ ہوتا ہی بتاؤ وے کونسی عدد ہیں۔ فرض کرو کہ لا = عدد چھوٹے کے تب موافق شرایط سوال کے لا + ۸ = عدد بڑے کے (لا + ۸) × لا = لا² + ۸ لا = ۲۴۰ اور موافق قاعدہ کے

لا² + ۸ لا + ۱۶ = ۲۴۰ + ۱۶ = ۲۵۶ اور جذر لینے سے لا + ۴ = ۱۶ اور

لا = ۱۶ − ۴ = ۱۲ = عدد چھوٹے کے اور لا + ۸ = ۱۲ + ۸ = ۲۰ = عدد بڑی کے

۳ تقسیم کرو عدد ۶۰ کو ایسے دو جز میں کہ اگر وے آپسمیں ضرب کیے جائیں تو حاصل ضرب ۸۶۴ ہو

فرض کرو لا = بڑے جز کے پس موافق شرایط سوال ۶۰ − لا = چھوٹے جز کے ہی

اور (۶۰ − لا) لا = ۶۰ لا − لا² = ۸۶۴ اور علامتیں طرفین کی تبدیل کرو تو لا² − ۶۰ لا = −۸۶۴

اور موافق قاعدہ کے لا² − ۶۰ لا + ۹۰۰ = −۸۶۴ + ۹۰۰ = ۳۶ اور

لا − ۳۰ = ± ۶ اور لا = ۶ + ۳۰ = ۳۶ = بڑے جز کے اور ۶۰ − ۳۶ = ۲۴ = چھوٹے جز کی

۴ فرض کرو کہ مجموعہ دو اعداد = ح اور مجموعہ اونکی الگ الگ مجذور کا = ص سے دریافت کرو ان دو عدد کو۔ فرض کرو لا = بڑے عدد کی تب موافق شرایط سوال کے ح − لا = چھوٹی عدد کے

اور لا² + (ح − لا)² = ۲ لا² + ح² − ۲ ح لا = ص اور ہر دو طرف مساوات کو ۲ پر قسمت کرنی سے

لا² + ح²/۲ − ح لا = ص/۲ اور لا² − ح لا = ص/۲ − ح²/۲ = (ص − ح²)/۲ اور موافق قاعدہ کے

لا² − ح لا + ح²/۴ = (ص − ح²)/۲ + ح²/۴ = (۲ص − ح²)/۴ اور

لا − ح/۲ = ± √((۲ص − ح²)/۴) اور لا = ح/۲ ± √((۲ص − ح²)/۴) =

عدد بڑی کے اور ح − (ح/۲ ± √((۲ص − ح²)/۴)) = ح/۲ ∓ √((۲ص − ح²)/۴) =

عدد چھوٹی کے

۵ ایک درخت پر چند مکھیاں بیٹھی ہوی تھیں ایک دفع تو اونکی نصف کا جذر اوڑ گیا اور دوسری دفع اونکی آٹھ نوین حصے اوڑ گئے اور باقی رہین دو مکھیاں بتاو کتنی مکھیاں درخت پر بیٹھی تھیں فرض کرو کہ تعداد مکھیون کی = لا تو √(لا/۲) = اون مکھیون سے کے جو اول دفع اوڑ گئیں اور ۸ لا/۹ = اون مکھیون سے کے جو دوسرے بار اوڑ گئیں اور اب ظاہر ہی کہ لا − √(لا/۲) − ۸ لا/۹ = ۲ یعنی ۹ لا − ۹ √(لا/۲) − ۸ لا = ۱۸ سے یعنے لا − ۹ √(لا/۲) = ۱۸ اور لا − ۱۸ = ۹ √(لا/۲)

اور لا² − ۳۶ لا + ۳۲۴ = ۸۱ لا/۲ اور لا² − ۱۵۳ لا/۲ = − ۳۲۴

اور بموجب قاعدہ کی زیادہ کرو مجذور نصف ۱۵۳/۲ کا دونو طرف مساوات پر تو حاصل ہوتا ہی

لا² − ۱۵۳ لا/۲ + ۲۳۴۰۹/۱۶ = ۲۳۴۰۹/۱۶ − ۳۲۴ = ۲۳۴۰۹/۱۶ − ۵۱۸۴/۱۶ = ۱۸۲۲۵/۱۶

اور جذر نکالنے سے دونو طرف کا حاصل ہوتا ہی یہہ لا − ۱۵۳/۴ = ۱۳۵/۴ اور

لا = ۱۳۵/۴ + ۱۵۳/۴ = ۲۸۸/۴ = ۷۲ = تعداد مکھیون کے ایک اور ترکیب واسطے حل کرنے سوال مذکورہ بالا کے یہہ ہی فرض کرو تعداد مکھیون کے = ۲ لا² تو ظاہر ہی کہ لا = مکھیون سے کے جو اول دفع اوڑ گئیں اور ۱۶ لا²/۹ = مکھیون کے جو دوسری دفع اوڑ گئیں اور بموجب سوال کے

۲ لا² − لا − ۱۶ لا²/۹ = ۲ اور ۱۸ لا² − ۱۶ لا² − ۹ لا = ۱۸ اور ۲ لا² − ۹ لا = ۱۸

اور بموجب قاعدہ دوسری مساوات درجہ دویم سے جو گنتی سر لا² مین یعنے ۲ مین دونو طرف مساوات کو ضرب دو تو حاصل ہوتا ہی ۱۶ لا² − ۷۲ لا = ۱۴۴ اور زیادہ کرو مجذور ۹ کا دونو طرف پر تو

۱۶ لا² − ۷۲ لا + ۸۱ = ۱۴۴ + ۸۱ = ۲۲۵ اور جذر نکالو دونو طرف کا تو

۴ لا − ۹ = ۱۵ اور ۴ لا = ۱۵ + ۹ = ۲۴ اور لا = ۲۴/۴ = ۶

اور ۲ لا² = ۲ × ۳۶ = ۷۲ = تعداد مکھیون سے کے

۶ چار اعداد جمع کے سلسلہ کے ہین اور حاصل ضرب اول کا چوتھی مین = ۵۴ اور حاصل ضرب دویم کا سویم مین = ۷۷ وہ چار اعداد کونسی ہین فرض کرو کہ اول سب سے چھوٹا عدد = لا اور فرق عام = د تو لا + د = عدد دویم اور لا + ۲ د = عدد سویم اور لا + ۳ د = عدد چہارم اور موافق شرائط سوال سے کے لا × (لا + ۳ د) = لا² + ۳ د لا = ۵۴ اور

(لا + د) × (لا + ۲ د) = لا² + ۳ د لا + ۲ د² = ۷۷

اب تفریق کرو اس مساوات لا² + ۳ د لا + ۲ د² = ۷۷ مین سے

لا² + ۳ د لا = ۵۴ کو

اس مساوات

تو حاصل تفریق یہہ ہوتا ہی ۲ دۂ = ۳۲ اور دۂ = ۱۶ اور د = ±√۱۶ = ۴ یا −۴

لیکن لاۂ + ۳ د لا = ۵۴ یعنے لاۂ + ۱۲ لا = ۵۴ اور لاۂ + ۱۲ لا + ۳۶ = ۵۴ + ۳۶ = ۸۱ اور

لا + ۶ = ±√۸۱ = ۹ اور لا = ۹ − ۶ = ۳ یعنے ۳ اور ۷ اور ۱۱ اور ۱۵ چار اعداد مطلوبہ ہین

۷ تین اعداد سلسلہ ضرب کی ایسے ہین کہ اونکا مجموعہ = ۱۴ اور مجموعہ اونکے الگ الگ مجذور کا = ۸۴

دیئے کونسے ہین فرض کرو کہ عدد اول = لا اور عدد دویم = د اور عدد سویم = ی تو موافق شرایط سوال

کے لا + د + ی = ۱۴ اور لاۂ + دۂ + یۂ = ۸۴ اور مساوات اول سے لا + ی = ۱۴ − د اور

(لا + ی)ۂ = لاۂ + ۲ لا ی + یۂ = (۱۴ − د)ۂ = ۱۹۶ − ۲۸ د + دۂ لیکن بموجب قاعدہ نسبت کے

لا ی = دۂ اور ۲ لا ی = ۲ دۂ تو لاۂ + ۲ دۂ + یۂ = ۱۹۶ − ۲۸ د + دۂ اور

لاۂ + دۂ + یۂ = ۱۹۶ − ۲۸ د = ۸۴ اور ۲۸ د = ۱۹۶ − ۸۴ = ۱۱۲ اور د = ۱۱۲/۲۸ = ۴

اور لا = ۱۶/ی تو ۴ + ۱۶/ی + ی = ۱۴ اور یۂ + ۴ ی + ۱۶ = ۱۴ ی اور یۂ − ۱۰ ی = −۱۶

اور یۂ − ۱۰ ی + ۲۵ = −۱۶ + ۲۵ = ۹ اور ی − ۵ = ۳ اور ی = ۸ اور لا = ۱۶/۸ = ۲

یعنے ۲ اور ۴ اور ۸ اعداد مطلوبہ ہین

۸ ایک سوداگر نے ۳۹ روپیہ کی شراب بیچی اور اوسکو فی صیکڑہ اتنا فائدہ ہوا جتنے کو اوسنے شراب مول لی تہی بتاؤ کیا ہی قیمت شراب کی فرض کرو کہ لا = قیمت شراب کے تو اب ظاہر ہی

کہ ۱۰۰ : لا :: لا : فائدہ اور ∴ فائدہ = لاۂ/۱۰۰ اور ∴ لاۂ/۱۰۰ = ۳۹ − لا اور اگر دور کرین ہم

کسر کو تو لاۂ = ۳۹۰۰ − ۱۰۰ لا اور لاۂ + ۱۰۰ لا = ۳۹۰۰ ∴ لا = ۳۰ یا −۱۳۰

۹ دو عدد ایسی ہین کہ اونکا حاصل تفریق ۹ ہی اور حاصل ضرب اونکے حاصل جمع کا بڑے عدد مین ۲۶۶ ہی بتاؤ وے عدد کونسے ہین فرض کرو کہ لا = عدد کلان کے ∴ لا − ۹ = عدد چھوٹا کے

اور حاصل جمع عدد دونکا = ۲ لا − ۹ اور موافق شرایط سوال کے لا (۲ لا − ۹) = ۲۶۶

∴ لاۂ − ۹/۲ لا = ۲۶۶/۲ اور ∴ لا = ۱۴ یا −۱۹/۲

۱۰ دو ایسے عدد ہین کہ اونمین سے اول دوسری سے وہی نسبت رکھتا ہی جو دوسرا رکھتا ہی ۱۶ سے اور حاصل جمع اونکے مجذوروں کا ۲۲۵ ہی بتاؤ وے کون سے عدد ہین فرض کرو کہ لا = عدد اول کے

تو موافق شرایط سوال کے لا : دوسرا :: دوسرا : ۱۶ ∴ مجذور دوسرے کا = ۱۶ لا یعنے عدد

دوسرا = √۱۶ لا اور لاۂ + ۱۶ لا = ۲۲۵ اور ∴ عدد مطلوبہ ۹ اور ۱۲ ہین

۱۱ دو ایسی چبوترے ہین کہ اونکی شکل مربع ہی اور اونپر فرش ہی پتہر دونکا کہ ہر اینٹ کا ایک گز مکسر ہی

ایک ضلع ایک چبوتر یکا زیادہ ہی ایک ضلع دوسرے چبوترے سے بقدر ۱۲ گز کے اور کل دو نو چبوتر ون مین ۲۱۲۰ پتہر ہین بتاؤ کیا ہی طول ہر ایک چبوتر یکا فرض کرو کہ ضلع اول چبوتر یکا = لا تو موافق شرایط سوال کے لا + ۱۲ = ضلع دوسرے چبوترے کے اور لا۲ = تعداد پتہرون اول چبوترے کے اور (لا + ۱۲)۲ = تعداد پتہرون دوسرے چبوترے کے اور لا۲ + لا۲ + ۲۴ لا + ۱۴۴ = ۲۱۲۰ اور ∴ ۲ لا۲ + ۲۴ لا = ۱۹۷۶

∴ لا۲ + ۱۲ لا = ۹۸۸ اور ∴ لا = ۲۶ یا − ۳۸

۱۲ ایک مزدور نے ۳۵۶ روپیہ بطریق مزدوری کے لیکر دو کوئے ایسے کہود دیے کہ ایک کا عمق ۶ گز زیادہ تہا بہ نسبت دوسرے کی عمق کے اور کہودنی ہر ایک کے ان کوؤن سے اتنی روپئے فی گز خرچ ہوئے جتنی ہر واحد کے عمق مین گز تہے بتاؤ کیا تہا عمق ہر ایک کا فرض کرو کہ لا اور لا + ۶ ہین عمق تب موافق شرایط سوال کے لا۲ + (لا + ۶)۲ = ۳۵۶ ∴ ۲ لا۲ + ۱۲ لا + ۳۶ = ۳۵۶ یا لا۲ + ۶ لا = ۱۶۰ ∴ لا = ۱۰ اور ۱۶ گز ہہی عمق مطلوبہ

۱۳ چند بہائی ایک شخص کے ۱۷۵ روپئے کے قرضدار تہے لیکن قبل از ادا ہونی قرض کے دو ان مین سے مر گئے اور باقیون کو مری ہوئے بہائیون کے عوض مین دس دس روپئے زیادہ ادا کرنے پڑے بتاؤ کتنے بہائی تہے فرض کرو کہ لا = تعداد بہائیون کے تو $\frac{۱۷۵}{لا}$ = روپیون کے جنکا ادا کرنا ہر واحد پر قبل از مرنے دو بہائیون کے واجب تہا اور اسیطرح سے $\frac{۱۷۵}{لا - ۲}$ = روپیون کے جنکا ادا کرنا بعد مرنے دو بہائیون کے ہر واحد باقیون پر واجب تہا پس موافق شرایط سوال کے ۱۰ = $\frac{۱۷۵}{لا - ۲}$ − $\frac{۱۷۵}{لا}$ = ۱۷۵ ($\frac{۱}{لا - ۲}$ − $\frac{۱}{لا}$) اور ∴ ۱۰ لا (لا − ۲) = ۱۷۵ × ۲ یا لا۲ − ۲ لا = ۳۵ ∴ لا = ۷ یا − ۵

۱۴ ایک شخص نے چند بہیڑین واسطی ۶۰ روپئے کے خریدین اور انمین سے ۱۵ بہیڑون کو اپنی پاس رکہکر باقی کو واسطی ۵۴ روپیہ کے بیچ دین اور اس فروخت سے اوسنے فی بہیڑ ایک روپئے کی دسوین حصہ کا فائدہ حاصل کیا بتاؤ بہیڑون کے تعداد کیا تہی اور ہر بہیڑ کی قیمت کیا تہی فرض کرو کہ لا = تعداد مطلوبہ کی ∴ $\frac{۶۰}{لا}$ = قیمت ہر بہیڑ کے ∴ (لا − ۱۵) ($\frac{۶۰}{لا}$ + $\frac{۱}{۱۰}$) = ۵۴ یا (لا − ۱۵) × (۶۰۰ + لا) = ۵۴۰ لا اور لا۲ + ۵۸۵ لا − ۹۰۰۰ = ۵۴۰ لا ∴ لا۲ + ۴۵ لا = ۹۰۰۰ ∴ لا = ۷۵ یا − ۱۲۰ اور قیمت = $\frac{۴}{۵}$ روپئی کے

۱۵ دو شخص آ اور ب دو شہرون سے کہ بفاصلہ ۲۴۷ کوس کے واقع تہی طرف ایک دوسرے کے چلی اور ایک خاص مقام پر آملی آ چلا جاتا تہا ۹ کوس ہر روز اور ب ہر روز اتنے کوس چلتا تہا جتنے دنون کے بعد وہ ملے اور لا۳ یعنے اگر دنون کی تعداد مین سے تین نکالین تو باقی رہتے ہی رفتار ب کی بتاؤ ہر ایک شخص کتنے کتنے کوس چلا فرض کرو کہ لا = تعداد دنون کے ∴ ۹ لا = کوسون کے جو آ چلا اور ۲۴۷ − ۹ لا = کوسون کے کہ ب چلا اور $\frac{۲۴۷ - ۹ لا}{لا}$ = کوسون کے جو ب ہر روز چلا ∴ لا − ۳ = $\frac{۲۴۷ - ۹ لا}{لا}$ اور

لا² − ۳ لا = ۲۴۷ − ۹ لا ∴ لا² + ۶ لا = ۲۴۷ ∴ لا = ۱۳ یا − ۱۹ ∴ آ چلا ۱۷ کوس اور ب چلا ۱۳ کوس ۔

۱۶ ایک شخص نے دو تہان مختلف قسم کے کپڑے کے خریدے اول قسم کپڑے کے واسطے اوسنی ایک خمس ایک روپیہ کا فی گز زیادہ دیا اور کل قیمت اوسی کپڑے کی اٹھارہ روپئے تھی لیکن قیمت دوسرے قسم کے کپڑے … کے جو دو گز طول مین اول قسم کے کپڑے سے زیادہ تھا صرف ۱۶ ہی روپیہ تھے بتاؤ ہر تہان مین سے کتنے گز کپڑا تھا اور کیا تھی قیمت ہر گز کی فرض کرو لا = تعداد گزون اول قسم کے کپڑے کی ∴

لا + ۲ = تعداد گزون دویم قسم کے کپڑے کی اور ۱۸/لا = قیمت ایک گز اول قسم کی کپڑے کی اور ۱۶/(لا + ۲) = قیمت ایک گز دویم قسم کی کپڑے کی ∴ ۱۸/لا = ۱۶/(لا + ۲) + ۱/۵ ∴ ۹۰ لا + ۱۸۰ = ۸۰ لا + لا² + ۲ لا اور لا² − ۸ لا = ۱۸۰ اور ∴ لا = ۱۸ یا − ۱۰

۱۷ ایک شخص آ مقام س سے طرف مقام ط کے چلا اور اوسکی رفتار ۷ کوس فی دن تھی جسوقت کہ اوس شخص نے فاصلہ ۳۲ کوس کا طی کیا اوسوقت ایک اور شخص ب مقام ط سے طرف مقام س کے چلا اور اوسکی رفتار مساوی تھی ۱/۱۹ حصہ کل اوس مسافت کی اور بعد اتنے دنون کے جتنے کوس وہ ہر روز جاتا تھا وہ آ سے ملا بتاؤ کیا ہی فاصلہ مابین مقامون س اور ط کے فرض کرو لا = فاصلہ مطلوبہ کے تو موافق شرایط سوال کے لا/۱۹ = تعداد کوسون کے جتنے ب ہر روز طی کرتا تھا لیکن لا/۱۹ = تعداد دنون کے جتنے دنون کے بعد ب سفر کر کے آ سی ملا پس معلوم ہوا کہ

لا²/۳۶۱ + ۳۲ + ۷ لا/۱۹ = لا اور بسبب ابدال علامت کے لا²/۳۶۱ − ۱۲ لا/۱۹ = − ۳۲ اور

∴ لا = ۱۵۲ یا ۷۶

۱۸ دو شخصون آ اور ب نے ۱۳۰ سیر ریشم کی کہ انمین سے ۴۰ سیر تو آ کے اور ۹۰ سیر ب کے تھی قیمت ۴۲ روپئے کی بیچے لیکن آ نے ایک تہائی ایک سیر کی واسطے ایک روپیہ کی زیادہ بنسبت ب کے بیچے بتاؤ ہر شخص نے کتنے کتنے سیر ریشم کی بیچے فرض کرو کہ لا = تعداد سیرون کے جو ب نے واسطے ایک روپئے کی بیچے اور لا + ۱/۳ = تعداد سیرون کے جو آ نے واسطی ایک روپیہ کے بیچے

اور لا : ۹۰ :: ۱ : قیمت ۹۰ سیر کے = ۹۰/لا اور

لا + ۱/۳ : ۴۰ :: ۱ : قیمت ۴۰ سیر کے = ۱۲۰/(۳ لا + ۱) ∴ ۴۲ = ۹۰/لا + ۱۲۰/(۳ لا + ۱) اور

۷ = ۱۵/لا + ۲۰/(۳ لا + ۱) ∴ ۲۱ لا² + ۷ لا = ۴۵ لا + ۱۵ + ۲۰ لا یا ۲۱ لا² − ۵۸ لا = ۱۵

یا لا² − ۵۸/۲۱ لا = ۱۵/۲۱ اور ∴ لا = ۳ یا − ۵/۲۱

۱۹ اگلے پہیے ایک رتھ کی نے ۱۲۰ گز کی مسافت طے کرنے مین چھ گردشین بہ نسبت پیچھے کے پہیے کے زیادہ کین لیکن اگر محیط ہر واحد ان پہیون کا بقدر عدد آ کے زیادہ کیا جاوے تو اگلا پہیا صرف چار گردشین بہ نسبت پیچھے کے پہیے کی زیادہ کریگا بتاؤ کیا ہی محیط ہر پہیے کا فرض کرو کہ لا = تعداد گزون محیط بڑے پہیے کے اور فرض کرو کہ ی = تعداد گزون محیط چھوٹے پہیے کی ∴ $\frac{۱۲۰}{\text{لا}} = \frac{۱۲۰}{\text{ی}} - ۶$

یا $۲۰\,\text{ی} = ۲۰\,\text{لا} - \text{لا ی}$ یا $\text{لا ی} = ۲۰\,\text{لا} - ۲۰\,\text{ی}$ لیکن $\frac{۱۲۰}{\text{لا}+۱} = \frac{۱۲۰}{\text{ی}+۱} - ۴$

یا $۳۰(\text{ی}+۱) = (\text{لا}+۱)(۲۹ - \text{ی})$ یا $۳۰\,\text{ی} + ۳۰ = ۲۹\,\text{لا} + ۲۹ - \text{لا ی} - \text{ی}$

یا $\text{لا ی} = ۲۹\,\text{لا} - ۱ - ۳۱\,\text{ی}$ ∴ $۲۹\,\text{لا} - ۱ - ۳۱\,\text{ی} = ۲۰\,\text{لا} - ۲۰\,\text{ی}$

یا $۹\,\text{لا} = ۱۱\,\text{ی} + ۱$ یا $\text{لا} = \frac{۱۱\,\text{ی}+۱}{۹}$ ∴ $\frac{۱۱\,\text{ی}^۲ + \text{ی}}{۹} = \frac{۲۲۰\,\text{ی} + ۲۰}{۹} - ۲۰\,\text{ی}$ یا یون لکھو

$۱۱\,\text{ی}^۲ + \text{ی} = ۲۲۰\,\text{ی} + ۲۰ - ۱۸۰\,\text{ی} = ۴۰\,\text{ی} + ۲۰$ ∴ $\text{ی}^۲ - \frac{۳۹}{۱۱}\,\text{ی} = \frac{۲۰}{۱۱}$ اور $\text{ی} = ۴$ یا $-\frac{۵}{۱۱}$

۲۰ ایک شخص نے دو گھاس کے گٹھے مکعب کی شکل کے بقیمت ۸۲۰ روپیہ کے خریدے اور ایک گز مکعبی کی ان مین سے اتنی روپئے قیمت تہی جتنے کہ گز تہے ایک ایک ضلع دوسری کے مین اور ان مین جو بڑا تہا اوسکے نیچے ۹ گز مکسر زیادہ زمین تہے یعنے وہ ۹ گز زمین زیادہ گھیرے ہوئے تہا بہ نسبت دوسرے کے بتاؤ کیا تہی قیمت ہر گٹھی کی فرض کرو کہ لا = تعداد گزون ایک ضلع بڑے گٹھے کی اور فرض کرو کہ ی = تعداد گزون ایک ضلع چھوٹے گٹھے کی اور اب ظاہر ہی کہ $\text{لا}^۲$ اور $\text{ی}^۲$ ہونگی تعداد ان گٹھون کے علیحدہ علیحدہ قاعدون کے $\text{لا}^۲ - \text{ی}^۲ = ۹$ اور موافق شرائط سوال کے یہہ بہی ظاہر ہی کہ

$\text{لا}^۳\,\text{ی} + \text{ی}^۳\,\text{لا} = ۸۲۰$ ∴ $\text{لا}^۲ + \text{ی}^۲ = \frac{۸۲۰}{\text{لا ی}}$ اور $\text{لا}^۴ + ۲\,\text{لا}^۲\,\text{ی}^۲ + \text{ی}^۴ = \frac{(۸۲۰)^۲}{\text{لا}^۲\,\text{ی}^۲}$ لیکن

$\text{لا}^۴ - ۲\,\text{لا}^۲\,\text{ی}^۲ + \text{ی}^۴ = ۸۱$

اور حاصل تفریق انکا یہہ ہے $۴\,\text{لا}^۲\,\text{ی}^۲ = \frac{(۸۲۰)^۲}{\text{لا}^۲\,\text{ی}^۲} - ۸۱$

یا $\text{لا}^۴\,\text{ی}^۴ = \frac{(۸۲۰)^۲}{۴} - \frac{۸۱\,\text{لا}^۲\,\text{ی}^۲}{۴}$

∴ $\text{لا}^۴\,\text{ی}^۴ + \frac{۸۱\,\text{لا}^۲\,\text{ی}^۲}{۴} = \frac{(۸۲۰)^۲}{۴}$ اور اگر کامل کرین مربع کو تو

$\text{لا}^۴\,\text{ی}^۴ + \frac{۸۱}{۴}\,\text{لا}^۲\,\text{ی}^۲ + \left(\frac{۸۱}{۸}\right)^۲ = ۱۶۸۱۰۰ + \frac{۶۵۶۱}{۶۴} = \frac{۱۰۷۶۴۹۶۱}{۶۴}$ اور جسوقت نکالین جذر دونو طرف کا تو حاصل ہوگا یہہ $\text{لا}^۲\,\text{ی}^۲ + \frac{۸۱}{۸} = \pm \frac{۳۲۸۱}{۸}$

∴ $\text{لا}^۲\,\text{ی}^۲ = ۴۰۰$ ∴ $\text{لا ی} = ۲۰$ ∴ $\text{لا}^۲ + \text{ی}^۲ = \frac{۸۲۰}{\text{لا ی}} = \frac{۸۲۰}{۲۰} = ۴۱$

اور $۲\,\text{لا ی} = ۴۰$

∴ $\text{لا}^۲ + ۲\,\text{لا ی} + \text{ی}^۲ = ۸۱$ ∴ $\text{لا} + \text{ی} = ۹$

یا $\text{لا}^۲ - ۲\,\text{لا ی} + \text{ی}^۲ = ۱$ ∴ $\text{لا} - \text{ی} = ۱$

∴ $\text{لا} = ۵$

اور ی = ۴ پس قیمتین مطلوبہ ۵۰ اور ۲۰۳ ہین

۲۱ چار ایسے عدد سلسلہ جمع کی ہین کہ اونکا حاصل جمع = ۳۲ اور حاصل جمع اونکی علیحدہ علیحدہ مجذوروںکا = ۲۷۶ بتاؤ وسیے کون سیے عدد ہین فرض کرو کہ فرق عام = ۲ ی سیکے ہی اور (لا + ۳ ی) اور (لا + ی) اور (لا − ی) اور (لا − ۳ ی) چار اعداد مطلوبہ ہین ∴ اونکا حاصل جمع = ۴ لا = ۳۲ ∴ لا = ۸ لیکن مجموعہ اونکے مجذوروںکا = ۴ لا^۲ + ۲۰ ی^۲ = ۲۷۶ پس اگر لکھین اس مساوات مین بجاے لا کی اوسکی قیمت تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ۲۵۶ + ۲۰ ی^۲ = ۲۷۶ ∴ ۲۰ ی^۲ = ۲۰ ∴ ی^۲ = ۱ ∴ ی = ۱ پس معلوم ہوا کہ اعداد مطلوبہ ۱۱ اور ۹ اور ۷ اور ۵ ہین

۲۲ چار عدد سلسلہ ضرب کی ایسے ہین کہ حاصل جمع اول اور دوسرے کا = ۱۵ سیکے ہی اور حاصل جمع تیسری اور چوتھے کا = ۶۰ سیکے ہی بتاؤ وسیے کون سیے عدد ہین فرض کرو کہ لا اور لا ی اور لا ی^۲ اور لا ی^۳ اعداد مطلوبہ ہین پس موافق شرایط سوال سیکے لا + لا ی = ۱۵ اور لا ی^۲ + لا ی^۳ = ۶۰
یا ی^۲ (لا + لا ی) = ۶۰ ∴ ۱۵ ی^۲ = ۶۰ اور ی^۲ = ۴ ∴ ی = ± ۲ ∴ لا + ۲ لا یعنے
۳ لا = ۱۵ ∴ لا = ۵ پس چار اعداد مطلوبہ یہہ ۵ اور ۱۰ اور ۲۰ اور ۴۰

۲۳ قاعدہ ایک مثلث قایم الزاویہ کا ۶ ہی اور اسکے سب ضلعے اعداد سلسلہ جمع سیکے ہین بتاؤ باقی سیکے ضلعی کیا ہین فرض کرو کہ دو باقی سیکے ضلعے مطلوبہ ۶ + لا اور ۶ − لا ہین پس موافق ۴۷ شکل اول مقالہ اقلیدس کے ۳۶ − ۱۲ لا + لا^۲ + ۳۶ = ۳۶ + ۱۲ لا + لا^۲ ∴ ۲۴ لا = ۳۶
∴ لا = ۳/۲ ∴ ضلعے ۹/۲ اور ۱۲/۲ اور ۱۵/۲ ہین یہہ سوال اچھی طرح سیے محدود نہین ہی یعنے اسکا صرف ایک ہی جواب نہین ہوسکتا ہی بلکہ ایک سے زیادہ جواب ہوسکتے ہین مثلاً اگر فرض کرین ہم ۶ کو اول جز سلسلہ کا تو تین ضلعے یہہ ۶ اور ۶ + لا اور ۶ + ۲ لا ہونگے پس اس صورت مین
۳۶ + ۲۴ لا + ۴ لا^۲ = ۳۶ + ۳۶ + ۱۲ لا + لا^۲ ∴ لا^۲ + ۴ لا = ۱۲ ∴ لا = ۲ یا − ۶
اور اسیواسطے ضلعی یہہ ہونگے ۶ اور ۸ اور ۱۰ یا صفر اور ۶ اور − ۶

۲۴ دو شخص نامی آ اور ب شہر لندن سیے بہ ارادہ گرد پھر آنیے کرہ زمین سیکے کہ اوسکا محیط ۲۳۶۶۱ میل ہی چلے ایک مشرق کی طرف اور دوسرا مغرب کی طرف آ چلتا ہی ۱ میل اول دن ۲ میل دوسرے دن اور اسی قیاس پر اور ب چلتا ہی ۲۰ میل ہر روز بتاؤ وسیے کتنے دنون مین اور بعد کتنی مسافت طی کرنیے کی دوسرے سی ملینگے فرض کرو کہ لا = تعداد دنونکے پس موافق قاعدہ سلسلہ جمع کے (لا + ۱) لا/۲ = تعداد میل سیکے جو آ چلیگا اور ۲۰ لا = تعداد میل سیکے جو ب چلیگا اور اسیواسطے

موافق شرایط سوال کے $\frac{لا^2 + لا}{2}$ + ۲۰ لا = ۲۳۶۶۱ ∴ $لا^2$ + ۴۱ لا = ۴۷۳۲۲ ∴ لا = ۱۹۸ یا − ۲۳۹ پس معلوم ہوا کہ وے ۱۹۸ دنون مین ایک دوسرے سے آملینگے اور آ چلیگا ۱۹۷۰۱ میل اور ب ۳۹۶۰ میل

۲۵ پانچ عدد سلسلہ جمع کی ایسے ہین کہ اونکا حاصل جمع = ۲۵ اور اونکا حاصل ضرب = ۹۴۵ بتادیے اعداد کیا ہین فرض کرو کہ لا + ۲د اور لا + د اور لا اور لا − د اور لا − ۲د اعداد مطلوبہ ہین تو موافق شرایط سوال کے ۵لا = ۲۵ ∴ لا = ۵ اور لا ($لا^2$ − $د^2$) ($لا^2$ − ۴$د^2$) = ۹۴۵

اور اگر قیمت کرین اس مساوات کو لا = ۵ پر تو ($لا^2$ − $د^2$) ($لا^2$ − ۴$د^2$) = ۱۸۹

یا $لا^4$ − ۵$لا^2$$د^2$ + ۴$د^4$ = ۱۸۹ اور ۴$د^4$ − ۱۲۵$د^2$ + ۶۲۵ = ۱۸۹

∴ ۴$د^4$ − ۱۲۵$د^2$ = − ۴۳۶ ∴ $د^4$ − $\frac{125}{4}$$د^2$ = − $\frac{436}{4}$ ∴ $د^2$ = ۴ ∴ د = ± ۲

∴ اعداد مطلوبہ ۹ ۷ ۵ ۳ ۱ ہین

۲۶ ایک شخص نے اپنے تین نوکرون کو ۲۱۰ روپئے بانٹے اسطرح سے کہ اونکے حصے اعداد سلسلہ ضرب کے تھے اور بعد ازان دریافت ہوا کہ اول نوکر کو ۹۰ روپئے بہ نسبت تیسرے کی زیادہ ملی بتادو کتنے کتنے روپئے ہر شخص کو ملی فرض کرو کہ لا$د^2$ اور لاد اور لا اعداد مطلوبہ ہین تو موافق شرایط سوال کے

لا$د^2$ = لا + ۹۰ اور لا + لاد + لا$د^2$ = ۲۱۰ یا ۲لا + لاد + ۹۰ = ۲۱۰ ∴ ۲لا + لاد = ۱۲۰

اب ظاہر ہے کہ مساوات اول سے یہہ حاصل ہوتا ہے لا = $\frac{90}{د^2 - 1}$ اور مساوات اخیر سے یہہ لا = $\frac{120}{2 + د}$

∴ $\frac{120}{2 + د}$ = $\frac{90}{د^2 - 1}$ یا $\frac{4}{2 + د}$ = $\frac{3}{د^2 - 1}$ ∴ ۴$د^2$ − ۴ = ۳د + ۶

∴ ۴$د^2$ − ۳د = ۱۰ اور ۴$د^2$ − ۳د + $\frac{9}{16}$ = ۱۰ + $\frac{9}{16}$ = $\frac{169}{16}$ اور جسوقت نکالین ہم

جذر دونو طرف اس مساوات کا تو ۲د − $\frac{3}{4}$ = ± $\frac{13}{4}$ ∴ ۲د = ۴ یا − $\frac{5}{2}$

∴ د = ۲ یا − $\frac{5}{4}$ پس معلوم ہوا کہ لا = $\frac{120}{د + 2}$ = ۳۰ یا ۱۶۰ پس اعداد مطلوبہ

سے ۱۲۰ اور ۶۰ اور ۳۰ ہین

۲۷ وہ کونسا عدد ہے کہ اگر اوسکے مکعب اور مجذور کے حاصل جمع مین سے تفریق کرین اوس عدد کو ۱۲ مین ضرب دیکر تو باقی کچھ نہین رہتا فرض کرو کہ لا = عدد مطلوبہ ہے تو موافق شرایط سوال کے

$لا^3$ + $لا^2$ − ۱۲لا = ۰ یعنے $لا^3$ + $لا^2$ = ۱۲لا یعنے $لا^2$ + لا = ۱۲ اور

$لا^2$ + لا + $\frac{1}{4}$ = ۱۲ + $\frac{1}{4}$ = $\frac{49}{4}$ ∴ لا + $\frac{1}{2}$ = $\frac{7}{2}$

∴ لا = $\frac{7}{2}$ − $\frac{1}{2}$ = $\frac{6}{2}$ = ۳

۲۴ حل کرو اس مساوات $(ل^2 - \frac{ط^4}{ل^2})^{\frac{1}{2}} + (ط^2 - \frac{ط^4}{ل^2})^{\frac{1}{2}} = \frac{ل^2}{ط}$ کو یعنی قیمت ل کی دریافت کرو۔ اب اگر بدلین ہم علامتین تو $(ل^2 - \frac{ط^4}{ل^2})^{\frac{1}{2}} - \frac{ل^2}{ط} = -(ط^2 - \frac{ط^4}{ل^2})^{\frac{1}{2}}$ اور اگر مجذور کرین دو نو طرف اس مساوات کو تو حاصل ہوگا یہہ $ل^2 - \frac{ط^4}{ل^2} - \frac{2ل^2}{ط}(ل^2 - \frac{ط^4}{ل^2})^{\frac{1}{2}} + \frac{ل^4}{ط^2} = ط^2 - \frac{ط^4}{ل^2}$
اور اگر دور کرین مشترک $\frac{ط^4}{ل^2}$ کو دو نو طرف سے اور $ط^2$ کی علامت بدلکے اول طرف مساوات سے کے لاوین تو حاصل ہوگا یہہ $ل^2 - \frac{2ل^2}{ط}(ل^2 - \frac{ط^4}{ل^2})^{\frac{1}{2}} + \frac{ل^4}{ط^2} - ط^2 = 0$ یا
$ل^2 - \frac{2ل^2}{ط}(ل^2 - ط^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{ل^4 - ط^4}{ط^2} = 0$ اور اگر جذر لیوین دو نو طرفو نکا تو

$$ل - \frac{\sqrt{(ل^2 - ط^2)}}{ط} = 0 \therefore ل = \frac{\sqrt{(ل^2 - ط^2)}}{ط}$$ یعنی

$ط\, ل = \sqrt{(ل^2 - ط^2)}$ اور اگر مجذور کرین دو نو طرفون کو تو حاصل ہوگا یہہ
$ط^2 ل^2 = ل^4 - ط^2 \therefore ل^4 - ط^2 ل^2 = ط^2$ اور اگر کامل کرین ہم مربع کو تو حاصل ہوگا
یہہ $ل^4 - ط^2 ل^2 + \frac{ط^4}{4} = ط^2 + \frac{ط^4}{4} = \frac{5ط^4}{4}$ اگر لیوین ہم جذر تو
$ل^2 - \frac{ط^2}{2} = \pm \frac{ط^2\sqrt{5}}{2}$ اور $ل^2 = \frac{ط^2}{2} \pm \frac{ط^2\sqrt{5}}{2} = ط^2\,\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$\therefore ل = \pm ط\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}$$

۲۵ ایک شخص ایک کام کو ایک دن مین کرتا ہی اور دوسرا دو دن مین اور تیسرا تین دن مین اور چوتھا چار دن مین اور اگر چارون اکھٹا ہو کر کام کرین تو بتاؤ وے کتنے دنون مین کام کو پورا کرین گے
فرض کرو کہ وقت مطلوبہ = ل ہے اب چونکہ کام زیادہ ہوتا ہی جسقدر وقت زیادہ ہوتا ہی تو معلوم ہوا کہ اول شخص $\frac{ل}{1}$ حصہ کام کا کریگا اور دوسرا $\frac{ل}{2}$ حصہ کام کا کریگا اور تیسرا $\frac{ل}{3}$ حصہ کام کا کریگا اور چوتھا $\frac{ل}{4}$ حصہ کام کا کریگا
لیکن تمام سے حصے مساوی ایک کام سے کے ہونگے تو معلوم ہوا $\frac{ل}{1} + \frac{ل}{2} + \frac{ل}{3} + \frac{ل}{4} = 1$
$24ل + 12ل + 8ل + 6ل = 24 \therefore 50ل = 24 \therefore ل = \frac{24}{50} = \frac{12}{25}$ دن

۲۶ دو کرے ایسے ہین کہ حاصل جمع اونکی سطحو نکا = ط گز کے ہی اور حاصل جمع اونکے نصف قطرونکا = ع گز کے بتاؤ اونکے نصف قطر کیا ہین فرض کرو کہ ل اور ر ہین نصف قطر مطلوبہ آگے ایسکے ثابت کیا ہی کہ سطح اون کرون کی جسکے نصف قطر ل اور ر ہین یہہ $4\pi ل^2$ اور $4\pi ر^2$ ہوتے ہین اور اس جای واضح ہوا کہ π تعبیر کرتا ہی محیط اوس دایرہ کو جسکا نصف قطر ایک ہی پس موافق شرایط سوال سے کے

ل + د = ع اور ۴ک ل² + ۴ک د² = ط اور ∴ $\text{ل}^2 + \text{د}^2 = \frac{\text{ط}}{\text{۴ک}}$

لیکن چونکہ ل + د = ع ∴ ل = ع − د ∴ $\text{ل}^2 = (\text{ع} - \text{د})^2 = \text{ع}^2 - \text{۲ع د} + \text{د}^2$

∴ $\text{ع}^2 - \text{۲ع د} + \text{د}^2 + \text{د}^2 = \frac{\text{ط}}{\text{۴ک}}$ ∴ $\frac{\text{ط}}{\text{۴ک}} - \text{ع}^2 = \text{۲}\,\text{د}^2 - \text{۲ع د}$

∴ $\text{د}^2 - \text{ع د} = \frac{\text{ط} - \text{۴ک ع}^2}{\text{۸ک}}$ اور $\text{د}^2 - \text{ع د} + \frac{\text{ع}^2}{\text{۴}} = \frac{\text{ع}^2}{\text{۴}} + \frac{\text{ط} - \text{۴ک ع}^2}{\text{۸ک}}$

$= \frac{\text{ط} - \text{۲ک ع}^2}{\text{۸ک}}$ ∴ $\text{د} - \frac{\text{ع}}{\text{۲}} = \pm\sqrt{\frac{\text{ط} - \text{۲ک ع}^2}{\text{۸ک}}}$

∴ $\text{د} = \frac{\text{ع}}{\text{۲}} \pm \sqrt{\frac{\text{ط} - \text{۲ک ع}^2}{\text{۸ک}}}$

باب سوم

جاننا چاہیئے کہ بعض قاعدے ضرب اور تقسیم جبریہ کے ایسے ہین کہ اونمین فقط امثال اور علامتون پر عمل کیا جاتا ہے اور اسیواسطے عمل مین آسانی بہی ہوتی ہی اور چونکہ خواص مساوات مین اعمال ضرب اور تقسیم سے بہت کام پڑتا ہی اسواسطے اول اونکا لکھنا ضرور ہی اور بعد اسکے خواص مساوات اوسطریق سے لکھی جاوینگے جسطرح فضلاء یورپ نے زمانہ حال مین ثابت کیئے ہین

فصل اول بیچ بیان اوس قاعدہ ضرب اور تقسیم جبریہ کے جسمین امثال مقادیر جبریہ یعنی حروف کی علیحدہ کیئی جاتی ہین

بیان اول قاعدہ ضرب

اکثر اوقات قوای مقدارون جبریہ کی بتدریج زیادہ ہوتی ہین اور ایسی صورتونمین عمل ضرب کا بہت سہل ہوجاتا ہے اگر چہوڑ دین ہم قوای مختلف حروف یعنے مقادیر جبریہ کی اور عمل کرین اوپر امثال اونکی کے اور بعد ازان حاصل ضرب مین قوای مقدارون مذکور کو جو چہوڑ دین گئی ہین اونکی امثال کے آگی لکھدین جیسا کہ مثالون آئندہ سے واضح ہوتا ہی

مثال ١ ضرب کرو $\text{ل}^3 + \text{ل}^2\text{د} + \text{ل د}^2 + \text{د}^3$ کو $\text{ل} - \text{د}$ مین صورت عمل کی یہہ ہوگی

امثال مضروب کی یہہ ہین

١ + ١ + ١ + ١
١ − ١
١ + ١ + ١ + ١
١ − ١ − ١ − ١ −
١ − ٠ + ٠ + ٠ + ١

اب چونکہ لاٰ × لا = لاٰ کہ نہایت بڑی قوت لا کی ہی اور یہہ قوت بقدر آ یکے تبدریج کم ہوتی جاتی ہی
اور اسیقدر قوت ۃ کی زیادہ ہوتی جاتی ہی تو ظاہر ہی کہ حاصل ضرب یہہ ہوگا

لاٰ + ۰ × لاٰ ۃ + ۰ × لاٰ ۃ + ۰ × لا ۃ - ۃ = لاٰ - ۃ

۲ ضرب کرو ۳ طٰ + ۴ ط لا - ۵ لاٰ کو ۲ طٰ - ۶ ط لا + ۴ لاٰ مین پس اب ظاہر ہی
کہ صورت عمل کی یہہ ہوگی

۵ - ۴ + ۳

۴ + ۶ - ۲

۱۰ - ۸ + ۶

۳۰ + ۲۴ - ۱۸ -

۲۰ - ۱۶ + ۱۲ +

۲۰ - ۴۶ + ۲۲ - ۱۰ - ۶

پس معلوم ہوا کہ حاصل ضرب یہہ ہی ۶ طٰ - ۱۰ طٰ لا - ۲۲ طٰ لاٰ + ۴۶ ط لاٰ - ۲۰ لاٰ

۳ ضرب کرو ۲ طٰ - ۳ ط صٰ + ۵ صٰ کو ۲ طٰ - ۵ صٰ ظاہر ہی کہ اسس مثال مین امثال
طٰ کی تو مضروب مین اور طٰ کی مضروب فیہ مین صفر ہین اور اسیواسطی صورت عمل کی یہہ ہوگی

۵ + ۳ - ۰ + ۲

۵ - ۰ + ۲

۱۰ + ۶ - ۰ + ۴

۰ + ۰ - ۰ + ۰

۲۵ - ۱۵ + ۰ + ۱۰ -

۲۵ - ۱۵ + ۱۰ + ۱۶ - ۰ + ۴

پس معلوم ہوا کہ حاصل ضرب یہہ ہیے
۴ طٰ - ۱۶ طٰ صٰ + ۱۰ طٰ صٰ + ۱۵ ط صٰ - ۲۵ صٰ

بیان دوسرا قاعدہ تقسیم کی بیان مین

جو عمل تقسیم عام مین کرتے ہین وہی عمل اسس قسم کی تقسیم مین بہی کرنا چاہئیے الا یہہ کہ اسس صورت مین
امثال کو جدا کرنا چاہئیے اور فقط ان پر عمل کرنا چاہئیے اور بعد ازان خارج قسمت مین امثال سے آگے
مختلف قوای مقدارون جبریہ سے یعنے حروف وغیرہ کی لکہنی چاہئیے جیسیکہ واضح ہوگا مثالون آئندہ سے
مثال ۱ قسمت کرو ۶ طٰ - ۹۶ کو ۳ ط - ۶ پر اب ظاہر ہی کہ صورت یہہ ہوگی

۳-۲) ۶ + ۰+ ۰+ ۰+ ۰ – ۹۶ (۲+ ۴+ ۸+ ۱۶

۱۲ – ۶

۰+۱۲

۲۴ – ۱۲

۰+۲۴

۴۸ – ۲۴

۹۶ – ۴۸

۹۶ – ۴۸

اور چونکہ ط۴/ط = ط۳ پس معلوم ہوا کہ ط۳ اور ط۲ اور ط اور آ مقدارین جبریہ ہین جو آگے امثال ۲ اور ۴ اور ۸ اور ۱۶ کی خارج قسمت مین مندرج لگائی جائین اور یہان سے یہہ معلوم کہ خارج قسمت مطلوبہ یہہ ہی ۲ ط۳ + ۴ ط۲ + ۸ ط + ۱۶

۲ قیمت کرو ۸ ط۵ – ۴ ط۴ ل – ۲ ط۳ ل۲ + ط۲ ل۳ کو ۴ ط۲ – ل۲ پر اور اسیواسطی صورت عمل کی یہہ ہوگی

۱-۲) ۸ – ۴ – ۲ + ۱ (۴+ ۰ – ۱

۸ + ۰ – ۲

– ۴ – ۰ + ۱

– ۴ – ۰ + ۱

اور چونکہ ط۵/ط۲ = ط۳ تو معلوم ہوا کہ خارج قسمت مطلوبہ یہہ ہی ۲ ط۳ – ط۲ ل

بیان تیسرا قیاسی قاعدہ تقسیم مین

اوس قاعدہ قسمت کو جو مسٹر ہورنر صاحب نے ایجاد کیا ہی قاعدہ قیاسی سب کہتے ہین اور وجہہ تسمیہ اسکی معلوم ہو جاویگی مرقومہ الذیل سے ظاہر ہے کہ قاعدہ عام تقسیم مین تمام اجزای مقسوم علیہ کے ضرب کئے جاتی ہین اول جز سے خارج قسمت کے مین اور اس حاصل ضرب کو تفریق کرتے ہین مقسوم مین سے لیکن عمل تفریق کا جاری کیا جاتا تبدیل کرنے سے علامتین مفروق کی اور بعد ازان جمع کرنے سے ساتھہ مفروق منہ کی پس معلوم ہوا کہ اگر تبدیل کرین ہم علامتین سب اجزا مقسوم علیہ کے تو اس صورت مین حاصل ضرب مذکور ساتھہ مقسوم کے فقط جمع کرنا چاہیگا اور تفریق کرنا اور چونکہ متواتر یہی عمل کیا جاتا ہی تو معلوم ہوا کہ ہر حاصل ضرب جو حاصل

ہوگا ضرب دینی سے مقسوم علیہ کو کسی جز خارج قسمت کی مین جمع کیا جائیگا اور تفریق کیا جائیگا اس صورت
مین ظاہر ہی کہ مقسوم دوم وہی ہوگا جیسی کہ ہوتا ہی جسوقت جاری کیا جاتا ہی قاعدہ مروج لیکن چونکہ دوسرا جز
خارج قسمت کا حاصل ہوتا ہی تقسیم کرنی سے اول جز مقسوم دوم کو اول جز مقسوم علیہ پر اور اول جز مقسوم علیہ کے
علامت تبدیل کی گئی ہی تو ظاہر ہی کہ علامت دوسری جز خارج قسمت کی وہ نہین ہوگی جو چاہیے پس واسطی درست
کرنے اسی وقت کی ہم نہین بدلتی ہین علامت اول جز مقسوم علیہ کی اور نہین سب لکھتے ہین اون حاصل ضربون کو
جو حاصل ہوتی ہین ضرب دینی سے ہر جز خارج قسمت کو اول جز مقسوم علیہ مین کسواسطی موافق قاعدہ مروج کے
بوسیلہ حاصل ضرب مذکور کے اول اجزای تمام مقسومون متواتر کے زایل ہوجاتے ہین پس جسوقت چھوڑ دیا ہمنے
ان حاصل ضربون کو تو سیر ہمنے امثال اول جز کسی مقسوم کی ہونگے امثال اول جز خارج قسمت کی کسواسطے کہ امثال اول
جز مقسوم علیہ کا عدد آگاہی اور یہہ بات عمل مین اسکتی ہی تقسیم کرنی سے مقسوم اور مقسوم علیہ کو امثال اول جز مقسوم
علیہ پر اب ظاہر ہی کہ امثال جزون خارج قسمت کی ہونگی امثال اول جز دوم مقسومون کے عمل مذکور اور یہی سہل ہوسکتا ہی اگر
جمع نکرین ہم سب اجزای کو بلکہ اونہی اجزا کو جتنی کفایت کرین واسطے بتادینے اول جز ہر مقسوم کے اور لکھین ہم
اون حاصل ضربون کو جو حاصل ہون ضرب دینی سے ایک کم اجزای مقسوم علیہ کو اجزای خارج قسمت مین خطون یا
قطارون ترچھی مین بدلے خطون عرضی مین جیسیکہ موافق قواعد مروج کی ہوتا ہی بیان سے یہہ قاعدہ نکلتا ہی

قاعدہ

اول قسمت کرو مقسوم اور مقسوم علیہ کو سر اول جز مقسوم علیہ پر اور اس عمل سے سر اول جز مقسوم علیہ کا آ
ہوجائیگا اور اول جز خارج قسمت اور مقسوم کا ایک ہوجائیگا دوم تبدیل کرو علامتین تمام اجزای الا ایک مقسوم علیہ کو اور
ضرب کرو تمام اجزا کو جنکی علامتین تبدیل کی گئی ہین اول جز خارج قسمت مین اور حاصل ضرب کو اول سطر سی ابتدا کر کے ایک
قطار ترچھی مین لکھو سوم جمع کرو اون اجزا کو جو واقع ہون اول قطار عمودی مین اور ضرب کرو اجزای مبدلہ مقسوم علیہ کو
اس حاصل جمع مین اور بطور سابق کے لکھو حاصل ضرب کو ایک ترچھی قطار مین چہارم جمع کرو اجزای دوم قطار عمودی
کو اور حاصل جمع ہوگا دوسرا جز خارج قسمت کا اور ضرب کرو اجزای مبدلہ مقسوم علیہ کو اس حاصل جمع مین اور حاصل ضرب
کو بطور سابق کے لکھو اور یہی عمل کیے جاؤ جبتک کہ اجزای مقسوم کے تمام ہوجائین جیسیکہ ہوتا ہی موافق قاعدہ مروج کے
ظاہر ہی کہ قاعدہ مروج قسمت کی کو دیکھکر مہندسس ہورنر نے اس قاعدہ کو قیاس سے اسستنباط کرلیا ہی اور اسیواسطے
اس قاعدہ کو قاعدہ قیاسی کہتے ہین

مثال ۱ چاہتے ہین ہم تقسیم کرنا $ط^5 - 5ط^4ل + 10ط^3ل^2 - 10ط^2ل^3 + 5طل^4 - ل^5$
کو $ط^2 - 2طل + ل^2$ پر اب موافق قاعدہ گذشتہ کی صورت عمل کی یہہ ہوگی

۱	۱ − ۵ + ۱۰ − ۱۰ + ۵ − ۱
۲+	+ ۲ − ۶ + ۶ − ۲
۱ −	− ۱ + ۳ − ۳ + ۱

۱ − ۳ + ۳ − ۱ × ×

اور یہان سے معلوم ہوا کہ خارج قسمت مطلوبہ یہہ ہی

$ط^{۳}$ − ۳ $ط^{۲}$ لا + ۳ ط $لا^{۲}$ − $لا^{۳}$ ظاہر ہی کہ اس مثالین امثال اجزای مقسوم سے خط یا قطار عرضی مین لکھے گئے ہین اور امثال اجزای مقسوم علیہ قطار عمود مین اور تمام اجزا الا ایک مقسوم علیہ کی تبدیل کیے گئے ہین اور بعد ازان + ۲ اور − ۱ کو کہ تبدیل کیے ہوئے اجزای مقسوم علیہ کے ہین ضرب کیا ہی ۱ مین کہ اول جز مقسوم یا خارج قسمت کا ہی اور حاصل ضربون + ۲ اور − ۱ کو خط ترچھی مین نیچے − ۵ اور + ۱۰ کے لکھا ہی کہ سے متماثل ہین + ۲ اور − ۱ کے بعد ازان جمع کیا ہی ہمنے دوسرے قطار عمود کو اور اس عمل سے حاصل ہوا ہی − ۳ کہ دوسرا جز خارج قسمت کا اور جسوقت ضرب کرتے ہین ہم − ۳ کو + ۲ اور − ۱ مین اوسوقت حاصل ضرب − ۶ اور + ۳ ہوتی ہین اور انکو ترچھی قطار مین نیچے + ۱۰ اور − ۱۰ کے لکھا ہی اور حاصل جمع تیسری قطار عمود کا + ۳ ہی اور یہہ ہی تیسرا جز خارج قسمت کا پس ضرب کیا ہمنے اس حاصل جمع کو اجزای تبدیل کیے ہوئے مقسوم علیہ میں تو حاصل ضرب سے ہونگی + ۶ اور − ۳ پس حاصل جمع چوتھی قطار عمود کا − ۱ ہی اور اس سے حاصل ہوتی ہی اخیر قطار ترچھی − ۲ + ۱ اور بعد ازان عمل تمام ہوتا ہی

۲ قسمت کرو $لا^{۶}$ − ۵ $لا^{۵}$ + ۱۵ $لا^{۴}$ − ۲۴ $لا^{۳}$ + ۲۷ $لا^{۲}$ − ۱۳ لا + ۵ کو اوپر $لا^{۴}$ − ۲ $لا^{۳}$ + ۴ $لا^{۲}$ − ۲ لا + ۱ کے اب ظاہر ہی کہ صورت عمل کی یہہ ہوگی

۱	۱ − ۵ + ۱۵ − ۲۴ + ۲۷ − ۱۳ + ۵
۲+	+ ۲ − ۶ + ۱۰
۴ −	− ۴ + ۱۲ − ۲۰
۲ +	+ ۲ − ۶ + ۱۰
۱ −	− ۱ + ۳ − ۵

۱ − ۳ + ۵ + ۰ + ۰ + ۰ + ۰

پس معلوم ہوا کہ خارج قسمت مطلوبہ یہہ ہی لا² - ۳ لا + ۵

۳ تقسیم کرو ط⁵ + ۲ ط⁴ ص + ۳ ط³ ص² - ط² ص³ - ۲ ط ص⁴ - ۳ ص⁵ کو

ط² + ۲ ط ص + ۳ ص² پر اس جگہ واضح ہو کہ چونکہ امثال جز مقسوم علیہ کا کچھہ دخل عمل مین نہین رکہتا ہی تو

اوسی ہم صورت عمل مین نہین لکھین گے اور واسیواسطے صورت عمل کی یہہ ہی

	۱ + ۲ + ۳ - ۱ - ۲ - ۳
- ۲	- ۲ + ۰ + ۰ + ۲
- ۳	- ۳ + ۰ + ۰ - ۳

۱ + ۰ + ۰ - ۱

پس معلوم ہوا کہ خارج قسمت مطلوبہ یہہ ہی

ط³ + ۰ × ط² ص + ۰ × ط ص² - ص³ = ط³ - ص³

فصل دویم مساواتون کے خواص کے بیان مین

پہلے لکھنے مطالب اس باب کے ضروری ہی کہ لکھین ہم چند تعریفین یا معنے اصطلاحون کے جو مساواتون کے

بیان مین اکثر مستعمل ہوتے ہین

حدود

۱ اوس صورت جبریہ کو جو تعبیر کرتی ہی مساوات کسی دو مقدارون کو مساوات کہتی ہین

۲ قیمت کسی مساوات کی وہ مقدار ہوتی ہی کہ اگر اسکو لکھین ہم بجاے مقدار مجہول مساوات کے تو وہ

شرط جو تعبیر ہوتی ہی مساوات مذکور سے پوری ہو جاتی ہی

۳ جملہ کسی مقدار کا اوس صورت جبریہ کو کہتے ہین جسمین مقدار مذکور پای جاتی ہو کسی طرح سے

مثلاً ط لا² + ص اور ط لا³ + س لا + د اور (ط لا² + ص) / (س لا + د) اور ط ہین تمام جملے لا کے

اور ۸ لا - ۵ و اور (ط لا² + ص) / (س لا + و) اور و² + لا و + لا² + ص + ۲ ہین تمام جملے لا اور و کے

ان جملون کو تعبیر کیا کرتے ہین ساتھہ علامتون ج (لا) اور ج (لا اور و) کے

شکل ۱ اگر کسی جملہ لا کو کہ مثل اسکی ہو لاⁿ + ف لاⁿ⁻¹ + ق لاⁿ⁻² + ک لاⁿ⁻³ + وغیرہ

قسمت کرین ہم لا - ط پر تو ہم کہتے ہین کہ جو کچھہ بعد قسمت کے باقی رہیگا وہ ایسا ہی جملہ ط کا ہوگا جیسا

کہ جملہ اصلی ہی لا کا واسطے ثابت کرنے اس بات کے فرض کرو کہ

ج (لا) = لاⁿ + ف لاⁿ⁻¹ + ق لاⁿ⁻² + وغیرہ

اور یہہ بہی فرض کرو کہ تقسیم کرینے سے ج (لا) کو لا ــ ط پر خارج قسمت تو ع ہوتا ہی اور ب باقی رہتا ہی اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات ج (لا) = ع (لا ــ ط) + ب

اب یہہ بات ظاہر ہی کہ یہہ مساوات درست ہونی چاہئے مطابق ہر قیمت لا کی پس جسوقت لا = ط اوسوقت حاصل ہوگی یہہ مساوات ج (ط) = ۰ + ب

اب چونکہ ب کچہہ تعلق لا سے نہین رکہتا ہی یعنے قیمت ب کی نہین موقوف ہوتی ہی قیمت لا کی پر تو ثابت ہوا کہ باقی یعنے ب وہی جملہ کا ہی جیسکہ جملہ اصلی ہی جملہ لا کا

مثالین

۱ کیا رہیگا باقی اگر قسمت کرین ہم لا² ــ ۶ لا + ۷ کو لا ــ ۲ پر اور جواب دو بغیر عمل کرنی تقسیم کے

۲ کیا رہیگا باقی اگر قسمت کرین ہم لا³ ــ ۶ لا² + ۸ لا ــ ۱۹ کو لا + ۳ پر

۳ کیا رہیگا باقی اگر قسمت کرین ہم لا⁴ + ۶ لا³ + ۷ لا² + ۵ لا ــ ۴ کو لا ــ ۵ پر

۴ کیا رہیگا باقی اگر قسمت کرین ہم لا³ + ف لا² + ق لا + ک کو ط ــ لا پر

اجوبہ

۱ ب = ۲² ــ ۶ × ۲ + ۷ = ۴ ــ ۱۲ + ۷ = ــ ۱

۲ ب = (ــ ۳)³ ــ ۶ (ــ ۳)² + ۸ (ــ ۳) ــ ۱۹ = ــ ۱۲۴

۳ ۱۵۱۷

۴ ط³ + ف ط² + ق ط + ک

شکل ۲ اگر ط ہووے ایک قیمت مساوات آئندہ کے

لاⁿ + ا₁ لاⁿ⁻¹ + ا₂ لاⁿ⁻² + ... ا ن₋₂ لا² + ا ن₋₁ لا + ا ن = ۰

تو ہم دعوی کرتے ہین کہ اول طرف اس مساوات کی پوری قسمت ہوسکتی ہی لا ــ ط پر کسواسطی کہ اگر قسمت کرین ہم اس مساوات کو لا ــ ط پر تو موافق شکل (۱) کے باقی رہیگا یہہ طⁿ + ا₁ طⁿ⁻¹ + ا₂ طⁿ⁻² + ... ا ن₋₁ ط + ا ن

اور یہہ یعنے ب مساوی صفر کے ہی کسواسطے کہ جسوقت لکہین ہم مساوات ج (لا) = ع (لا ــ ط) + ب مین ط بجای لا کے تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ج (ط) = ۰ + ب اور چونکہ ط ایک قیمت مساوات کی ہی تو بالضرور ج (ط) = ۰ اور اسیواسطی

معلوم ہوا کہ ب = ۰ اور یہان سے معلوم ہوا کہ مساوات مفروض پوری تقسیم ہو سکتی ہی لا − ط پر اس شکل کے برعکس یہہ ثابت ہو سکتا ہی کہ اگر مساوات مفروض لا − ط پر پوری قسمت ہو سکی تو ط بہی ایک قیمت اس مساوات کی ہوگی اس صورت مین حاصل ہو گئے یہہ مساوات

ج (لا) = ع (لا − ط) اور جسوقت لا = ط اوسوقت ج (ط) = ۰ اور یہان سی یہہ معلوم ہوا کہ اگر لکہین ہم ط بجای لا کی مساوات ج (لا) = ۰ مفروض مین تو شرط مساوات کی پوری ہو جاتی ہی اور اسیواسطی ط ہی ایک قیمت اس مساوات کی

شکل ۳ ہر مساوات کی کہ جسمین فقط ایک مقدار مجہول ہوتی ہی اوتنی ہی قیمتین ہوتی ہین جتنے احاد ہوتے ہین سب سے بڑی نشان قوت مقدار مجہول مذکور کے مین فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ ہی مساوات مفروض ن درجہ کی اور ط۱ ہی ایک اسکی قیمت تو موافق شکل گذشتہ کی حاصل ہوگی یہہ مساوات

(لا − ط۱) ج۱ (لا) = ج (لا) = ۰ اور اسجاے ج۱ (لا) بعتبیر کرتا ہی اوس خارج قسمت کو جو پیدا ہوتا ہی تقسیم کرنی سے ج (لا) کو لا − ط۱ پر اب اگر ط۲ ایک قیمت ج (لا) = ۰ سکے ہو تو ظاہر ہی کہ ج۱ (لا) پورا قسمت ہونا چاہیئے لا − ط۲ پر کسواسطی کہ لا − ط۱ نہین قسمت ہو سکتا ہی لا − ط۲ پر اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات (لا − ط۱) (لا − ط۲) ج۲ (لا) = ج (لا) = ۰ اور اسجاے ج۲ (لا) بعتبیر کرتا ہی اوس خارج قسمت کو جو پیدا ہوتا تقسیم کرنی سے ج۱ (لا) کو لا − ط۲ پر پس اگر اسیطرح سے ہو دین

ط۳ اور ط۴ اور ط۵ ...... ط ن قیمتین مساوات مفروض کی تو ضرور ہی کہ صورت ج (لا) پوری قسمت ہو سکی ہر واحد پر ان جزوین سے لا − ط۲ اور لا − ط۳ اور لا − ط۴ اور لا − ط۵ .... لا − ط ن پر اور سیواسطی مساوات مفروض کی یہہ شکل ہو جاسیے گی (لا − ط۱) (لا − ط۲) (لا − ط۳) ...... (لا − ط ن) = ۰

اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ جتنے اجزای ضربی اس مساوات مین ہین اوتنی ہی قیمتین بہی اس مساوات کی ہین یعنے جتنے احاد سب سے بڑے نشان قوت لا یعنی مقدار مجہول کی مین ہین اوتنی ہی قیمتین ہین کسواسطے کہ مساوات گذشتہ پوری ہو سکتی ہی بوسیلہ کسی ایک کے ن مساواتون شرطی مرقوم الزیل سے

لا = ط۱ اور لا = ط۲ اور لا = ط۳ اور .... لا = ط ن

حکم شکل مذکورہ بالا سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اگر معلوم ہو ہمین ایک قیمت کسی مساوات کی تو بوسیلہ عمل تقسیم قیاسی کے ہم گہٹا سکتے ہین ایک مرتبہ مساوات مذکورہ کا اور اس نئی مساوات مین باقی قیمتین مساوات مفروض کی ہونگی

ہونگی اور اسیطرح سے اگر ایک سے زیادہ قیمتین کسی مساوات مفروض کی معلوم ہون تو دریافت کرسکتے ہین اوتنی ہی کم درجہ کی مساوات جتنی قیمتین ہمین معلوم ہین اور پس نئی مساوات مین ہونگی باقی سب قیمتین اب ہم لکھتے ہین چند مثالین واسطے مشق کے

مثالین

۱ ایک قیمت مساوات لا^۴ − ۲۵ لا^۲ + ۶۰ لا − ۳۶ = ۰ کے ۳ ہے جانتے ہین ہم دریافت کرنے وہ مساوات جسمین پائی جاوین باقی قیمتین مساوات مفروض کی

۳۶ − ۶۰ + ۲۵ − ۰ + ۱ (۳

۳۶ + ۴۸ − ۹ + ۳

۱۲ + ۱۶ − ۳ + ۱

پس معلوم ہوا کہ مساوات مطلوبہ یہہ ہی لا^۳ + ۳ لا^۲ − ۱۶ لا + ۱۲ = ۰

۲ دو قیمتین مساوات لا^۴ − ۱۲ لا^۳ + ۴۸ لا^۲ − ۶۸ لا + ۱۵ = ۰ کے ۳ اور ۵ ہین اور جانتے ہم دریافت کرنی وہ مساوات درجہ دویم کی جسمین باقی قیمتین ہونگی

۱۵ + ۶۸ − ۴۸ + ۱۲ − ۱ (۳

۱۵ − ۶۳ + ۲۷ − ۳ +

۵ − ۲۱ + ۹ − ۱ (۵

۵ + ۲۰ − ۵ +

۱ + ۴ − ۱

اور یہان سے معلوم ہوا کہ مساوات درجہ دوم مطلوبہ یہہ ہی لا^۲ − ۴ لا + ۱ = ۰

۳ ایک قیمت مساوات مکعبی لا^۳ − ۶ لا^۲ + ۱۱ لا − ۶ = ۰ کی ۱ ہی اور جانتے ہین ہم دریافت کرنی مساوات درجہ دوم کی کہ اوسمین باقی قیمتین ہونگی

جواب لا^۲ − ۵ لا + ۶ = ۰

۴ دو قیمتین مساوات مال مالی یعنی چوتہے مرتبہ ۴ لا^۴ − ۱۴ لا^۳ − ۵ لا^۲ + ۳۱ لا + ۶ = ۰ کی ۲ اور ۳ ہین بتاؤ کیا ہوگی مساوات باقی قیمتون کی

جواب ۴ لا^۲ + ۶ لا + ۱ = ۰

۵ ایک قیمت مساوات مکعبی لا^۳ + ۳ لا^۲ − ۱۶ لا + ۱۲ = ۰ کے ۱ ہی بتاؤ باقی قیمتین

جواب $\sqrt{2}$ اور -6

۶ دو قیمتین مساوات چوتھے درجہ $ل^{4} - 6ل^{3} + 14ل - 16 = 0$ کی $\sqrt{2}$ اور $-\sqrt{2}$ ہین دریافت کرو باقی قیمتون کو

جواب $3 \pm \sqrt{-5}$

شکل ۴ چاہتے ہین ہم بنانی ایک ایسی مساوات جسکی قیمتین سے ہین $ط_1$ اور $ط_2$ اور $ط_3$ ...... $ط_ن$ موافق شکل گذشتہ کے یہہ ظاہر ہی کہ اول طرف اس مساوات مطلوبہ کے یہہ ہوگی $(ل - ط_1)(ل - ط_2)(ل - ط_3)(ل - ط_4)\cdots\cdots(ل - ط_ن)$

اور اسیواسطی مساوات مطلوبہ یہہ ہی $(ل - ط_1)(ل - ط_2)(ل - ط_3)\cdots\cdots(ل - ط_ن) = 0$

اب جسوقت جاری کرین ہم عمل ضرب کا کہ تعبیر کیا جاتا ہی متصل ہونے خطوط وحدانی کی سے تو حاصل ہونگی سے مساواتین

جبکہ ن = ۲ تو

$$ل^{2}\begin{array}{l} - ط_1 \\ - ط_2 \end{array}\Bigg|\; ل + ط_1 ط_2 = 0$$

اور جبکہ ن = ۳ تو

$$ل^{3}\begin{array}{l} - ط_1 \\ - ط_2 \\ - ط_3 \end{array}\Bigg|\; ل^{2}\begin{array}{l} + ط_1 ط_2 \\ + ط_1 ط_3 \\ + ط_2 ط_3 \end{array}\Bigg|\; ل - ط_1 ط_2 ط_3 = 0$$

جبکہ ن = ۴ اوسوقت حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$ل^{4}\begin{array}{l} - ط_1 \\ - ط_2 \\ - ط_3 \\ - ط_4 \end{array}\Bigg|\; ل^{3}\begin{array}{l} + ط_1 ط_2 \\ + ط_1 ط_3 \\ + ط_2 ط_3 \\ + ط_1 ط_4 \\ + ط_2 ط_4 \\ + ط_3 ط_4 \end{array}\Bigg|\; ل^{2}\begin{array}{l} - ط_1 ط_2 ط_3 \\ - ط_1 ط_2 ط_4 \\ - ط_1 ط_3 ط_4 \\ - ط_2 ط_3 ط_4 \end{array}\Bigg|\; ل + ط_1 ط_2 ط_3 ط_4 = 0$$

اور اسی قیاس پر اور مساواتین بہی نکل سکتی ہین جسوقت ن زیادہ ہووسے ۴ سے اور مساواتون گذشتہ سی سے باتین حاصل ہوتی ہین

۱ سر دوسری جز حاصل ضرب کا ہوتا ہی حاصل جمع تمام قیمتونکا کہ اونکی علامتین بدلی گئی ہون

۲ سر تیسری جز اوسی حاصل ضرب کا ہوتا ہی حاصل جمع دو دو قیمتون کے حاصل ضربونکا لیکن انکی سب ہے

علامتین بدلی ہوئی ہون

۳ سر چوتہی جزکا ہوتا ہی حاصل جمع تین تین قیمتون سے کے حاصل ضربون کا کہ ہر واحد ان مین کے علامت تبدیل کی ہوئی ہو

۴ سر پانچوین جزکا ہوتا ہی حاصل جمع چار چار قیمتون سے کے حاصل ضربونکا لیکن انکی علامتین تبدیل ہوئی ہون اور علی ہذ القیاس سر آخیر جز ہوتا ہی حاصل ضرب تمام قیمتونکا لیکن انکی علامتین بدلی ہوئی ہون یعنے ان تمام قیمتون کی اصلی علامتون کو تبدیل کرکے انکو آپسمین ضرب دیا ہو سوا ان باتون کی پانچ احکام اس شکل سے نکلتے ہین

حکم ۱ اگر سر دوسری جز کسی مساوات کا صفر ہو یعنے مساوات مذکور مین دوسرا جز نہو تو بالضرور حاصل جمع قیمتون مثبت کا مساوی ہوگا حاصل جمع قیمتون منفیہ کی حکم ۲ اگر علامتین تمام اجزا کسی مساوات کی مثبت ہون تو تمام قیمتین اس مساوات منفی ہونگی اور اگر علامتین متواتر مثبت اور منفی ہون تو تمام قیمتین مثبت ہونگے

حکم تیسرا ہر قیمت کسی مساوات پر پورا تقسیم ہو سکتا ہی مساوات مذکور کا اخیر جز کہ اسکو جز مطلق بہی کہتی ہین

حکم ۴ جس مساوات مین سر جز اول کا عدد ایک ہو اور سر باقی اجزا کے اعداد صحیحہ ہون اوسمین کوئی قیمت کسر نہین ہو سکتی ہی یہہ بات ثابت ہو جائیگی جسوقت لیجائینگی ہم جز مطلق کو دوسری طرف مساوات کے اور لکہین ہی بجای مجہول کے کوئی کسر مختصرہ کیونکہ اس صورت مین یہہ لازم اجائیگا کہ ایک کسر مساوی ہی ایک عدد صحیح کی اور یہہ بات محال ہے

حکم ۵ جس مساوات مین تمام قیمتین ممکن ہون اور جز اخیر بہت چہوٹا یعنے کم ہو تو ضرور ہی کہ قیمتین اس مساوات کی بہت چہوٹی ہون

مثالین

بناؤ ایک ایسی مساوات جسکی قیمتین ۲ اور ۳ اور ۵ اور − ۶ ہین بس اس صورت مین فقط یہہ بات لازم ہی کہ جاری کرین ہم عمل ضرب کا کہ تعبیر کیا جاتا ہی مساوات اخذہ مین (ل−٢)(ل−٣)(ل−٥)(ل+٦) = ٠
اب اگر علیحدہ کرین ہم سرون کو حروف سی تو صورت عمل کی یہہ ہوگی

١ − ٢ | ٣

− ٣ + ٦

١ − ٥ + ٦ | − ٥

− ٥ + ٢٥ − ٣٠

١ − ١٠ + ٣١ − ٣٠ | ٦

٦ − ٦٠ + ١٨٦ − ١٨٠

١ − ٤ − ٢٩ + ١٥٦ − ١٨٠

اور یہان سے معلوم ہوا کہ مساوات مطلوبہ یہہ ہی $لا^{۴} - ۸لا^{۳} - ۲۹لا^{۲} + ۱۵۶لا - ۱۸۰ = ۰$

۲ بناؤ ایک ایسی مساوات جسکی قیمتین یہ ہین ۱ اور ۲ اور −۳

۳ بناؤ ایک ایسی مساوات جسکی قیمتین یہ ہین ۳ اور −۴ اور $۲ + \sqrt{۳}$ اور $۲ - \sqrt{۳}$

۴ بناؤ ایک ایسی مساوات جسکی قیمتین یہ ہین $۲ + \sqrt{۵}$ اور $۲ - \sqrt{۵}$ اور −۶

۵ بناؤ ایک ایسی مساوات جسکی قیمتین یہ ہین ۱ اور −۲ اور ۳ اور −۴ اور ۵ اور −۶

۶ بناؤ ایک ایسی مساوات جسکی قیمتین یہ ہین $۲ + \sqrt{-۱}$ اور $۲ - \sqrt{-۱}$ اور −۳

۷ بناؤ ایک ایسی مساوات جسکی قیمتین یہ ہین ۲ اور ۴ اور $\frac{۱}{۴}$ اور $\frac{۱}{۲}$

اجوبہ

۲ $لا^{۳} - ۷لا + ۶ = ۰$

۳ $لا^{۴} - ۳لا^{۳} - ۱۵لا^{۲} + ۴۹لا - ۱۲ = ۰$

۴ $لا^{۳} - ۳۲لا + ۲۴ = ۰$

۵ $لا^{۶} + ۳لا^{۵} - ۴۱لا^{۴} - ۸۷لا^{۳} + ۴۰۰لا^{۲} + ۴۴۴لا - ۷۲۰ = ۰$

۶ $لا^{۳} - لا^{۲} - ۷لا + ۱۵ = ۰$

۷ $۸لا^{۴} - ۵۴لا^{۳} + ۱۰۱لا^{۲} - ۵۴لا + ۸ = ۰$

شکل ۵ اگر کسی مساوات کی اجزا کی ایک ایک چہوڑ کر علامتین بدلی جائین تو علامتین تمام قیمتون اس مساوات کی بہی بدل جائینگی فرض کرو کہ یہہ مساوات

$$لا^{ن} + ا_{۱}لا^{ن-۱} + ا_{۲}لا^{ن-۲} + ا_{۳}لا^{ن-۳} + \cdots + ا_{ن} = ۰ \quad \cdots\cdots (۱)$$

اب اگر علامتین اجزای اس مساوات کی ایک ایک بیچمین چہوڑ کر بدلین تو حاصل یہہ ہونگی مساواتین

$$لا^{ن} - ا_{۱}لا^{ن-۱} + ا_{۲}لا^{ن-۲} \cdots \pm ا_{ن-۱}لا \mp ا_{ن} = ۰ \quad \cdots\cdots (۲)$$

$$-لا^{ن} + ا_{۱}لا^{ن-۱} - ا_{۲}لا^{ن-۲} \cdots \mp ا_{ن-۱} \pm ا_{ن} = ۰ \quad \cdots\cdots (۳)$$

اس جا ظاہر ہی کہ مساواتین (۲) اور (۳) ایک سی ہین کیونکہ ان دونون مین حاصل جمع مثبت اجزای کا مساوی ہی حاصل جمع منفی اجزای کے اب اگر کہین ایک قیمت ط مساوات اول اور −ط کو مساوات دوم مین بجای لا کے تو جو کچہہ ان دونون مساواتون سے اسوقت حاصل ہوگا وہ یکسان ہوگا اور چونکہ

اور چونکہ مساوات (۱) قیمت ط سے پوری ہوتی ہی تو ضرور ہی کہ - ط سی مساوات (۲) پوری ہووے ہی اور یہان سے معلوم ہوا کہ - ط ہی ایک قیمت مساوات (۲) یا (۳) کی حکم اگر علامتین تمام اجزاء کسی مساوات کی تبدیل کی جائین تو علامتین قیمتون اس مساوات کی تبدیل ہنین ہونگی

مثالین

۱ قیمتین مساوات لا³ - ۶لا² + ۱۱لا - ۶ = ۰ کی ۱ اور ۲ اور ۳ ہین بتاؤ کیا ہین قیمتین اس مساوات کی لا³ + ۶لا² + ۱۱لا + ۶ = ۰ جواب -۱ اور -۲ اور -۳

۲ قیمتین مساوات لا⁴ - ۶لا³ + ۲۴لا - ۱۶ = ۰ کی ۲ اور -۲ اور ۳ ± √۵ ہین بتاؤ وہ کونسی مساوات ہی جسکی قیمتین یے ہین -۲ اور ۲ اور -(۳ ± √۵)

جواب - لا⁴ - ۶لا³ - ۲۴لا - ۱۶ = ۰

شکل ۶ مقادیر نزولی اور قیمتین غیر ممکن کی مساواتون مین جوڑی ہوتی ہین یعنے یے مقادیر دو دو اسمین ضرب پاکر مساوات مین نمودار ہوتی ہین فرض کرو کہ یہہ مساوات ہی

لاⁿ + ا₁ لاⁿ⁻¹ + ا₂ لاⁿ⁻² + ... + اₙ₋₁ لا + اₙ = ۰ اور اوسکی ایک قیمت یہہ ہی

ط + ص √-۱ تو ہم دعوی کرتے ہین کہ ط - ص √-۱ ہی ایک قیمت اسی مساوات کی ہی اسواسطے کہ اگر لکھین ہم ط + ص √-۱ کو مساوات مفروض مین بجای لا کے تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

(ط + ص √-۱)ⁿ + ا₁ (ط + ص √-۱)ⁿ⁻¹ + ... اₙ₋₁ (ط + ص √-۱) + اₙ = ۰

اب اگر دریافت کرین ہم صورت مفصلہ اجزای اس مساوات کی تو حاصل ہونگی دو مجموعی مختلف قسم کی اجزای سے ایک تو انمین کا ہوگا مجموعہ جفت قوتون ص √-۱ کا یعنی مقادیر ممکن کا اور اوسکو تعبیر کرتے ہین ف سے اور دوسرا ہوگا مجموعہ مقادیر غیر ممکن کا اور اوسکو ہم تعبیر کرتے ہین ق √-۱ سی پس حاصل ہوگی یہہ مساوات ف + ق √-۱ = ۰

اور چونکہ ف اور ق ایک دوسرے سے کچھ علاقہ نہین رکھتے ہین تو ضرور ہی کہ ف = ۰ اور ق = ۰

اب لکھو ط - ص √-۱ واسطے لا کی مساوات مفروض مین اب چونکہ طاق قوتین - ص √-۱ کی منفی ہونگی تو ضرور ہی اب حاصل ہووے یہہ صورت ف - ق √-۱ اور چونکہ پہلے ثابت ہوچکا ہی کہ ف = ۰ اور ق = ۰ تو معلوم ہوا کہ ۰ + ق √-۱ = ۰ اور یہان سے یہہ بات معلوم ہوئی کہ جسوقت سکتے

لکھتے ہین ہم ط - ص √-۱ بجای لا کے مساوات مفروض مین تو شرط مساوات کی پوری ہوجاتی ہی اور اسیواسطی ثابت ہوا کہ - ق √-۱ بہی ایک قیمت مساوات مفروض کی ہی بعینہٖ اسیطرح سے یہہ ثابت ہوسکتا ہی کہ اگر ط + √ص ہووی ایک قیمت کسی مساوات مفروض کے تو بالضرور ط - √ص بہی ایک قیمت اوسی کی ہوگی

حکم ۱ وہ مساوات جسکی بعضی یا تمام قیمتین غیر ممکن ہون ضرور ہی کہ تقسیم ہوسکی اسپر یعنے بر { لا - (ط - ص √-۱) } { لا - (ط + ص √-۱) }

لا² - ۲ ط لا + ط² + ص² اور یہان سے یہہ معلوم ہوا کہ تمام مساواتین نزولی حل ہوسکتی ہین غیر نزولی اجزای مین اور سیے اجزا یا تو اولی درجہ کی ہونگی یا دوم درجہ کی اور قیمتین غیر ممکن ممکن ہوسکتی موافق شرایط مذکور کے

حکم ۲ ممکن ہی کہ تمام قیمتین ایک جفت درجہ کی مساوات کی غیر ممکن ہون اور اگر سیے سب قیمتین غیر ممکن نہ ہون گی تو بالضرور کم سیے کم دو قیمتین ممکن ہونگی

حکم ۳ چونکہ حاصل ضرب ہر جوڑہ غیر ممکن قیمتون کا ط² + ص² کے شکل کا ہوتا ہی اور ط² + ص² اپنی ذات سی ایک مقدار مثبت ہی تو معلوم ہوا کہ اخیر جزاوس مساوات کا جسکی سب قیمتین غیر ممکن ہین مثبت ہوتا ہی

حکم ۴ ہر مساوات طاق درجہ کی مین بالضرور کم سیے کم ایک قیمت ممکن ہوتی ہی اور علامت اوس ایک قیمت کے مخالف ہوتی ہی علامت اخیر جزاوسی مساوات کی سیے

حکم ۵ ہر مساوات جفت درجہ کی مین کہ جسکا اخیر جز منفی ہو کم سے کم دو قیمتین ممکن یعنے اصلی ہونی چاہئین ایک اونمین سیے مثبت اور دوسری اونمین کی منفی ہوتی ہی

شکل ۷ کسی مساوات مین تعداد قیمتون مثبت کی نہین زیادہ ہوسکتی ہی تعداد تبدیلیون علامتون کے + سیے - مین یا - سے + مین اور تعداد منفی قیمتونکی نہین زیادہ ہوسکتی ہی تعداد متواتر آنیے ایکہی علامت کی سیے فرض کرو کہ کسی مساوات مین اس ترتیب سی علامتین نمودار رہین

+ - + - - - - + + + - + یا - - + - + - - + + + +

اب اگر پیدا کیا چاہین ایک اور قیمت مساوات مفروض مین تو ظاہر کہ ضرب کرنا چاہیئے ہمین مساوات مفروض کو لا - ط مین اور اب ظاہر ہے کہ حاصل ضرب مین اس صورت سے علامتین نمودار ہونگے

− + + + − − − + − +

+ − − − + + + − + −　　　اور دوسری صورت مین

+ − ± ± + ∓ ∓ − + − +　　　اسطرح نمودار ہونگی

+ + + − + − − − +

− − − + − + + + −

− ± ± + − + ± ± − +

اور اسجای علامت مشکوک ± سے یہہ بات تعبیر ہوتی ہی کہ علامت یا تو + یا − ہوگی اور یہان سے ظاہر ہوا کہ علامتین متواتر تبدیل ہوگئی ہین لیکن یہہ بات ظاہر ہی کہ عمل ضرب مذکورہ بالا سے تعداد متواترات یعنے علامتون کی نہین زیادہ ہوئی گو کہ دو یے مشکوک ہوگئی ہین اور یہہ اختیار ہی کہ خواہ کیسی علامت واسطے مشکوک علامتون کے فرض کرو لیکن یہہ ظاہر ہی کہ ایک علامت زیادہ ہوئے اور اسیواسطے تعداد تبدیلیون کے بقدر ایک کے زیادہ ہوئے اور یہان سے یہہ معلوم ہوا کہ جبکہ ایک نئی قیمت کسی مساوات مین پیدا ہوتی ہی اوسوقت تعداد تبدیلیون علامتون کی بقدر ایک کے زیادہ ہوتی ہی اور اسیواسطے یہہ ثابت ہوا کہ تعداد قیمتون مثبت کی نہین زیادہ ہوسکتی ہی تعداد تبدیلیون مذکور سے جسوقت علامتون ایک جز کو کہ چھوڑ کر کسی مساوات کی اجزا ایسے تبدیل کئے جاتے ہین اوسوقت موافق شکل (۵) کے علامتین تمام قیمتون اوس مساوات کی تبدیل ہوجاتی ہین اور یہان سے یہہ معلوم ہوا کہ متواتر علامتین کہ مساوات مفروض مین ہونگی تبدیل ہوجائنگی تبدیلیون علامات کی سے مساوات مبدلہ مین اور تبدیلین مساوات مفروض کی تبدیل ہوجائنگی علامتون متواتر سے مساوات مبدلہ مین اور چونکہ مساوات مبدلہ مین تعداد مثبت قیمتون کی نہین زیادہ ہوسکتی ہی تعداد تبدیلیون علامتون کے سے تو معلوم ہوا کہ تعداد قیمتون منفیہ کی مساوات مفروض مین نہین زیادہ ہوسکتی ہی تعداد متواترات یعنے علامتونکی سے

مثالین

١　مساوات $\text{لا}^{6} + 3\,\text{لا}^{5} - 41\,\text{لا}^{4} - 87\,\text{لا}^{3} + 400\,\text{لا}^{2} + 444\,\text{لا} - 72 = 0$ مین چھہ اصلی یعنے ممکن قیمتین ہین بتاو کتنی اونمین سے مثبت ہونگی

٢　مساوات $\text{لا}^{4} - 3\,\text{لا}^{3} - 15\,\text{لا}^{2} + 49\,\text{لا} - 12 = 0$ مین چار اصل قیمتین ہین بتاو کتنی اونمین سے منفی ہونگی

فصل سویم بیچ بیان تبدیل کرنی مساواتونکے

شکل ۱ چاہتے ہین ہم تبدیل کرنا ایک مساوات مفروض کو ایک اور ایسی مساوات سی کہ اسکی پچھلی مساوات کے قیمتین مساوات مفروض کی سیتے علیحدہ علیحدہ بقدر ایک خاص مقدار کی زیادہ یا کم ہون مثلاً فرض کرو کہ مساوات آیندہ مساوات مفروض ہی

ط لا^ن + ا₁ لا^(ن-۱) + ا₂ لا^(ن-۲) + ... ا ن-۱ لا + ا ن = ۰

اور چاہتے ہین ہم تبدیل کرنا اس مساوات کو ایک اور ایسی مساوات سی کہ اسکی قیمتین قیمتون مساوات مفروض کی سیتے بقدر مقدار د کے کم ہون یہہ تبدیلی عمل مین اسکتی ہی اگر لکھین ہم مساوات مفروض مین ی + د واسطے لا کے اور جو کچھہ حاصل ہوگا وہ مساوات مطلوبہ ہوگی لیکن یہہ عمل بہت طول طویل ہوتا ہی اور اسیواسطے ہم کوئی اور سہل طریقہ کی طرف رجوع کرینگی ظاہر ہی کہ اگر مساوات مفروض مین لکھین ہم ی + د واسطے لا کے تو حاصل ہوگی ایک اسی درجہ کی مساوات اور شکل بہی اس مساوات کے وہی ہوگی جو مساوات مفروض ہے پس فرض کرو کہ مساوات مذکور یہہ ہی

ط ی^ن + ب₁ ی^(ن-۱) + ب₂ ی^(ن-۲) + ... ب ن-۱ ی + ب ن = ۰ (۱) لیکن چونکہ

ی = لا - د تو مساوات (۱) اس شکل کی ہوجائیگی

ط (لا - د)^ن + ب₁ (لا - د)^(ن-۱) + ... ب ن-۱ (لا - د) + ب ن = ۰ ...... (۲)

اور اسیطرح یہہ بات ظاہر ہی کہ اگر دریافت کرین ہم صورت مفصلہ ہر جز اس مساوات کی تو جو مساوات حاصل ہوگے وہ مساوات اور مساوات مفروض ایک سی ہونگی اسواسطے کہ مساوات مفروض مین بجائے لا کی ی + د لکھا گیا ہی اور جو مساوات اس طرح لکھنی سیتے حاصل ہوئی ہی اوسمین تبدیل کیا ہی ی کو لا - د سی اور اسیواسطے ظاہر ہی کہ مراجعت کی ہمنے طرف مساوات مفروض کے پس اب حاصل ہوگی یہہ مساوات

ط (لا - د)^ن + ب₁ (لا - د)^(ن-۱) + ... ب ن-۱ (لا - د) + ب ن =

ط لا^ن + ا₁ لا^(ن-۱) + ا₂ لا^(ن-۲) + ... ا ن-۱ لا + ا ن

اب اگر قسمت کرین اول طرف اس مساوات کو لا - د پر تو ظاہر ہی کہ باقی رہیگا ب ن اور خارج قسمت ہوگا یہہ

ط (لا - د)^(ن-۱) + ب₁ (لا - د)^(ن-۲) + ب ن-۲ (لا - د) + ب ن-۱

اور چونکہ دوسری طرف مساوات گذشتہ کی بعینہ وہی ہی جو اول طرف ہی تو ضرور ہی کہ اگر اوسکو لا - د پر قسمت کرین تو بہی یہی خارج قسمت اور باقیات پیدا ہونگی اور یہان سیتے یہہ بات معلوم ہوئی کہ اگر اول طرف مساوات مفروض کو لا - د پر قسمت کرین تو باقی رہیگا اخیر جز مساوات مطلوبہ کا اب اگر قسمت کرین خارج قسمت

ط (لا - د)^ن - ۱ + ب (لا - د)^ن - ۲ + ب ن - ۲ (لا - د) + ب ن - ۱ کو لا - د پر تو ظاہر ہی کہ باقی ب ن - ۱ رہیگا اور یہہ ہی سر اخیر جز سی پہلے جز کا اور یہان سے یہہ معلوم ہوا کہ اگر قسمت کرین اصلی مساوات کی اول طرف کو اور بعدازان اسیطرح سی ہر خارج قسمت کو تو معلوم ہو جائینگی ہمین سر تمام اجزای مساوات مطلوبہ کی پس واسطی دریافت کرنیے مساوات مطلوبہ کی یہہ قاعدہ نکلتا ہی

قاعدہ

فرض کرو کہ اول طرف مساوات مفروض کی کوئی جملہ لا کا ہی اور د ہی وہ مقدار جسقدر قیمتون اس مساوات کو کم یا زیادہ کرنا ہی پس اب تقسیم کرو اول طرف مذکور کو لا - د یا لا + د پر جیسکہ مطلوب ہو یعنے اگر قیمتون مساوات کا کم کرنا ہی تو لا - د پر قسمت کرو اور اگر زیادہ کرنا ہی تو لا + د قسمت کرو اور بعدازان جو کچہ حاصل ہوا اوسی ہی لا - د یا لا + د پر قسمت کرو اور یہی عمل تقسیم کا جاری رکہو جب تک تقسیم انتہا پاوے پس اب سر سب سے بڑی قوت مقدار مجہول مساوات مطلوبہ کا ہوگا سر اسی قوت مقدار مجہول مساوات مفروض کا اور اون مقدارون مین سے جو عملون تقسیم کی سے باقی بچے ہین اول ہوگی سر اخیر جز مساوات مطلوب کا اور دوسری ہوگی سر اخیر سی پہلی جز مساوات مطلوبہ کا اور علی ہذا القیاس اور اس طرح سے مساوات معلوم ہو سکتی ہی یہہ بہی واضح ہو کہ اگر کوئی جز مساوات مین نہین ہو اسکی جگہ ایک صفر لکہنا چاہیئے

مثالین

(۱) چاہتے ہین تبدیل کرنا مساوات ۵ لا^۴ - ۱۲ لا^۳ + ۳ لا^۲ + ۴ لا - ۵ = ۰ کو جسکی قیمتین کم ہون قیمتون مساوات مفروض کی سے بقدر ۲ کی

لا - ۲) ۵ لا^۴ - ۱۲ لا^۳ + ۳ لا^۲ + ۴ لا - ۵ (۵ لا^۳ - ۲ لا^۲ - لا + ۲

۵ لا^۴ - ۱۰ لا^۳

- ۲ لا^۳ + ۳ لا^۲

- ۲ لا^۳ + ۴ لا^۲

- لا^۲ + ۴ لا

- لا^۲ + ۲ لا

+ ۲ لا - ۵

+ ۲ لا - ۴

- ۱ = باقی اول

$(\text{لا} - ٢)\ \ ٥\,\text{لا}^٣ - ٢\,\text{لا}^٢ - \text{لا} + ٢\ \ (\ ٥\,\text{لا}^٢ + ٨\,\text{لا} + ١٥$

$٥\,\text{لا}^٣ - ١٠\,\text{لا}^٢$

$+ ٨\,\text{لا}^٢ - \text{لا}$

$+ ٨\,\text{لا}^٢ - ١٦\,\text{لا}$

$+ ١٥\,\text{لا} + ٢$

$١٥\,\text{لا} - ٣٠$

$+ ٣٢ =$ باقی دویم کی

$(\text{لا} - ٢)\ \ ٥\,\text{لا}^٢ + ٨\,\text{لا} + ١٥\ \ (\ ٥\,\text{لا} + ١٨$

$٥\,\text{لا}^٢ - ١٠\,\text{لا}$

$+ ١٨\,\text{لا} + ١٥$

$١٨\,\text{لا} - ٣٦$

$+ ٥١ =$ باقی سویم

$(\text{لا} - ٢)\ \ ٥\,\text{لا} + ١٨\ \ (\ ٥$

$٥\,\text{لا} - ١٠$

$٢٨ =$ چہارم

یہان سے معلوم ہوا کہ مساوات مطلوبہ یہہ ہی $٥\,ى^٤ + ٢٨\,ى^٣ + ٥١\,ى^٢ + ٣٢\,ى - ١ = ٠$
ظاہر ہی کہ عمل گذشتہ بہت طویل ہی لیکن یہہ مختصر ہو سکتا ہی اگر رجوع کرین ہم طرف قاعدہ قیاسی تقسیم مہندس ہورنر کی پس اگر حل کرین مثال گذشتہ کو اس قاعدہ سے تو صورت عمل کی یہہ ہی

$٢)\ ٥ - ١٢ + ٣ + ٤ - ٥$

$١٠ - ٤ - ٢ + ٤$

$\overline{٥ - ٢ - ١ + ٢ - ١} \ \therefore\ ب_١ = -١$

$\dfrac{١٠ \quad + ١٦ \quad + ٣٠}{٥ + ٨ + ١٥ + ٣٢} \ \therefore\ ب_٢ = ٣٢$

$\dfrac{١٠ \quad ٣٦}{٥ + ١٨ + ٥١} \ \therefore\ ب_٣ = ٥١$

$\dfrac{١٠}{٥ + ٢٨} \ \therefore\ ب_٤ = ٢٨$

پس معلوم ہوا کہ مساوات مطلوبہ یہہ ہی $٥\,ى^٤ + ٢٨\,ى^٣ + ٥١\,ى^٢ + ٣٢\,ى - ١ = ٠$

٣ چاہتے ہین ہم تبدیل کرنا مساوات $٥\,ى^٤ + ٢٨\,ى^٣ + ٥١\,ى^٢ + ٣٢\,ى - ١ = ٠$ کو
ایک ایسی مساوات سی کہ اوسکی قیمتین تیون مساوات مفروض کی سے علیحدہ علیحدہ بقدر ٣ کے زیادہ ہون
اس صورت مین ظاہر ہی کہ اگر عمل کرین ہم بوسیلہ قاعدہ تقسیم ہورنر صاحب کے تو صورت عمل کی یہہ ہوگی

١ − ٣٢ + ٥١ + ٢٨ + ٥ (٢ −

٤ − ٣٠ − ٣٦ − ١٠ −

٥ − ٢ + ١٥ + ١٨ +

٢ + ١٦ − ١٠ −

٤ + ١ − ٨ +

٤ + ١٠ −

٣ + ٢ −

١٠ −

١٢ −

پس معلوم ہوا کہ مطلوبہ یہہ ہی ٥ لا٤ − ١٢ لا٣ + ٣ لا٢ + ٤ لا − ٥ = ٠

٣ چاہتے ہین ہم تبدیل کرنا مساوات ع٣ − ٢ ع٢ + ٣ ع − ٤ = ٠ کو ایک ایسی مساوات سے جسکی قیمتین بہ نسبت قیمتون مساوات مفروض کے بقدر ١٫٧ کے کم ہون

٤ − ٣ + ٢ − ١ (١

٢ + ١ − ١

٢ − ٢ + ١ −

٠ ١ +

٢ + ٠

١

١

پس معلوم ہوا کہ وہ مساوات جسکی قیمتین بہ نسبت قیمتون مساوات مفروض کے بقدر ا کے کم ہین یہہ ہی لا٣ + لا٢ + ٢ لا − ٢ = ٠ اور اگر یہی عمل کرین اس مساوات پر واسطے کمی ٧ ٫ کے تو صورت عمل کی یہہ ہوگی

٢ − ٢ + ١ + ١ (٧ ٫

٢٫٢٣٣ ١٫١٩ ٫٧ +

٫٢٣٣ ٣٫١٩ ١٫٧

١٫٦٨ ٫٧

٤٫٨٧ ٢٫٤

٫٧

٣٫١

*

یہان سے معلوم ہوا کہ مساوات مطلوبہ یہہ ہی ی٣ + ٣٫١ ی٢ + ٤٫٨٧ ی + ٫٢٣٣ = ٠ مثال گذشتہ مین ہمنے دو دفع عمل تقسیم کا کیا لیکن واضح ہو کہ عمل مذکور ایک ہی دفعہ ہو سکتا ہی جیسا کہ واضح ہوگا ان دو طرح کی صورتون عملون کی سے

---

* اسجا سے ٫ دو قسم کی ہین ایک تو نشان کسور اعشاریہ کا اور دوسرا علامت مقدار جبریہ کا

٧،١) ١ − ٢ + ٣ − ٤　　　　٧،١) ١ − ٢ + ٣ − ٤

٤٬٢٣٣ / ٬٢٣٣	٬٥١ − / ٢٬٤٩ +	١ ٬ ٧ / ٬٣ −	
	٢٬٣٨ / ٤٬٨٧	١٬٧ / ١٬٤	
		١٬٧ / ٣٬١	

+ / − ٢	١ − / ٢ +	١ + / ١
٢٬٢٣٣ / ٬٢٣٣	٠ / ٢	١ + / ٠
	١٬١٩ / ٣٬١٩	١ + / ١٠
		٬٧
	١٬٦٨ / ٤٬٨٧٬٤	١٬٧ / ٢٬٤
		٬٧ / ١٬٣

یہہ بات ظاہر ہی کہ ان دو صورتوں میں سے اول صورت میں ہمنے دونوں عملوں کو ایک جا لکھا ہی اور دوسری صورت میں ہمنے آ اور ٧ آ کو جدا کر کے عمل نہیں کیا ہی بلکہ ایک ہی بار انکو اکٹھا رکھہ کر عمل جاری کیا ہے

٤ چاہتے ہیں ہم تبدیل کرنا مساوات لا^{٢} − ٧ لا + ٧ = ٠ کو ایک ایسی مساوات سے جسکی قیمتیں بہ نسبت اس مساوات کے بقدر ایک کے کم ہوں

٥ چاہتے ہیں دریافت کرنے ایک ایسی مساوات جسکی قیمتیں کم ہوں بقدر ٣ کے قیمتوں اس مساوات لا^{٤} − ٣ لا^{٣} − ١٥ لا^{٢} + ٤٩ لا − ١٢ = ٠ ہے

اور تبدیل کرو اس مساوات کو جو حاصل ہو ایک اور ایسی مساوات سے جسکی قیمتیں اس مساوات کی سی بقدر ٣ کے زیادہ ہوں

٦ بتاؤ وہ کونسی مساوات ہی جسکی قیمتیں کم ہیں بقدر ١٠ کے بہ نسبت قیمتوں اس مساوات کی

لا^{٤} + ٢ لا^{٣} + ٣ لا^{٢} + ٤ لا − ١٢٣٤٠ = ٠

٧ بتاؤ وہ کونسی مساوات ہی جسکی قیمتیں کم ہیں بقدر ٣ کے قیمتوں اس مساوات کی سے

لا^{٥} + ٢ لا^{٣} − ٦ لا^{٢} − ١٠ لا + ٨ = ٠

٨ بتاؤ وہ کونسی مساوات ہی جسکی قیمتیں کم ہیں بقدر $\frac{١}{٢}$ کی بہ نسبت قیمتوں اس مساوات کی

٢ لا^{٤} − ٦ لا^{٣} + ٤ لا^{٢} − ٢ لا + ١ = ٠

اجوبہ

٤ ی^{٣} + ٣ ی^{٢} − ٤ ی + ١ = ٠ اور اسکا ہے .... لا = ی + ١

۵ ی^{4} + ۹ ی^{3} + ۱۲ ی^{2} − ۱۴ ی = ۰ ایضاً .... لا = ی + ۳

اور ع^{4} − ۷ ع^{3} + ۶۶ ع − ۷۲ = ۰ ایضاً .... لا = ع − ۱

۶ ی^{4} + ۲۴ ی^{3} + ۳۶۶ ی^{2} + ۴۶۶۴ ی = ۰ اور اسیجا .... لا = ی + ۱

۷ ی^{5} + ۱۰ ی^{4} + ۴۲ ی^{3} + ۸۶ ی^{2} + ۷۰ ی + ۱۲ = ۰ ایضاً لا = ی + ۲

۸ ۲ ی^{4} − ۲ ی^{3} − ۲ ی^{2} − $\frac{۳}{۲}$ ی + $\frac{۳}{۸}$ = ۰ ایضاً لا = ی + $\frac{۱}{۲}$

شکل ۲

چاہتے ہین ہم تبدیل کرنا ایک مساوات مفروض کو ایک ایسی مساوات سے کہ اسمین دوسرا جز زائل ہوتا ہی فرض کرو کہ مساوات مفروض یہہ ہی

$$لا^{ن} + ا_{1}\, لا^{ن-1} + ا_{2}\, لا^{ن-2} + \ldots\ldots + ا_{ن-1}\, لا + ا_{ن} = ۰$$

شکل ۴ فصل گذشتہ سی یہہ بات ظاہر ہی کہ حاصل جمع تمام قیمتون اس مساوات کا − ا$_{1}$ ہی اور یہان سے یہہ معلوم ہوا کہ تاکہ دوسرا جز اس مساوات کا زائل ہوجاوے لازم ہی کہ حاصل جمع تمام قیمتون پر مقدار ا$_{1}$ کو زیادہ کرین لیکن تعداد قیمتون کے ن ہی اور اسیواسطے لازم ہی کہ زیادہ کرین ہم ہر قیمت پر مقدار $\frac{ا_1}{ن}$ تاکہ دوسرا جز مساوات مفروض کا زائل ہوجاوے اگر علامت دوسرے جز کی منفی ہو تو ظاہر ہی کہ حاصل جمع تمام قیمتون کا + ا$_{1}$ ہوگا اور اس صورت مین ظاہر ہی کہ کم کرنا چاہیے ہمین ہر قیمت کو بقدر $\frac{ا_1}{ن}$ کے تاکہ دوسرا جز زائل ہوجاوے پس یہان سے یہہ قاعدہ نکلتا ہی

قاعدہ

قسمت کرو دوسری جز مساوات کو سب سے بڑے نشان قوت مقدار مجہول پر اور بعد ازان اگر علامت دوسرے جز کی منفی ہو تو ہر قیمت مساوات کو بقدر خارج قسمت مذکور کے کم کرو اور اگر علامت جز مذکور کی مثبت ہو تو قیمت مذکور کو زیادہ کرنا چاہیے بقدر اوسی خارج قسمت کے

مثالین

۱ چاہتے ہم تبدیل کرنا مساوات لا^{3} − ۶ لا^{2} + ۸ لا − ۲ = ۰ ایک اور ایسی مساوات سی جسمین دوسرا جز زائل ہوجاوے اسیجا سے ظاہر ہی کہ ا$_{1}$ = − ۶ اور ن = ۳ پس معلوم ہوا کہ کم کرنی چاہیے ہمین قیمت اس مساوات کی بقدر $\frac{۶}{۳}$ کے تاکہ دوسرا جز اسکا زائل ہوجائے

$$\begin{array}{r|rrrr} ٢) & ١ & -٦ & +٨ & -٢ \\ & & +٢ & -٨ & +٠ \\ \hline & ١ & -٤ & +٠ & -٢ \\ & & +٢ & -٤ & \\ \hline & ١ & -٢ & -٤ & \\ & & +٢ & & \\ \hline & ١ & ٠ & & \end{array}$$

پس معلوم ہوا کہ مساوات مطلوبہ یہہ ہی $ی^٣ - ٤ی - ٢ = ٠$ اور اسجای $لا = ی + ٢$

٢ تبدیل کرو مساوات $لا^٤ - ١٦لا^٣ - ٦لا + ١٥ = ٠$ کو ایک ایسی مساوات سے جسمین دوسرا جزو زائل ہوجائے

٣ تبدیل کرو مساوات $لا^٥ + ١٥لا^٤ + ١٢لا^٣ - ٢٠لا^٢ + ١٤لا - ٢٥ = ٠$ کو ایک ایسی مساوات سے جسمین دوسرا جز زائل ہوجاے

٤ تبدیل کرو مساوات $لا^٢ + ط لا + ص = ٠$ کو ایک ایسی مساوات سے جسمین دوسرا جز زائل ہوجاے

٥ تبدیل کرو مساوات $لا^٣ + ط لا^٢ + ص لا + س = ٠$ کو ایک ایسی مساوات سے جسمین دوسرا جز نرہے

اجوبہ

٢ $ی^٤ - ٩٦ی^٢ - ١٨٥ی - ٧٧٧ = ٠$ (٤) $ع^٢ - (\frac{ط^٢}{٤} + ص) = ٠$

٣ $ی^٥ - ٧٨ی^٣ + ١٢٤ی^٢ - ٧٥٧ی + ٤٠١ = ٠$

(٥) $ع^٣ - (\frac{ط^٢}{٣} - ص) ع + \frac{٢ط^٣}{٢٧} - \frac{ط ص}{٣} - س = ٠$

شکل ٣

چاہتے ہین ہم تبدیل کرنا ایک مساوات مفروض کو ایک ایسی مساوات سے کہ قیمتین اس مساوات کی منکافی ہون واسطے قیمتون مساوات مفروض سے کے فرض کرو کہ مساوات مفروض یہہ ہی

$$ط لا^ن + ا_١ لا^{ن-١} + ا_٢ لا^{ن-٢} + \cdots + ا_{ن-١} لا + ا_ن = ٠$$

اب فرض کرو کہ $ی = \frac{١}{لا}$ اور اس سے حاصل ہوتا ہی یہہ $لا = \frac{١}{ی}$ پس جسوقت لکھین ہم بجاے لا کے $\frac{١}{ی}$ مساوات گذشتہ مین اور بعد ازان ضرب کرین اس مساوات کو $ی^ن$ مین تو ظاہر ہی کہ اس عمل سے پیدا ہوگی ایک نئی مساوات جسکی اجزا کی سرونکی ترتیب بدل جائگی یعنے مساوات نئی یہہ ہوگی

$$ا_ن ی^ن + ا_{ن-١} ی^{ن-١} + ا_{ن-٢} ی^{ن-٢} + \cdots + ا_٢ ی^٢ + ا_١ ی + ط = ٠$$

حکم ۱ یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ کوئی مساوات مفروض تبدیل ہو سکتی ہی ایک مساوات سے
کہ اسکی قیمتین زیادہ یا کم ہون بہ نسبت متکافیون قیمتون مساوات مفروض کے کیونکہ اس صورت مین فقط
یہہ بات محفوظ رہنی چاہیے کہ معکوس کر کے ترتیب سرون اجزای مساوات مفروض کے جاری کرین ہم
عمل موافق شکل (۱) فصل ہذا کی

حکم ۲ اگر سر اجزای مساوات مفروض کے ایک سے رہین خواہ اونہین کیسے ترتیب سی لکھین تو ظاہر ہی کہ
مساوات مفروض اور مساوات نئی ایک سی ہوگی اور قیمتین ان مساواتون کی اس شکل کی ہوگی

$ق_۱$ و $\frac{1}{ق_۱}$ اور $ق_۲$ و $\frac{1}{ق_۲}$ اور $ق_۳$ و $\frac{1}{ق_۳}$ اور علی ہذا القیاس

حکم ۳ اگر سر اجزای مساوات طاق درجہ کی ایک سی رہین خواہ اونہین کسی ترتیب سے لین
یعنے سر مذکور سب وہی ہون لیکن اونکی مختلف علامتین ہون تو بہی قیمتین مساوات مفروض اور مساوات نئی کی
ایک سی ہوگی کسواسطی کہ اگر بدل لین ہم علامتین تمام اجزای نئی مساوات کی تو ظاہر ہی کہ اس صورت مین قیمتون
مین تو فرق نہین آئیگا لیکن دونو مساواتین ایکسی ہو جائینگی یہی حال ہوگا جبکہ مساوات مفروض جفت درجہ کی
ہوگی بشرطیکہ جزو اوسط اس مساوات کا ہو تا کہ مساوات نئی کہ تمام اوسکی علامتین تبدیل کیجائینگی اور مساوات
مفروض ایک سی ہو سکین پس ان مساواتون کو جنکی اجزا وے کے سر ایک سے رہتے ہین خواہ اونہین کیسے
ترتیب سی لو مساوات متواتر کہتے ہین اور بلحاظ اونکی قیمتون کے اونہین مساواتون کو مساواتین متکافی بہی کہتی ہین

حکم ۴ اگر علامت کسی اخیر جز کی جیسے مساوات متکافی کی طاق مرتبہ کی + ہو تو ایک اس مساوات کی قیمتون سے
-۱ ہوگی اور اگر اخیر جز مذکور پر علامت نفی یعنے $-$ ہوگی تو ایک قیمت $+۱$ ہوگی دلیل اسکی یہہ ہی
کہ مساوات مفروض اور اوسکی مساوات متکافی کی ایک قیمت ایکسی ہوگی اور یہہ ظاہر ہی
کہ عدد آ کا ہی ایسی مقدار ہی کہ وہ اور اوسکا متکافی ایک سے ہوتے ہین اب چونکہ مساوات متکافی کے قیمتین
سوای مساوات مفروض کے قیمتون کے متکافیون کے اس مساوات کی قیمتین بہی ہوتی ہین تو معلوم ہوا
کہ اخیر جز مساوات متکافی کا ہوگا حاصل ضرب قیمتون مساوات مفروض اور انکی متکافیون کا جسوقت کہ
تبدیل کی جائین ان سب کی علامتین اور چونکہ علامت ہر قیمت اور اوسکی متکافی کی ایک سی ہوتی ہی تو معلوم
ہوا کہ حاصل ضرب کسی قیمت اور اوسکی متکافی کا مثبت ہوگا پس اب ضرور ہی کہ علامت اخیر جز مذکور اور
قیمت مشترک آ کی مختلف ہوگی یہان سے یہہ معلوم ہوا کہ اگر کوئی مساوات متکافی طاق درجہ کی ہو اور قسمت
کرین اوسی $لا + ۱$ پر اوس صورت مین جبکہ علامت اسکی اخیر جز کی مثبت ہو اور $لا - ۱$ پر اوس صورت مین

جبکہ علامت جز مذکور نفی ہو تو مساوات مذکور ایک درجہ کم کی مساوات ہو جاویگی

حکم ۵ ایک مساوات متکافی جفت درجہ کی ہمیشہ تحویل ہو سکتی ہی طرف ایک مساوات کی جسکا مرتبہ نصف ہو اصلی مساوات سی مثلاً فرض کہ ہی یہہ مساوات $لا^{ن} + ا_١ لا^{ن-١} + ا_٢ لا^{ن-٢} + \dots + ا_٢ لا^٢ + ا_١ لا + ١ = ٠$

اب تقسیم کرو اس مساوات کو $لا^{\frac{ن}{٢}}$ پر اور ثبت کرو اخیر اور اول جز کو اور دوسرے اور اخیر سے پہلی جز کو اور اسیطرح سے اور اجزا کو جنکی مقام متشابہ ہوں متصل ایک دوسرے کی تو ظاہر ہی کہ حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$لا^{\frac{ن}{٢}} + \frac{١}{لا^{\frac{ن}{٢}}} + ا_١ \left(لا^{\frac{ن}{٢}-١} + \frac{١}{لا^{\frac{ن}{٢}-١}} \right) + \dots + ا_{\frac{ن}{٢}-١} \left(لا + \frac{١}{لا} \right) + ا_{\frac{ن}{٢}} = ٠$$

اب فرض کرو کہ $لا + \frac{١}{لا} = ی$ یا $ی = لا + \frac{١}{لا}$ پس اب حاصل ہوگی یے مساواتین

$$لا + \frac{١}{لا} = ی \qquad \therefore \quad لا + \frac{١}{لا} = ی$$

$$\left(لا + \frac{١}{لا} \right)^٢ = لا^٢ + \frac{١}{لا^٢} + ٢ \qquad \therefore \quad لا^٢ + \frac{١}{لا^٢} = ی^٢ - ٢$$

$$\left(لا + \frac{١}{لا} \right)^٣ = لا^٣ + \frac{١}{لا^٣} + ٣ \left(لا + \frac{١}{لا} \right) \qquad \therefore \quad لا^٣ + \frac{١}{لا^٣} = ی^٣ - ٣ی$$

$$\left(لا + \frac{١}{لا} \right)^٤ = لا^٤ + \frac{١}{لا^٤} + ٤ \left(لا^٢ + \frac{١}{لا^٢} \right) + ٦ \qquad \therefore \quad لا^٤ + \frac{١}{لا^٤} = ی^٤ - ٤(ی^٢ - ٢) - ٦$$
$$= ی^٤ - ٤ی^٢ + ٢$$

وغیرہ وغیرہ وغیرہ ∴ وغیرہ وغیرہ

اب جس وقت لکھیں ہم یے قیمتیں $لا + \frac{١}{لا}$ اور $لا^٢ + \frac{١}{لا^٢}$ وغیرہ کی مساوات گذشتہ میں تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $ی^{\frac{ن}{٢}} + ب_١ ی^{\frac{ن}{٢}-١} + ب_٢ ی^{\frac{ن}{٢}-٢} + \dots + ب_{\frac{ن}{٢}} = ٠$

پس اب ظاہر ہی کہ مساوات مفروض تحویل ہو گئی طرف ایک ایسی مساوات کی جسکا مرتبہ نصف ہی اوسکی مرتبہ سے

مثالین

١ چاہتے ہیں تبدیل کرنا مساوات $لا^٣ - ٧ لا + ٧ = ٠$ کو ایک ایسی مساوات سے جسکی قیمتیں بہ نسبت متکافیوں قیمتوں مساوات مفروض سے بقدر ایک سے کم ہوں

$$
\begin{array}{l}
١)\ ٧ - ٧ + ٠ + ١ \\
\quad\ ٧ \quad ٠ \quad ٠ \\
\hline
\quad\ ٧ \quad ٧ \\
\hline
\quad\ ٧ \\
\quad\ ١٤
\end{array}
$$

∴ ۷ عٞ + ۱۴ عٞ + ۷ ع + ۱ = ۰ مساوات مطلوبہ ہی اور اسمین

ع + ۱ = $\frac{۱}{لا}$ یا لا = $\frac{۱}{ع+۱}$

۲ دریافت کیا چاہتے ہین ہم قیمتین اس مساوات متکافی کی

لاْ − ۶ لاٗ + ۵ لاٖ + ۵ لاٗ − ۶ لا + ۱ = ۰

حکم (۴) سے واضح ہی کہ اس مساوات کی ایک یہہ قیمت ہی لا = −۱ اب اگر قسمت کرین اس مساوات کو لا + ۱ پر تو حاصل ہوگی یہہ مساوات لاٗ − ۷ لاٖ + ۱۲ لاٗ − ۷ لا + ۱ = ۰ اب اگر قسمت کرین اس پہلی مساوات کو لاٗ پر اور مرتب کرین اجزا کو اوسیطرح سے جسطرح کہ حکم (۵) مین کیا ہی تو حاصل ہوگی یہہ مساوات لاٗ + $\frac{۱}{لاٗ}$ − ۷ (لا + $\frac{۱}{لا}$) + ۱۲ = ۰

اب فرض کرو کہ لا + $\frac{۱}{لا}$ = ع تو ظاہر ہی کہ لاٗ + $\frac{۱}{لاٗ}$ = عٞ − ۲ پس اب اگر لکھین ہے قیمتین تو

عٞ − ۲ − ۷ ع + ۱۲ = ۰ یا عٞ − ۷ ع + ۱۰ = ۰

اور جسوقت حل کرینگے ہم اس مساوات درجہ دوم کو تو حاصل ہوگا یہہ

$$ع = \frac{۷}{۲} \pm \sqrt{\frac{۴۹}{۴} - ۱۰}$$

$$= \frac{۷ \pm ۳}{۲} = ۵ \text{ یا } = ۲$$

یہان سے حاصل ہوتی ہین یہ دو مساواتین درجہ دویم کی لا + $\frac{۱}{لا}$ = ۵ اور لا + $\frac{۱}{لا}$ = ۲ اور انکے حل کرنے سے حاصل ہوتی ہین یہ قیمتین لا کی

لا = $\frac{۱}{۲}$ (۵ ± $\sqrt{۲۱}$) اور لا = ± ۱ یا + ۱ پس معلوم ہوا کہ پانچ قیمتین مساوات مفروض کی یہ ہین −۱ اور +۱ اور +۱ اور $\frac{۵+\sqrt{۲۱}}{۲}$ اور $\frac{۵-\sqrt{۲۱}}{۲}$ اور اسلیے

$$\frac{۵-\sqrt{۲۱}}{۲} = \frac{(۵-\sqrt{۲۱})\cdot(۵+\sqrt{۲۱})}{۲\,(۵+\sqrt{۲۱})} = \frac{۲۵ - ۲۱}{۲\,(۵+\sqrt{۲۱})}$$

$$= \frac{۲}{۵+\sqrt{۲۱}}$$ اور یہہ متکافی ہی قیمت $\frac{۵+\sqrt{۲۱}}{۲}$ کا

۳ چاہتے ہین ہم دریافت کرنی ایک ایسی مساوات جسکی قیمتین متکافی ہوں اسیلے قیمتوں اس مساوات کے

لاٗ − ۳ لاْ − ۲ لاٗ + ۳ لاٖ + ۱۲ لاٗ + ۱۰ لا − ۸ = ۰

۴ چاہتے ہین دریافت کرنی قیمتین اس مساوات متکافی سے کے

$$٥ ی^{٥} - ٤ ی^{٤} + ٣ ی^{٣} - ٣ ی^{٢} + ٤ ی - ٥ = ٠$$

٥ دریافت کیا جاہتے ہین ہم قیمتین ممکانی مساوات آئندہ کی $لا^{٥} + لا^{٤} + لا^{٣} + لا^{٢} + لا + ١ = ٠$

اجوبہ

٣ $٨ لا^{٦} - ١٠ لا^{٥} - ١٢ لا^{٤} - ٣ لا^{٣} + ٢ لا^{٢} + ٣ لا - ١ = ٠$

٤ $\frac{١ + \sqrt{-٣}}{٢}$ اور $\frac{١ - \sqrt{-٣}}{٢}$ اور $\frac{-٣ + ٤\sqrt{-١}}{٥}$ اور $\frac{-٣ - ٤\sqrt{-١}}{٥}$

٥ -١ اور $\sqrt{\frac{-١ + \sqrt{-٣}}{٢}}$ ، $\sqrt{\frac{-١ - \sqrt{-٣}}{٢}}$ ، $-\sqrt{\frac{-١ + \sqrt{-٣}}{٢}}$

اور $-\sqrt{\frac{-١ - \sqrt{-٣}}{٢}}$

شکل ٤

چاہتے ہین ہم تبدیل کرنا کسی مساوات مفروض کو ایک اور ایسی مساوات سی جسکی قیمتین علیحدہ علیحدہ کوئی ضعف یا کوئی جز مقررہ قیمتون مساوات مفروضہ کی ہون فرض کرو کہ ہی یہہ مساوات

$$لا^{ن} + ا_{١} لا^{ن-١} + ا_{٢} لا^{ن-٢} + \cdots\cdots ا_{ن-١} لا + ا_{ن} = ٠$$

پس اب اگر فرض کرین کہ $ی = م لا$ تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $لا = \frac{ی}{م}$ اور جسوقت کہین ہم یہہ قیمت لا کی بجاے اوسکی مساوات مفروض مین اور ضرب کرین ہر جز اوسکی کو $م^{ن}$ مین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$ی^{ن} + م ا_{١} ی^{ن-١} + م^{٢} ا_{٢} ی^{ن-٢} + \cdots\cdots م^{ن-١} ا_{ن-١} ی + م^{ن} ا_{ن} = ٠$$

اور یہہ ایک ایسی مساوات ہی کہ اسکی قیمتین علیحدہ علیحدہ م گنی قیمتون مساوات مفروض کے ہین پس یہان سے واسطی عمل مین لانے تبدیلی کی کہ اس شکل مین مطلوب ہی ضرب کرو دوسرے جز مساوات مفروض کو م مین اور تیسری جز کو $م^{٢}$ مین اور چوتھے کو $م^{٣}$ مین اور علی ہذا القیاس

حکم ١ مرقومہ بالا سے ظاہر ہی کہ اگر اول جز مساوات مفروض کا سر م ہو تو اس صورت مین یہہ قاعدہ برتنا چاہیئے دور کرو سر اول جز کو اور دوسرے جز مین کچہہ تبدیل نکرو اور تیسرے جز کو م مین ضرب کرو اور چوتھے کو $م^{٢}$ مین ضرب کرو اور پانچوین جز کو $م^{٣}$ مین اور علی ہذا القیاس

حکم ٢ مرقومہ بالا سے یہہ بہی معلوم ہوتا ہی کہ اگر مساوات مفروض کے اجزا کی امثال کسور ہوتین

تو ہم اس مساوات کو ایک ایسی مساوات سی تبدیل کرسکتی ہین کہ امثال اجزاء اس پچہلی مساوات کی اعداد صحیح ہون اور ترکیب اسکی یہہ ہی کہ مساوات مفروض کی امثال کے (کہ کسور ہین) نسب نمایون کو اپسمین ضرب کرکے حاصل ضرب معلوم کرو اور بعد ازان مساوات مفروض ایک ایسی مساوات سے تبدیل کرو کہ اسکی قیمتین ایسی ہووین کہ پیدا ہون ضرب دینی سے قیمتون مساوات مفروض کو حاصل ضرب مذکورہ بالا مین

حکم ۳ اگر امثال دوسری اور تیسری اور چوتہی وغیرہ جزون کسی مساوات کی پوری قسمت ہوسکتی ہون علیحدہ $م$ اور $م^۲$ اور $م^۳$ وغیرہ پر تو ضرور ہی کہ $م$ ہو وے مقسوم علیہ مشترک سب قیمتون مساوات مذکور کا

مثالین

۱ چاہتے ہین ہم تبدیل کرنا مساوات $۲ل^۳ - ۴ل^۲ + ۷ل - ۳ = ۰$ کو ایک ایسی مساوات سے کہ اوسکی قیمتین علیحدہ علیحدہ تین گنی ہون قیمتون مساوات مفروض کی سے

۲ چاہتے ہین ہم تبدیل کرنا مساوات $۴ل^۴ - ۳ل^۳ - ۱۲ل^۲ + ۵ل - ۱ = ۰$ کو ایک ایسی مساوات سے جسکی قیمتین علیحدہ علیحدہ چار گنی ہون قیمتون مساوات مفروض کی سے

۳ چاہتے ہین ہم تبدیل کرنا مساوات $ل^۳ + \frac{۱}{۳}ل^۲ - \frac{۱}{۴}ل + ۲ = ۰$ کو ایک ایسی مساوات سی جسکی قیمتین علیحدہ علیحدہ ۱۲ گنی ہون قیمتون مساوات مفروض کی سے

اجوبہ

۱ $۲ل^۳ - ۱۲ل^۲ + ۶۳ل - ۸۱ = ۰$

۲ $ل^۴ - ۳ل^۳ - ۴۸ل^۲ + ۸۰ل - ۶۴ = ۰$

۳ $ل^۳ + ۴ل^۲ - ۳۶ل + ۳۴۵۶ = ۰$

شکل ۵

چاہتے ہین تبدیل کرنا کسی مساوات مفروض کو ایک ایسی مساوات سی جسکی قیمتین ہووین متحد در قیمتون مساوات مفروض سیکے فرض کرو کہ یہہ ہی مساوات $ل^ن + ا_۱ ل^{ن-۱} + ا_۲ ل^{ن-۲} + \cdots + ا_{ن-۱} ل + ا_ن = ۰$

پس اب موافق شکل پانچوین سیکے باب گذشتہ سی ظاہر ہی کہ مساوات

$ل^ن - ا_۱ ل^{ن-۱} + ا_۲ ل^{ن-۲} - \cdots \pm ا_{ن-۱} ل \mp ا_ن = ۰$ ایسی ہو گی کہ اسکی قیمتین قیمتون مساوات مفروض کی سے فقط علامتوں مین مختلف ہونگی فرض کرو کہ $ط_۱$ اور $ط_۲$ اور $ط_۳$ وغیرہ قیمتین مساوات مفروض کی ہین اور $-ط_۱$ اور $-ط_۲$ اور $-ط_۳$ وغیرہ قیمتین پچہلی مساوات کی ہین پس اب

حاصل ہونگی سیے مساواتین کہ اونمین اجزا ر بہ نسبت سابق کے ذرا مختلف ترتیب سی لکھے گئے ہین

$$\left(\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ا}_{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \text{ا}_{۴}\,\text{لا}^{\text{ن}-۴} + \text{وغیرہ}\right) + \left(\text{ا}_{۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ا}_{۳}\,\text{لا}^{\text{ن}-۳} + \text{وغیرہ}\right)$$

$$= \left(\text{لا} - \text{ط}_{۱}\right)\left(\text{لا} - \text{ط}_{۲}\right)\left(\text{لا} - \text{ط}_{۳}\right)\left(\text{لا} - \text{ط}_{۴}\right)\ \text{وغیرہ اور}$$

$$\left(\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ا}_{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \text{ا}_{۴}\,\text{لا}^{\text{ن}-۴} + \text{وغیرہ}\right) - \left(\text{ا}_{۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ا}_{۳}\,\text{لا}^{\text{ن}-۳} + \text{وغیرہ}\right)$$

$$= \left(\text{لا} + \text{ط}_{۱}\right)\left(\text{لا} + \text{ط}_{۲}\right)\left(\text{لا} + \text{ط}_{۳}\right)\left(\text{لا} + \text{ط}_{۴}\right)\ \text{وغیرہ}$$

اب اگر ضرب کرین ہم ان دو مساواتون کو اپسمین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$\left(\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ا}_{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \text{ا}_{۴}\,\text{لا}^{\text{ن}-۴} + \text{وغیرہ}\right)^{۲} - \left(\text{ا}_{۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ا}_{۳}\,\text{لا}^{\text{ن}-۳} + \text{وغیرہ}\right)^{۲}$$

$$= \left(\text{لا}^{۲} - \text{ط}_{۱}^{۲}\right)\left(\text{لا}^{۲} - \text{ط}_{۲}^{۲}\right)\left(\text{لا}^{۲} - \text{ط}_{۳}^{۲}\right)\left(\text{لا}^{۲} - \text{ط}_{۴}^{۲}\right)\ \text{وغیرہ}$$

اب اگر عمل مجذور کا جاری کرین اور مساوات کی اجزا کو علی الترتیب موافق قوای لا کی لکھین تو مساوات گذشتہ اس صورت کی ہوجاویگی

$$\text{لا}^{۲\text{ن}} - \left(\text{ا}_{۱}^{۲} - ۲\,\text{ا}_{۲}\right)\text{لا}^{۲\text{ن}-۲} + \left(\text{ا}_{۲}^{۲} - ۲\,\text{ا}_{۱}\text{ا}_{۳} + ۲\,\text{ا}_{۴}\right)\text{لا}^{۲\text{ن}-۴} - \text{وغیرہ}$$

$$= \left(\text{لا}^{۲} - \text{ط}_{۱}^{۲}\right)\left(\text{لا}^{۲} - \text{ط}_{۲}^{۲}\right)\left(\text{لا}^{۲} - \text{ط}_{۳}^{۲}\right)\left(\text{لا}^{۲} - \text{ط}_{۴}^{۲}\right)\ \text{وغیرہ}$$

اب اگر واسطے $\text{لا}^{۲}$ کے لکھین ہم ی کو تو مساوات گذشتہ اس شکل کی ہوجایگی

$$\text{ی}^{\text{ن}} - \left(\text{ا}_{۱}^{۲} - ۲\,\text{ا}_{۲}\right)\text{ی}^{\text{ن}-۱} + \left(\text{ا}_{۲}^{۲} - ۲\,\text{ا}_{۱}\text{ا}_{۳} + ۲\,\text{ا}_{۴}\right)\text{ی}^{\text{ن}-۲} - \text{وغیرہ}$$

$$= \left(\text{ی} - \text{ط}_{۱}^{۲}\right)\left(\text{ی} - \text{ط}_{۲}^{۲}\right)\left(\text{ی} - \text{ط}_{۳}^{۲}\right)\left(\text{ی} - \text{ط}_{۴}^{۲}\right)\ \text{وغیرہ}$$

پس معلوم ہوا کہ وہ مساوات جسکی قیمتین مجذور رہین واسطے قیمتون مساوات مفروضہ کے یہہ ہی

$$\text{ی}^{\text{ن}} - \left(\text{ا}_{۱}^{۲} - ۲\,\text{ا}_{۲}\right)\text{ی}^{\text{ن}-۱} + \left(\text{ا}_{۲}^{۲} - ۲\,\text{ا}_{۱}\text{ا}_{۳} + ۲\,\text{ا}_{۴}\right)\text{ی}^{\text{ن}-۲} - \text{وغیرہ} = ۰$$

مثالین

۱ تبدیل کرو مساوات $\text{لا}^{۳} + ۳\,\text{لا}^{۲} - ۲\,\text{لا} - ۸ = ۰$ کو ایک اور ایسی مساوات سیے جسکی قیمتین مجذور

ہون واسطی قیمتون مساوات مفروض کے ایدال علامات سے ظاہر ہی کہ لاؔ - ۶ لا = - ۳ لاؔ + ۸
اور اگر دو نو طرف اس مساوات کا مجذور لین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات
لاؔ - ۱۲ لاؔ + ۳۶ لاؔ = ۹ لاؔ - ۴۸ لاؔ + ۶۴ ∴ لاؔ - ۲۱ لاؔ + ۸۴ لاؔ - ۶۴ = ۰
یعنے مساوات مطلوبہ یہہ ہی یؔ - ۲۱ یؔ + ۸۴ ی - ۶۴ = ۰ قیمتین مساوات مفروض کی - ۱
اور - ۴ اور - ۲ ہین اور قیمتین مساوات محصل کی ۱ اور ۱۶ اور ۴ ہین

۲ تبدیل کر و مساوات لاؔ - لاؔ - ۷ لا + ۱۵ = ۰ کو
۳ تبدیل کرو لاؔ - ۶ لاؔ + ۵ لاؔ + ۲ لا - ۱۰ = ۰ کو
۴ تبدیل کرو مساوات لاؔ - ۴ لاؔ - ۸ لا + ۳۲ = ۰ کو
۵ تبدیل کرو مساوات لاؔ - ۳ لاؔ - ۱۵ لاؔ + ۴۹ لا - ۱۲ = ۰ کو

اجوبہ

۲ یؔ - ۱۵ یؔ + ۶۷ ی - ۲۲۵ = ۰
۳ یؔ - ۲۶ یؔ + ۲۹ یؔ - ۱۰۴ ی + ۱۰۰ = ۰
۴ یؔ - ۱۶ یؔ - ۶۴ ی + ۱۰۲۴ = ۰
۵ یؔ - ۳۹ یؔ + ۴۹۵ یؔ - ۲۰۴۱ ی + ۱۴۴ = ۰

شکل ۶

اگر اصلے قیمتین یعنے وسے قیمتین جو غیر ممکن نہین ہین کسی مساوات کی متواتر زیادہ ہوتی ہوئی ہون
ط۱ اور ط۲ اور ط۳ اور ط۴ وغیرہ یعنے انہین سے ط۱ زیادہ ہو ط۲ اور ط۲ زیادہ ہو
ط۳ سے اور ط۳ ط۴ سے اور ایک اور سلسلہ اعداد کا مثل اسکے ہو
ص۱ اور ص۲ اور ص۳ اور ص۴ اور ص۵ وغیرہ اور انہین سے ص۱ زیادہ ہو ط۱ سے
اور ص۲ کم ہو ط۱ سے اور زیادہ ہو ط۲ سے یعنی مابین ط۱ اور ط۲ کے واقع ہو اور اسیطرح
ص۳ واقع ہو مابین ط۲ اور ط۳ کے اور علی ہذا القیاس اور اس پچھلے سلسلہ کے اعداد متواتر
بجای لا کی مساوات مفروض مین لکھے جائین تو جو مقدارین اس عمل سے حاصل ہونگی وسے ایکبار
تو مثبت اور ایکبار منفی ہونگی یعنے علی الترتیب مثبت اور منفی ہونگی ظاہر ہی کہ اول طرف مساوات گذشتہ کی
ہی حاصل ضرب ان اجزا مفرد کا (لا - ط۱) (لا - ط۲) (لا - ط۳) (لا - ط۴) وغیرہ
اور اجزاء دوسرے مرتبہ کی جنہین پائی جاتی ہین قیمتین غیر ممکن لیکن اجزاء دوسرے مرتبہ کی قیمتین مطابق ہر قیمت

اصلی لا کی مثبت ہوتی ہی اور اسیواسطی ان اجزاؤ سکے ہونی یا نہونی سیسے کچہ فرق علامت
حاصل ضرب مذکور کی مین نہین اسکتا ہی اور اس باعث سی ہم او نہین دور کر سکتے ہین کیونکہ
ہمسے مطلب فقط دریافت کرنا علامتون کا ہی پس اب اگر لکہین واسطے لا کی متواتر ص ۱ اور ص ۲
اور ص ۳ وغیرہ تو حاصل ہونگی سیسے مساواتین

(ص ۱ − ط ۱) (ص ۱ − ط ۲) (ص ۱ − ط ۳) (ص ۱ − ط ۴) وغیرہ

= + ٠ + ٠ + ٠ + وغیرہ = + نقاط علامت ضرب سیکے ہین

(ص ۲ − ط ۱) (ص ۲ − ط ۲) (ص ۲ − ط ۳) (ص ۲ − ط ۴) وغیرہ

= − ٠ + ٠ + ٠ + وغیرہ = −

(ص ۳ − ط ۱) (ص ۳ − ط ۲) (ص ۳ − ط ۳) (ص ۳ − ط ۴) وغیرہ

= − ٠ − ٠ + ٠ + وغیرہ = +

(ص ۴ − ط ۱) (ص ۴ − ط ۲) (ص ۴ − ط ۳) (ص ۴ − ط ۴) وغیرہ

= − ٠ − ٠ − ٠ + وغیرہ = −

وغیرہ وغیرہ

حکم ۱ یہان سیسے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اگر دو اعداد متواترہ واسطے لا کے کسی مساوات مین لکہین تو اور جو دو مقدارین ان دو اعداد کے لکہنے سیسے بجای لا کی حاصل ہون اونکی علامتین مختلف ہون تو ضرور ہی کہ ہوون مابین ان دو اعداد کے ایک یا تین یا پانچ یا اور کوئی قیمتین جنکی تعداد طاق ہی

حکم ۲ اگر وسیسے مقدارین جو حکم (۱) مین حاصل ہووین ایکسی علامتین رکہتی ہون تو ضرور ہی کہ واقع ہون مابین دو اعداد مذکور کے دو یا چار یا چہہ یا کوئی قیمتین جنکی تعداد جفت ہی یا انکی مابین کوئی قیمت نہین ہو

حکم ۳ اگر کوئی مقدار ق اور ہر مقدار جو زیادہ ہو ق سیسے ایسی ہون کہ اونکو بجای لا سیکے لکہنے سیسے مقدارین محصل مثبت ہون تو ضرور ہی کہ ق زیادہ ہو بہ نسبت سب سیسے بڑی قیمت مساوات مفروض کے

حکم ۴ یہان سیسے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اگر ایک ایک جز بیچ مین چہوڑ کر علامتین اجزاء کی تبدیل کی جائین اور ف اور ہر اور مقدار جو زیادہ ہو ف سیسے ایسی ہو کہ اوسکو بجای لا کی لکہنے سیسے جو مقدارین حاصل ہوتی وسیسے مثبت ہون تو ضرور ہی کہ ف کم ہو بہ نسبت سب سیسے کم قیمت کی

مثال

چاہتے ہین ہم دریافت کرنا اول رقم ایک کی قیمتون مساوات آئندہ سیسے

لا^۳ — ۴ لا^۲ — ۶ لا + ۸ = ۰

یہان یہہ ظاہر ہی کہ ایک قیمت لا کی عدد ایک سے کچھہ بہت فرق نہین رکہتی ہی اسواسطی کہ جسوقت لا = ۱ اوسوقت قیمت اول طرف مساوات گذشتہ کی ۱ ہوتی ہی اور جسوقت لا = ۹ر اوسوقت قیمت اول طرف مساوات مذکور کی اسطرح سی دریافت ہوتی ہی

۹ر) ۱ — ۴ — ۶ + ۸

۹ر — ۲ر۷۹ — ۸ر۱۱ ۹ر۷

—۱ر۳ — ۹ر۷۹ر + ۰۸۹ر۰

پس معلوم ہوا کہ دوسری قیمت اول طرف مساوات مفروض کی ۰۸۹ر۰ ہی اور چونکہ اول قیمت تو منفی ہی اور دوسری مثبت تو ضرور ہی ایک قیمت مساوات کی مابین انکے واقع ہو اور اس قیمت کی اول رقم ۹ر ہو گی کسواسطی کہ $\frac{۱ + ۹ر}{۲}$ = کچھہ زیادہ ۹ر سے

شکل ۷

ایک مساوات ن درجہ کی موجود ہی اور چاہتے ہین ہم دریافت کرنی ایک ایسی مساوات (ن — ۱) درجہ کی کہ قیمتین مساوات مفروض کی ہو وین حدود واسطی قیمتون اس مساوات کی یعنی ہر قیمت انکی مابین واسطے واقع ہو مابین دو قیمتون مساوات مفروض کی فرض کرو کہ ط۱ اور ط۲ اور ط۳ اور ط۴ اور .... طن ہین قیمتین مساوات اندہ کی اسطرح سے کہ ط۱ سب سے زیادہ ہی اور ط۲ ط۱ سے تو کم اور ط۳ سے زیادہ اور علی ہذا القیاس باقی قیمتین بہی اسطرح سے کم ہوتی جاتی ہین

لا^ن + ا۱ لا^(ن — ۱) + ا۲ لا^(ن — ۲) + ... ا(ن — ۱) لا + ان = ۰

اب کم کرو قیمتون اس مساوات کو بقدر د کے (موافق شکل اول اس باب کے) تو ظاہر ہی کہ اس حالت مین صورت عمل کی یہہ ہوگی

د) ۱ + ا۱ + ا۲ + ... ا(ن — ۲) + ا(ن — ۱) + ان

$\frac{د}{ب۱}$ + $\frac{د ب۱}{ب۲}$ .... $\frac{د ب(ن — ۳)}{ب(ن — ۲)}$ + $\frac{د ب(ن — ۲)}{ب(ن — ۱)}$ + $\frac{د ب(ن — ۱)}{ب ن}$

$\frac{د}{س۱}$ $\frac{د س۱}{س۲}$ .... $\frac{د س(ن — ۳)}{س(ن — ۲)}$ $\frac{د س(ن — ۲)}{س(ن — ۱)}$ $\frac{د س(ن — ۱)}{س ن}$

اور اسجاسے ظاہر ہی کہ قیمت $س_{ن-۱}$ کی مساوات لئنہ وسی معلوم ہوتی ہی

$$س_{ن-۱} = ا_{ن-۱} + د ب_{ن-۲} + د س_{ن-۲}$$

$$= ا_{ن-۱} + د(ا_{ن-۲} + د س_{ن-۳}) + د(ا_{ن-۲} + د ب_{ن-۳} + د س_{ن-۳})$$

$$= ا_{ن-۱} + ۲ د ا_{ن-۲} + ۲ د^۲ ب_{ن-۳} + د^۲ س_{ن-۳}$$

$$= ا_{ن-۱} + ۲ د ا_{ن-۲} + ۲ د^۲ (ا_{ن-۳} + د ب_{ن-۴}) + د^۲ (ا_{ن-۳} + د ب_{ن-۴} + د س_{ن-۴})$$

$$= ا_{ن-۱} + ۲ د ا_{ن-۲} + ۳ د^۲ ا_{ن-۳} + ۳ د^۳ ب_{ن-۴} + د^۳ س_{ن-۴}$$

$$\vdots$$

$$= ا_{ن-۱} + ۲ د ا_{ن-۲} + ۳ د^۲ ا_{ن-۳} + \dots + (ن-۱) د^{ن-۲} ا_{۱}$$

یا $س_{ن-۱} = ن د^{ن-۱} + (ن-۱)(ن-۲) د^{ن-۲} + \frac{۱}{۲}(ن-۲)(ن-۳) د^{ن-۳} + \dots + ۲ ا_{ن-۲} + ا_{ن-۱}$ (۱)

اب ظاہر ہی کہ قیمتین تبدیل کی گئی مساوات کی ییے ہونگی

$ط_۱ - د$ اور $ط_۲ - د$ اور $ط_۳ - د$ اور $ط_۴ - د$ .... $ط_ن - د$

اور جبکہ ہمنے مساوات مذکور کے اخیر جز سے پہلی جز کے ایک خاص طریقہ سی دریافت کر لی ہی تو ہم اب اوسی جز کے سر کی قیمت کو ایک اور طریقہ سے دریافت کرینگی بوسیلہ شکل (۶) باب گذشتہ کے پس حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$\begin{aligned}
س_{ن-۱} = & (د - ط_۱)(د - ط_۲)(د - ط_۳) \dots\dots (ن-۱) \text{ جزون تک ضرب کی} \\
& + (د - ط_۱)(د - ط_۲)(د - ط_۴) \dots\dots \text{ ایضاً} \\
& + (د - ط_۱)(د - ط_۳)(د - ط_۴) \dots\dots \text{ ایضاً} \quad (۲) \\
& \vdots \\
& + (د - ط_۲)(د - ط_۳)(د - ط_۴) \dots\dots \text{ ایضاً}
\end{aligned}$$

اب چونکہ یہہ دو قیمتین س ن ـ ١ کی مساوی ایک دوسرے کی ہین تو ضرور ہی کہ جو کچھہ تبدیلی کسی مقدار کی بجاے کسی مقدار کی رکھنے سی ہیچ ایک کے ان قیمتونمین سے ہوگی وہی تبدیلی اوسی باعث سی دوسری قیمت مین بہی ہوگی پس جسوقت لکہین گے ہم پی در پیے ط١ اور ط٢ اور ط٣ وغیرہ واسطی ق کے دوسری طرف مساوات (٢) کے یعنی تو حاصل ہونگی یہہ مساواتین

(ط١ − ط٢) (ط١ − ط٣) (ط١ − ط٤) .... = + . + . + . + ... = +

(ط٢ − ط١) (ط٢ − ط٣) (ط٢ − ط٤) .... = − . + . + ... = −

(ط٣ − ط١) (ط٣ − ط٢) (ط٣ − ط٤) ...... = − . − . + .. = +

وغیرہ　　　وغیرہ　　　وغیرہ

لیکن جسوقت کہ یہ مقدارین مثل ط١ اور ط٢ اور ط٣ اور ط٤ وغیرہ کی بجاے مقدار مجہول کے کسی مساوات مین لکہی جاتی ہین اور اس عمل سے جو کچھہ مقدارین حاصل ہووین وے پی در پی مثبت اور منفی ہوتی ہین اوسوقت موافق شکل (٦) اس باب کی اگر ان مقدارونمین سے کوئی سب ترتیب وار لی جاوین واقع ہوتی ہی مابین دو اصلی قیمتون مساوات مفروض کے پس جسوقت لکہین ہم س ن = ١ کے اور تبدیل کرین دلکو لاسے تو مساوات (١) سے حاصل ہوگی یہہ مساوات

ن لا^(ن−١) + (ن − ١) ١١ لا^(ن−٢) + (ن − ٢) ١٢ لا^(ن−٣) + ... ٢ ١(ن−٢) لا + ١(ن−١) = ٠ (٣)

اور یہہ ظاہر ہی کہ یہہ ایک ایسی مساوات ہی کہ اسکی قیمتین ہین محدود قیمتون مساوات مفروض کی یعنی اسکی

لا^ن + ١١ لا^(ن−١) + ١٢ لا^(ن−٢) + ... ١(ن−١) لا + ١ن = ٠

اور طریقہ حاصل کرنے نئی مساوات کا مساوات اصلی سے نہایت ظاہر ہی فرض کرو کہ ط١ اور ط٢ اور ط٣ اور ط٤ وغیرہ قیمتین مساوات اصلی کی ہین اور ص١ اور ص٢ اور ص٣ وغیرہ قیمتین حاصل کی ہوئے مساوات (٣) کی ہین اور یہہ بہی فرض کرو کہ یہ سب مرتب ہین موافق اپنی مقدار کے تو قیمتین دونون مساواتون کے لکہی جاوینگی موافق اپنی اپنی مقدار کے ترتیب آئندہ سے

ط١ اور ص١ اور ط٢ اور ص٢ اور ط٣ اور ص٣ اور ط٤ اور ص٤ اور ط٥ اور ص٥ وغیرہ

حکم ١ اگر ط٢ = ط١ تو ضرور ہی کہ (د − ط١) پایا جاوے بطریق ایک جز ضربی کے ہر مجموعہ اجزاء ضربی مساوات (١) کے ہین اور یہہ ثابت ہو چکا ہی کہ مساوات (٢) اور مساوات حدی یعنی مساوات

(۳) ایک ہی ہیں تو معلوم ہوا کہ لا - ط ۱ ایک جز ضربی مشترک مساوات حدی اور مساوات مفروض مین پایا جائیگا

حکم ۲ اگر ط ۲ = ط ۲ = ط ۱ تو جز (د - ط ۱) (د - ط ۲) واقع ہوگا بطریق ایک جز ضربی کے ہر مجموعہ اجزای ضربی مساوات (۲) سے کہ یعنی مساوات (۳) پوری تقسیم ہوسکتی ہے (لا - ط ۱)^۲ پر اور اسیواسطے معلوم ہوا کہ مساوات حدی اور مساوات مفروض مین جز (لا - ط ۱)^۲ مشترک ہوگا

حکم ۳ اگر مساوات مفروض مین یہہ بہی مساوات ہو ط ۳ = ط ۴ تو مساوات حدی اور مساوات مفروض مین یہہ جز مشترک ہوگا (لا - ط ۱)^۲ (لا - ط ۳) یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر ہم کسی مساوات کی مساوی قیمتون کی تعداد دریافت کیا چاہین تو اول ہمین یہہ لازم ہے کہ دریافت کرلین مساوات حدی اس مساوات کی اور بعد ازان دریافت کرین مقسوم علیہ اعظم اول طرفون دونون مساواتونکا اگر مقسوم علیہ اعظم اس شکل کا ہو (لا - ط ۱)^ف (لا - ط ۲)^ق (لا - ط ۳)^ر وغیرہ تو مساوات مفروض مین (ف + ۱) قیمتین تو مساوی ط ۱ کے ہونگی اور (ق + ۱) قیمتین مساوی ط ۲ کے اور (ر + ۱) قیمتین مساوی ط ۳ کے اور علی ہذا القیاس بعد ازان مساوات مفروض کو کم درجہ کا کرسکتے ہین

فصل چہارم بیچ بیان قاعدون کے واسطے دریافت کرنی قیمتون غیر ممکن کسی مساوات مفروض کے

اول قاعدہ مہندس بودن کا

اگر اصلی قیمتین کسی مساوات مفروض کی یسے ہون ط ۱ اور ط ۲ اور ط ۳ وغیرہ کہ موافق اپنی اپنی مقدار کے مرتب ہین اور انمین سے ط ۱ سب سی کم ہے اب اگر کم کرین ہم ہر قیمت مذکور کو بقدر ہ کے کہ ایک ایسا عدد ہے کہ زیادہ ہے بہ نسبت ط ۱ کے اور کم ہے بہ نسبت ط ۲ کے تو قیمتین مذکور اس شکل کی ہوجاتینگی ط ۱ - ہ اور ط ۲ - ہ اور ط ۳ - ہ وغیرہ ط ن - ہ تک اور ظاہر ہے کہ اول انمین کی منفی ہوگی لیکن جبکہ تمام قیمتین اصلی ہوتی ہین + اسوقت تعداد قیمتون مثبتہ کی گنتی ہے تعداد تبدیلیون علامت کی کہ واقع ہوتی ہین مساوات مفروض کے اجزا مین اور چونکہ ہمنے تبدیل کیا ہے ایک قیمت مثبت کو ایک قیمت منفی سے تو جو مساوات اس تبدیلی کے بعد حاصل ہوگی اوسمین ایک تبدیلی علامت کی بہ نسبت مساوات مفروض کے کم ہوگی اگر کم کرین ہم قیمتون مساوات مفروض کو بقدر ک کے کہ زیادہ ہے بہ نسبت ط ۲ کے لیکن کم بہ نسبت

ط سے گھٹنے تو اس صورت مین ظاہر ہی کہ جو مساوات بعد کمی مذکور کی حاصل ہوگی اوسمین دو منفی قیمتین ط ـ ۱ ـ کہ
اور ط ـ ۲ ـ کہ ہونگی اور اسیواسطی اس مساوات مین دو تبدیلی علامت کی بہ نسبت مساوات مفروض سے کم ہونگے
اسواسطی کہ دو قیمتین مثبتہ دو قیمتون منفیہ سی تبدیل کی گئی ہین یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ اگر گھٹاوین ہم ہر قیمت
مساوات مفروض کو بقدر ایک ایسی مقدار سے جو زیادہ ہی بہ نسبت طی کے تو ظاہر ہی کہ تمام قیمتین مثبتہ منفی ہو جاینگے اور اسیواسطے
جو مساوات مابعد اس کمی سے حاصل ہوگی اوسمین سب اجزا مثبت ہونگی کیونکہ سب قیمتین اسکی منفی ہین
(موافق شکل (۶) باب گذشتہ سے) اور اس صورت مین ظاہر ہی کہ تمام تبدیلین علامت کی جاتی رہینگی یہان
سے معلوم ہوتا ہی کہ اگر قیمتین مساوات مفروض کو یہان تک کم کرین کہ تمام قیمتین اوس مساوات کی جو بعد ازان حاصل
ہوتی ہی منفی ہو جائین یعنے تمام اجزا اوسکی مثبت ہو جائین تو ظاہر ہی کہ وہ عدد جسکا ہم اس صورت مین استعمال
کرتے ہین زیادہ ہوگا بہ نسبت سب سے بڑی قیمت مثبتہ مساوات مفروض کی اور اسیواسطی مکانی اس عدد کا کم ہوگا
بہ نسبت سب سے چھوٹی قیمت مساوات مفروض کے مساوات مکانی کی سے اب اگر دریافت کرتے مساوات
مفروض کی مساوات مکانی کو کم کرین ہم اوسکی قیمتون کو بقدر مکانی عدد مذکور کے تو ضرور ہی کہ مساوات
مکانی مین اوتنی ہی قیمتین منفیہ رہینگی جتنی قیمتین مثبت مساوات اصلی مین پہلی تہین الا اوس صورت مین جبکہ
مساوات مین قیمتین غیر ممکن بہی ہون یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ تعداد اون تبدیلیون کی جو مساوات اول
مین سے زائل ہو گئی ہین بالضرور مساوی ہو اون تبدیلیون کے جو باقی رہین مساوات دوم مین بشرطیکہ
تمام قیمتین مساوات مفروض کی اصلی ہون نہ کہ غیر ممکن پس اگر یہہ شرط پوری نہو تو ضرور ہی کہ حاصل تفریق اون
اعداد کا جنسی تعداد تبدیلیون مذکور کی تعبیر ہوتی ہی مساوی ہو تعداد قیمتون غیر ممکن کی واسطی توضیح مرقوم الصدر
کے ہم فرض کرتے ہین کہ کوئی ایسی مساوات ہی جسمین تین مثبت قیمتین ہین مثلا سے سے ہین
$\overline{1}$ اور ۵ و $\overline{2}$ اور $\overline{3}$ اب اگر ہر واحد کو ان قیمتونمین سے بقدر عدد $\overline{4}$ کے جو زیادہ ہی تہ سے کہ
سب سے بڑی قیمت مساوات مفروض کی ہی کم کرین تو ظاہر ہی سے تینون قیمتین منفی ہو جائینگی اور اسی سبب سے
تین تبدیلین علامات کی مساوات تبدیل کی ہوئی مین زائل ہو جائینگی یہہ بہی ظاہر ہی کہ مساوات مفروض کی
مساوات مکانی کی تین مثبت قیمتین سے ہونگی $\overline{1}$ اور $\frac{2}{5}$ اور $\frac{1}{3}$ اور اگر ہر واحد کو ان قیمتون مساوات
مکانی کی مین سے بقدر $\frac{1}{4}$ کے کہ مکانی ہی $\overline{4}$ کا کم کرین تو ظاہر ہی کہ علامات تینون قیمتون کی تبدیل نہین
ہو جائینگی کسواسطے کہ قیمتین کم کی گئی سے ہونگی $1-\frac{1}{4}$ اور $\frac{2}{5}-\frac{1}{4}$ اور $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ اعداد مثبت
ہین اور یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ کوئی تبدیلیون مین سے مساوات مکانی تبدیل کی ہوئی مین زائل نہین
ہونیکی اور چونکہ تین ہی تبدیلین علامات کی مساوات مفروض تبدیل کی ہوئی مین زائل ہو گئی ہین تو معلوم ہوا

کہ مساوات مفروض مین کوئی قیمت غیر ممکن نہین ہی یہان سے پیدا ہوتا ہی دعوی آئندہ اگر کسی مساوات
مفروض کی قیمتون کو بقدر کسی عدد م کی کم کرین اور تبدیل کی ہوئی مساوات مین ن تبدیلین علامات سے
زائل ہو جائین اور بعد ازان ہر واحد کو قیمتون مساوات مفروض کی مساوات مکافی مین سے بقدر ١/م کے
کم کافی ١/م کا نتیجہ کرین اور اس تبدیل کی ہوئی مساوات مکافی مین ق کتی تبدیلین علامات باقی رہین تو ضرور
ہی کہ مابین صفر اور ١/م کے ن − ق کتنی قیمتین غیر ممکن ہون

مثال

چاہیے ہم دریافت کرنا تعداد قیمتون غیر ممکن اس مساوات لا٤ − لا٣ + ٢لا٢ + لا − ٤ = ا سکے

مساوات مفروض	مساوات مفروض کی مساوات مکافی
١) ١ −١ +٢ +١ −٤	١) −٤ +١ +٢ −١ +١
$\frac{1}{0}$ $\frac{0}{2}$ $\frac{3}{3}$ $\frac{3}{-1}$	$\frac{-4}{-2}$ ٢٣− / ٢−١٠ $\frac{2-}{1-}$
$\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{6}$	$\frac{-4}{-7}$ $\frac{-7}{-8}$ $\frac{-8}{-10}$
$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{5}$	$\frac{-4}{-11}$ $\frac{-11}{-19}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{-4}{-15}$

اسس مثال مین ظاہر ہی کہ مساوات مفروض کی تبدیل کرنے مین دو تبدیلین علامات کی زائل ہو گئی ہین اور مساوات
مفروض کی مساوات مکافی تبدیل کی ہوئی مین کوئی تبدیلین علامات کی باقی نہین رہین تو معلوم ہوا کہ مساوات
مفروض مین کم سے کم دو قیمتین غیر ممکن ہین لیکن فقط دو ہی ایسی قیمتین ہین کسواسطی کہ مساوات مفروض کے اخیر
جز منفی ہونے سی یہہ بات معلوم ہوتی ہی کہ اوسمین دو قیمتین اصلی بہی ہین ایک تو اونمین سے مثبت اور
دوسری منفی کسواسطی کہ تین تو قیمتین غیر ممکن نہین ہو سکتی ہین کسواسطی کہ اگر ایسا ہوتا تو اخیر جز مذکور
مین کوئی مقدار غیر ممکن بہی نمودار ہوتی اور چار قیمتین غیر ممکن اسواسطے نہین ہین کہ اگر ایسا ہوتا تو اخیر جز مذکور
مثبت ہوتا اور حالانکہ وہ منفی ہی

بیان دوسرا

بیچ ایک قاعدہ مہندسین دیگوا کے واسطی دریافت کرنے قیمتون غیر ممکن مساواتون کے

اگر کسی مساوات مفروض مین کتنی کا سر صفر ہو یعنے کوی جز اس مساوات مین پایا نجاوے اور یہہ صفری مابین ایسی دو اجزا کے واقع ہو کہ اونکی علامتین یکسان ہون تو ہم کہتے ہین کہ اس مساوات مین دو قیمتین غیر ممکن ہونگی فرض کرو کہ مساوات مفروض مین علامات اس ترتیب سی نمودار ہین + + − ۰ − − + − − اور اگر واسطے ۰ کے + یا − لکہین تو حاصل ہونگی یہے ترتیبین علامات کی

+ + − + − + − − − اور + + − − − − + − −

صورت اول مین ہم پاتی ہین کہ تعداد متواتر آنے ایکہی علامت کی دو ہین اور پانچ تبدیلین علامات کی ہین اور صورت دویم مین یہہ ظاہر ہی کہ تعداد متواتر آنے ایکہی علامت کی تہہ ہین اور تبدیلین علامات کی تین ہین پس معلوم ہوا کہ اگر تمام قیمتین مساوات مفروض کی ممکن ہون تو صورت اول مین پانچ تو مثبت قیمتین ہون اور دو منفی اور صورت دویم مین تین تو مثبت قیمتین ہون اور چار منفی اور اس سے یہہ بات لازم آتی ہی کہ کوئی دو ایسی قیمتین ہین کہ منفی بہی ہین اور مثبت بہی اور اسیواسطی یے دو قیمتین اصلی قیمتین نہین ہوسکتی ہین پس ضرور ہی کہ یے قیمتین غیر ممکن ہون تریب اسطرحسی سے دو دعوی آئندہ بہی ثابت ہوسکتی ہین

۱ اگر مابین ایسی جزون کے جنکی علامات متماثل ہین ۲ن یا ۲ن − ۱ امثال صفری واقع ہون تو ہم کہتے ہین کہ انکی ہونی سے یہہ بات معلوم ہوگی کہ مساوات مفروضمین ۲ن کتنی قیمتین غیر ممکن ہین

۲ اگر مابین ایسے اجزا کی جو علامات غیر متماثل رکہتے ہین ۲ن + ۱ یا ۲ن امثال صفری واقع ہون تو ہم کہتے ہین کہ انکی واقع ہونی سے یہہ بات معلوم ہوگی کہ مساوات مفروض مین ۲ن قیمتین غیر ممکن ہین

مثال مساوات لا^{۴} − لا^{۳} + ۶ لا^{۲} + ۲۴ = ۰ مین دو قیمتین غیر ممکن ہین کسواسطی علامات ان دو اجزا کی جنکے مابین وہ جز جسکا سر صفری واقع ہی متماثل ہین اور اسیطرح سی مساوات لا^{۳} ± ۱ مین کہ اسمین سے امثال ۱ ± ۰ ± ۱ ہین دو قیمتین غیر ممکن ہین

مثالین واسطی مشق کے

۱ بتاو کتنی قیمتین غیر ممکن مساوات آئندہ مین پائی جاتی ہین ـ لا^{۵} + لا^{۳} − ۳ لا^{۲} + ۲ لا − ۱ = ۰

۲ مساوات لا^{۴} − ۲ لا^{۳} + ۶ لا^{۲} + ۶۰ لا + ۱۰ = ۰ مین کوی قیمت غیر ممکن ہی یا نہین

فصل پنجم بیچ بیان قاعدہ مہشر کارڈن کے واسطی حل کرنے مساواتون تیسری مرتبہ کی

فرض کرو کہ کوئی مساوات مفروض تیسری مرتبہ کی طرف اس شکل کی تحویل کی گئی ہی $\text{لا}^{3} - \text{ق}\,\text{لا} + \text{ف} = 0$
اور اسجای ق اور ف خواہ مثبت ہون خواہ منفی اب فرض کرو کہ $\text{لا} = \text{ط} + \text{ص}$ پس موافق اس فرض کے
مساوات مفروض اس شکل کے ہوجائیگی $(\text{ط} + \text{ص})^{3} - \text{ق}(\text{ط} + \text{ص}) + \text{ف} = 0$ اور جسوقت اسکی صورت
مفصل لین تو حاصل ہوتا ہی یہہ $\text{ط}^{3} + \text{ص}^{3} + 3\,\text{ط}\,\text{ص}(\text{ط} + \text{ص}) - \text{ق}(\text{ط} + \text{ص}) + \text{ف} = 0$ اب چونکہ
مقدارین مجہول ط اور ص تو دو ہین اور شرط ہمنے فقط ایک فرض کیا ہی یعنے یہہ مانی کہ
$\text{ط} + \text{ص} = \text{لا}$ تو ظاہر ہی کہ انکی باہمی ہم ایک دوسری بات بہی فرض کر سکتے ہین پس فرض کرو کہ
$3\,\text{ط}\,\text{ص} - \text{ق} = 0$ اور اس صورت مین ظاہر ہی کہ مساوات مفروض اس شکل کی ہو جاوے گی
$\text{ط}^{3} + \text{ص}^{3} + \text{ف} = 0$ اور چونکہ یہہ مساوات $3\,\text{ط}\,\text{ص} - \text{ق} = 0$ ہی حاصل ہی تو اس سے حاصل ہوتی
ہی یہہ مساوات $\text{ص} = \frac{\text{ق}}{3\,\text{ط}}$ اور جسوقت لکہین یہہ قیمت ص کی بجایے اوسکی مساوات
$\text{ط}^{3} + \text{ص}^{3} + \text{ف} = 0$ مین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $\text{ط}^{3} + \frac{\text{ق}^{3}}{27\,\text{ط}^{3}} + \text{ف} = 0$ اور اس سے
حاصل ہو سکتی ہی یہہ مساوات $\text{ط}^{6} + \frac{\text{ق}^{3}}{27} + \text{ف}\,\text{ط}^{3} = 0$ اور یہہ ایک مساوات دوسرے درجے
کی ہی اور اسمین ط^{3} ایک مقدار مجہول ہی پس اب اگر کامل کرین مربعہ کو تو حاصل ہوگا یہہ

$\text{ط}^{6} + \text{ف}\,\text{ط}^{3} + \frac{\text{ف}^{2}}{4} = \frac{\text{ف}^{2}}{4} - \frac{\text{ق}^{3}}{27}$ اور اب حاصل ہوگی یہہ مساوات

$\text{ط}^{3} + \frac{\text{ف}}{2} = \pm\sqrt{\frac{\text{ف}^{2}}{4} - \frac{\text{ق}^{3}}{27}}$ اور اسیواسطے پیدا ہوگی یہہ مساوات

$\text{ط}^{3} = -\frac{\text{ف}}{2} \pm \sqrt{\frac{\text{ف}^{2}}{4} - \frac{\text{ق}^{3}}{27}}$ اور اسیواسطے

$\text{ط} = \sqrt[3]{-\frac{\text{ف}}{2} \pm \sqrt{\frac{\text{ف}^{2}}{4} - \frac{\text{ق}^{3}}{27}}}$ اور چونکہ $\text{ط}^{3} + \text{ص}^{3} + \text{ف} = 0$ اسیواسطے

$\text{ص}^{3} = -\frac{\text{ف}}{2} \mp \sqrt{\frac{\text{ف}^{2}}{4} - \frac{\text{ق}^{3}}{27}}$ اور اسیواسطے

$\text{ص} = \sqrt[3]{-\frac{\text{ف}}{2} \mp \sqrt{\frac{\text{ف}^{2}}{4} - \frac{\text{ق}^{3}}{27}}}$ پس معلوم ہوا کہ $\text{لا} = \text{ط} + \text{ص}$

$$= \sqrt[3]{-\frac{\text{ف}}{2} \pm \sqrt{\frac{\text{ف}^{2}}{4} - \frac{\text{ق}^{3}}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{\text{ف}}{2} \mp \sqrt{\frac{\text{ف}^{2}}{4} - \frac{\text{ق}^{3}}{27}}}$$

اسکی یہ بات واضح ہو کہ جسوقت ایک جزو دوسری طرف اس مساوات مین علامت $\sqrt{\frac{\text{ف}^{۲}}{۴}-\frac{\text{ق}^{۳}}{۲۷}}$ کی مثبت ہوتے اسکی علامت دوسرے جز مین اوسیوقت منفی ہوتی ہی یعنی یہہ مساوات ہوتی ہی

$$\text{لا}=\sqrt[۳]{-\frac{\text{ف}}{۲}+\sqrt{\frac{\text{ف}^{۲}}{۴}-\frac{\text{ق}^{۳}}{۲۷}}}+\sqrt[۳]{-\frac{\text{ف}}{۲}-\sqrt{\frac{\text{ف}^{۲}}{۴}-\frac{\text{ق}^{۳}}{۲۷}}}$$

چونکہ $\text{ص}=\frac{\text{ق}}{۳\,\text{ط}}$ تو ظاہر ہی کہ مساوات آئندہ بہی پیدا ہو سکتی ہی

$$\text{لا}=\sqrt[۳]{-\frac{\text{ف}}{۲}\pm\sqrt{\frac{\text{ف}^{۲}}{۴}-\frac{\text{ق}^{۳}}{۲۷}}}+\frac{\text{ق}}{۳\sqrt[۳]{-\frac{\text{ف}}{۲}\pm\sqrt{\frac{\text{ف}^{۲}}{۴}-\frac{\text{ق}^{۳}}{۲۷}}}}$$

مثال

فرض کرو کہ ہی یہہ مساوات تیسری درجہ کی $\text{لا}^{۳}+۶\,\text{لا}-۲۰=۰$ اور چاہتے ہین ہم دریافت کرنی قیمت مقدار مجہول لا کی اسکے ظاہر ہی ق = — ۶ اور ف = — ۲۰ اور اسیواسطی

$$\text{لا}=\sqrt[۳]{۱۰+\sqrt{۱۰۸}}+\sqrt[۳]{۱۰-\sqrt{۱۰۸}}=۲{،}۷۳۲-{،}۷۳۲=۲$$

جسوقت معلوم ہوی ایک قیمت مساوات مفروض کی اوسوقت اوس مساوات کو ہم ایک مرتبہ کم کی مساوات یعنی درجہ دوم کی مساوات سی بتدیل کر سکتے ہین اور حل کرینے سی اس مساوات درجہ دوم کو ہم دریافت کر سکتے ہین دو اور قیمتین واضح ہو کہ جسوقت $\frac{\text{ق}^{۳}}{۲۷}$ ہووی اپنی ذات سیے مثبت اور زیادہ ہو $\frac{\text{ف}^{۲}}{۴}$ سی تو اس صورت مین ظاہر ہی کہ مقدار $\sqrt{\frac{\text{ف}^{۲}}{۴}-\frac{\text{ق}^{۳}}{۲۷}}$ غیر ممکن ہو جایگی اور اسیواسطی اس حالتمین قاعدہ بہہ بسکار ڈان کا جاری نہین ہو سکیگا اس صورت مین واسطی حل کرینے مساوات مفروض سیکے استعانت جدول مثلثی کی ضرور ہوتی ہی لیکن چونکہ اس حساب مین علم مثلث کا کام پڑتا ہی تو ہم اس مختصر مین طریقہ حل کرینے ایسی مساواتون کا نہین لکہینگے

مثالین واسطے مشق کے

۱ فرض کرو کہ ہی یہہ مساوات $\text{لا}^{۳}-۶\,\text{لا}^{۲}+۱۰=-۲۲$ اور چاہتے ہین ہم دریافت کرنی قیمت لا کی

۲ فرض کرو کہ ہی یہہ مساوات $\text{ی}^{۳}+۳۰\,\text{ی}=۱۱۷$ اور چاہتے ہین ہم دریافت کرنی قیمت ی کی

۳ فرض کرو کہ ہی یہہ مساوات $\text{ی}^{۳}-۳۶\,\text{ی}=۹۱$ اور چاہتے ہین دریافت کرنی قیمت ی کی

۴ فرض کرو کہ ہی یہہ مساوات $ر^۲ - ۳ ر = ۱۸$ اور چاہتے ہین ہم دریافت کرنی قیمت ر کی

۵ فرض کرو کہ ہی یہہ مساوات $ر^۳ + ۲۴ ر = ۲۵۰$ اور چاہتے ہین دریافت کرنی قیمت ر کی

۶ فرض کرو کہ ہی یہہ مساوات $ر^۶ - ۳ ر^۴ - ۲ ر^۲ - ۸ = ۰$ کیا ہی قیمت ر کی

اجوبہ

(۱) لا = ۴ (۲) ر = ۳ (۳) ر = ۷ (۴) ر = ۲

(۵) ر = ۵۰۰۵ ، (۶) ر = ۲ یہہ بات ظاہر ہی کہ جسوقت مساوات مفروض تیسرے درجہ کی مین کوئی ایسی مقدار مجہول ہی پائی جاتی ہو کہ اوسمین دوسرے درجہ کا صعود ہو تو اوسوقت قاعدہ مہندس کارڈن کا جاری نہین ہو سکتا ہی لیکن ہم اوس جز کو جسمین دوسرے مرتبہ کا صعود مقدار مجہول کا ہی دور کر سکتے ہین بوسیلہ اوس قاعدہ سے جو (۲) شکل تبدیل مساوات اوپر بیان ہوئی اور بعد ازان قاعدہ مہندس مذکور کا جاری ہو سکتا ہی فقط

فصل ششم بیچ بیان قاعدہ مہندس بملی کے واسطی تحویل کرنی مساواتون چوتہی درجہ کی طرف مساواتون تیسری درجہ سے

فصل گذشتہ مین ہمنے ترکیب حل کرنے مساواتون تیسری درجہ کی موافق قاعدہ مہندس کارڈن کے لکھی ہی پس اب اگر ہم تحویل کر سکین مساواتون چوتہے درجہ کو طرف مساواتون تیسرے درجہ کی تو ہماری غرض حاصل ہو جایگی یعنے ہم مقدار مجہول چوتہے درجہ کی مساواتون کی قیمت دریافت کرلین گے سوای اسکے یہہ بات غیر ممکن ہی کہ بغیر مدد قاعدہ تیسری درجہ کے مساواتون کے مساواتین چوتہی درجہ کی حل ہو سکین کسواسطی کہ جسوقت ایک قیمت مساوات چوتہی درجہ کی معلوم ہو جاتی ہی اوسوقت معلوم ہونا اوسکا موقوف ہو جاتا ہی اوپر قاعدہ تیسری درجہ کی مساواتون کے اور یہی حال ہی سب درجونکی مساواتون کا پس یہان سے یہہ نتیجہ نکلتا ہی کہ حل ہونا کسی درجہ کی مساوات کا موقوف ہی اوپر حل ہونے سب اون مساواتون کے جو اوس سے کم درجہ کی ہین چند سو برس گذرے ہین کہ مہندس بملی نے ایک قاعدہ واسطی حل کرنے مساواتون چوتہے درجہ کے ایجاد کیا اور اوس قاعدہ کو ہم اس فصل مین بیان کرینگے فرض کرو کہ مساوات مفروض چوتہے درجہ کی ہی یہہ

$لا^۴ + ا لا^۳ + ب لا^۲ + س لا + ص = ۰$ اور اس مین ا اور ب اور س اور ص مقدارین ممکن ہین اور یہہ بات بہی فرض کرو کہ مساوات مفروض اس شکل کی ہی $(لا^۲ + \frac{۱}{۲} ا لا + ف)^۲ - (ق لا + د)^۲ = ۰$

پس اب چاہیے ہمین دریافت کرنا ف اور ق اور د کو تا کہ مساوات مفروض حل ہو سکے اب اگر عمل مجذور کا جاری کرین اور قوای متماثلہ لا کی قطار عمودی مین ثبت کرین تو حاصل ہوگا یہہ

$$\left.\begin{array}{l} لا^۴ + ا لا^۳ + \frac{۱}{۴} ا^۲ لا^۲ + ا ف لا + ف^۲ \\ + ۲ ف لا^۲ - ۲ ق د لا - د^۲ \\ - ق^۲ لا^۲ \end{array}\right\} = ۰$$

اس جا سی ظاہر ہی کہ اول دو جز اس مساوات کی وہی ہین جو مساوات مفروض ہین اور تیسری جزو سی یہہ بات معلوم ہوتی ہی کہ
١/٤ اَ٢ + ٢ ف — قَ٢ = ب اور اس مساوات سی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات
قَ٢ = ١/٤ اَ٢ + ٢ ف — ب اور چوتھے جز سی یہہ بات لازم آتی ہی کہ ہووی یہہ مساوات
ا ف — ٢ ق د = س یا ٢ ق د = ا ف — س اور آخر جز سی یہہ مساوات پیدا ہوتی ہی
ف٢ — د٢ = ص یعنے د٢ = ف٢ — ص پس اب پیدا ہوئین تین مساواتین ایسی کہ اونکی ذریعہ سے
قیمتین تین مقدارون فَ اور قَ اور دَ کی معلوم ہو سکتی ہین نہایت سہل ترکیب واسطے معلوم کرنے
قیمتون ان مقادیر کی یہہ ہی اگر ضرب کرین ہم مساوات اول کو عدد چار مین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات
٤ قَ٢ = اَ٢ + ٨ فَ — ٤ ب اب اگر اس مساوات کو مساوات د٢ = فَ٢ — ص مین ضرب کرین تو حاصل
ہوگی یہہ مساوات ٤ قَ٢ دَ٢ = ٨ فَ٣ + (اَ٢ — ٤ ب) فَ٢ — ص (اَ٢ — ٤ ب) اب اگر مساوات
دوم کا مجذور لین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ٤ قَ٢ دَ٢ = اَ٢ فَ٢ — ٢ ا س ف + س٢ پس اب حاصل ہوئین
ہمین دو قیمتین ایکہی مقدار ٤ قَ٢ دَ٢ کی اور اسیواسطی یہ قیمتین مساوی ایک دوسرے سے ہونی چاہئین پس
حاصل ہوگی یہہ مساوات ٨ فَ٣ + (اَ٢ — ٤ ب) فَ٢ — ٨ ص ف — ص (اَ٢ — ٤ ب) = اَ٢ فَ٢ — ٢ ا س ف + س٢
اور اگر سب اجزا اس مساوات کو ایک ہی طرف لی آوین تو پیدا ہوگی یہہ مساوات
٨ فَ٣ — ٤ ب فَ٢ + (٢ ا س — ٨ ص) ف — اَ٢ ص + ٤ ب ص — س٢ = ٠ اور یہہ مساوات تیسری
درجہ کی ہی اور اسکے وسیلہ سی موافق قواعد مرقوم الصدر کی قیمت ف کی معلوم ہو سکتی ہی جسوقت دریافت ہوئی
ہمین تین قیمتین مقدار فَ کی بوساطت مقدارون اَ اور بَ اور سَ اور صَ کی (کہ ہمین ایک ہی قیمت فَ
کی دریافت کرنی منظور تھی) اوسوقت معلوم ہو جاینگے ہمین قیمتین باقی دو مقدارون مجہول کی بھی یعنے
قَ اور دَ کی اسواسطے کہ مساوات اول سے حاصل ہوتا ہی یہہ قَ = √(١/٤ اَ٢ + ٢ ف — ب) اور
مساوات دوسری سے یہہ د = (ا ف — س)/(٢ ق) اب جسوقت سے قیمتین تین مقدارون فَ اور قَ اور دَ کی
معلوم ہو جاتی ہین اوسوقت چار مقدار مجہول مساوات مفروض کی اس ترکیب سے معلوم ہو سکتی ہین چونکہ
مساوات مفروض تحویل ہو گئی ہی طرف اس شکل کے (لا٢ + ١/٢ ا لا + ف)٢ — (ق لا + د)٢ = ٠ تو
ظاہر ہی کہ حاصل ہوگی یہہ مساوات کہ دو نو طرف اوسکا جذر نکل سکتا ہی
(لا٢ + ١/٢ ا لا + ف)٢ = (ق لا + د)٢ اور جسوقت نکالین ہم جذر دونو طرف اس مساوات کا تو حاصل
ہوتی ہی یہہ مساوات لا٢ + ١/٢ ا لا + ف = ق لا + د یا یہہ مساوات
لا٢ + ١/٢ ا لا + ف = — ق لا — د مساوات اول سے حاصل ہوتا ہی یہہ لا٢ = (ق — ١/٢ ا) لا — ف + د

اور اسسے حاصل ہوتی ہین دو قیمتین اور دوسری مساوات سی حاصل ہوئی ہی یہہ مساوات

$لا^{۲} = -(ق + \frac{۱}{۲}ا)\,لا - ف - د$ اور اسسے حاصل ہونگی دو اور قیمتین ہم اب توضیح کرتے ہین

اس قاعدہ کی بوسیلہ مثال آئندہ کے فرض کرو کہ مساوات آئندہ چوتھے مرتبہ کی مساوات مفروض ہی اور

چاہتے ہین ہم دریافت کرنی چار اسکی قیمتین بوسیلہ قاعدہ مذکور کے

$لا^{۴} - ۱۰\,لا^{۳} + ۳۵\,لا^{۲} - ۵۰\,لا + ۲۴ = ۰$ اگر مطابق کرین ہم مساوات عام مذکورہ بالا کو

اس مساوات سی تو دریافت ہوگا کہ اس صورت مین ا = -۱۰ اور ب = ۳۵ اور س = -۵۰

اور ص = ۲۴ اور اسیواسطی وہ مساوات جسکی ذریعہ سی قیمت ف کی معلوم ہوجائیگی یہہ ہی

$$۸\,ف^{۳} - ۱۴۰\,ف^{۲} + ۸۰۸\,ف - ۱۵۴۰ = ۰$$ یا یہہ

$$۲\,ف^{۳} - ۳۵\,ف^{۲} + ۲۰۲\,ف - ۳۸۵ = ۰$$

اور اخیر جز اس مساوات کا قسمت ہوسکتا ہی ان اعداد پر ۱ ۵ ۷ ۱۱ وغیرہ اول عدد سے تو مطلب ہنین حاصل ہوتا ہی یعنے جو شرط اس مساوات سی تعبیر ہوتی ہی وہ شرط اس عدد سی پوری ہنین ہوتی ہی پس لو ف کو مساوی ۵ کے اور موافق اس عدد کی مساوات گذشتہ پوری ہوجائیگی یعنے ہم پائینگے یہہ

$۲۵۰ - ۸۷۵ + ۱۰۱۰ - ۳۸۵ = ۰$ پس معلوم ہوا کہ ف = ۵ اور یہہ قیمت مساوات تیسری درجہ مرقومہ بالا کی ہی بعد ازان مان لو کہ ف = ۷ اور موافق اس فرض کے مساوات گذشتہ پوری ہوتی ہی یعنے حاصل ہوتی ہی مساوات $۶۸۶ - ۱۷۱۵ + ۱۴۱۴ - ۳۸۵ = ۰$ یہان سے ثابت ہوتا ہی کہ ف = ۷ اور یہہ دوسری قیمت مساوات مذکور کی ہی اب دریافت کرنا رہا تیسری قیمت مساوات تیسری درجہ مذکورہ بالا کا واسطی اس مطلب کے قسمت کرو مساوات مذکورہ کو ۲ پر تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

$ف^{۳} - \frac{۳۵}{۲}\,ف^{۲} + ۱۰۱\,ف - \frac{۳۸۵}{۲} = ۰$ اب چونکہ سر دوسرے جز اس مساوات کا مساوی ہی حاصل جمع تمام قیمتون اس مساوات کی اور چونکہ حاصل جمع دو قیمتون اس مساوات کا ۱۲ ہی تو بالضرور باقی تیسری قیمت اس مساوات کی $\frac{۱۱}{۲}$ ہوگی پس معلوم ہوئین ہمین اب تین قیمتین تیسری درجہ کی مساوات کی لیکن یہہ بات اسجا یے واضح ہو کہ ایک ہی قیمت واسطی ہماری مطلب کے کفایت کرتی ہی کسواسطی کہ بذریعہ ہر واحد کے ان تین قیمتون سے وہی چار قیمتین مساوات مفروض کی حاصل ہوتی ہین یہہ بات اسطرح سے ثابت ہوتی ہی جسوقت ف = ۵ اوسوقت بذریعہ مساوات

$ق = \sqrt{\frac{۱}{۴}ا^{۲} + ۲\,ف - ب}$ کے حاصل ہوگی یہہ مساوات

$ق = \sqrt{۲۵ + ۱۰ - ۳۵} = ۰$ اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات

د = ‒ ۵۰ + ۵۰ ⁄ ۰ = ۰⁄۰ لیکن اس مساوات سے کچھ بات نہین معلوم ہوتی ہی پس لازم ہی

کہ رجوع کرین ہم طرف مساوات تیسری سے کے جو یہہ ہی د٘ = ف٘ − ص = ۲۵ − ۲۴ = ۱

پس دو مساواتین درجہ دوم کی جنکا اوپر ذکر ہی اس شکل کی ہوجائینگی (۱) لا٘ = ۵ لا − ۴ اور

(۲) لا٘ = ۵ لا − ۶ اونمین کی اول مساوات سے یہہ دو قیمتین حاصل ہوتی ہین

لا = ۵⁄۲ ± √(۹⁄۴) یا لا = (۵ ± ۳)⁄۲ یعنے لا = ۴ یا لا = ۱ دوسری مساوات درجہ

دوم سے یہہ دو قیمتین حاصل ہوتی ہین لا = ۵⁄۲ ± √(۱⁄۴) = (۵ ± ۱)⁄۲ یعنے لا = ۳

یا لا = ۲ اب فرض کرو کہ ف = ۷ پس ہونگی یے مساواتین ق = √(۲۵ + ۱۴ − ۳۵) = ۲

اور ∴ د = (− ۷۰ + ۵۰)⁄۴ = − ۵ پس اب حاصل ہونگی یے دو مساواتین دوسرے درجہ کی

(۱) لا٘ = ۷ لا − ۱۲ اور (۲) لا٘ = ۳ لا + ۲ اینمین کی اول مساوات سے یہہ دو قیمتین حاصل

ہوتی ہین لا = ۷⁄۲ ± √(۱⁄۴) یا لا = (۷ ± ۱)⁄۲ یعنے لا = ۴ یا لا = ۳ دوسری مساوات

سے یے دو قیمتین حاصل ہوتی ہین لا = ۳⁄۲ ± √(۱⁄۴) = (۳ ± ۱)⁄۲ اور اسیواسطی لا = ۲

اور لا = ۱ یہان سے یہہ بات ثابت ہوئی کہ چار قیمتین چوتھی درجہ کی مساوات مفروض سے موافق

اول فرض کے یعنے اس فرض کہ ف = ۵ حاصل ہوئی تھین وہی قیمتین موافق اس دوسرے فرض کے یعنے

اس فرض سے کہ ف = ۷ حاصل ہوتی ہین صورت اخیر مین فرض کرو کہ ف = ۱۱⁄۲ اور اس صورت مین

حاصل ہونگی یہہ دو مساواتین ق = √(۲۵ + ۱۱ − ۳۵) = ۱ اور د = (− ۵۵ + ۵۰)⁄۲ = − ۵⁄۲

پس دو مساواتین دوسرے درجہ کی یہہ ہونگی (۱) لا٘ = ۶ لا − ۸ اور (۲) لا٘ = ۴ لا − ۳

اول مساوات سے یہہ حاصل ہوتا ہی لا = ۳ ± √۱ یعنے لا = ۴ اور لا = ۲ اور دوسری

مساوات سی یہہ لا = ۲ ± √۱ یعنے لا = ۳ اور لا = ۱ اور یے چار قیمتین وہی ہین جو

پہلے دو فرضون سے کے موافق حاصل ہوئی تھین

سوالات واسطی مشق کے

۱ فرض کرو کہ ہی یہہ مساوات چوتھی درجہ کی لا⁴ − ۱۶ لا − ۱۲ = ۰ اور چاہتے ہم دریافت کرنے

چار قیمتین اسکی **جواب** لا = ۱ ± √−۲ اور لا = −۱ ± √۳ اور

لا = ۱ + √−۵ اور لا = −۱ − √−۵

۲ فرض کرو کہ ہی یہہ مساوات چوتھی درجہ کی لا⁴ − ۴ لا³ − ۸ لا + ۳۲ = ۰ اور چاہتے ہین ہم

دریافت کرنلیے چار قیمتین اسکی **جواب**

لا = ۴ اور لا = ۲ اور لا = −۱ + √(−۳) اور لا = −۱ − √(−۳)

۳ فرض کرو کہ ہی یہہ مساوات چوتھے مرتبہ کی لا⁴ − ۴لا³ − ۲لا² − ۴لا + ۱ = ۰ اور چاہتی ہم دریافت کرنی چار قیمتین اسکی **جواب**

لا = (−۱ + √۸ − ۳) / ۲ اور لا = (−۱ − √۸ − ۳) / ۲

اور لا = (۵ + √۲۱ √۸) / ۲ اور لا = (۵ − √۲۱ √۸) / ۲

۴ فرض کرو کہ ہی یہہ مساوات چوتھی درجہ کی لا⁴ − ۳لا² − ۴لا − ۳ = ۰

اور دریافت کیا چاہتے ہین ہم چار قیمتین مقدار مجہول لا کی **جواب**

لا = (۱ + √۸ ۱۳) / ۲ اور لا = (۱ − √۸ ۱۳) / ۲

اور لا = (−۱ + √۸ − ۳) / ۲ اور لا = (−۱ − √۸ − ۱۳) / ۲

فصل ہفتم بیچ بیان اون قواعد کی جنکی ذریعہ سی تقریبی قیمتین سب درجہ کے مساواتون کی دریافت ہو سکتین ہین

جسوقت کہ قیمتین کسی مساوات مفروض کی مقدارین غیر نزدلی نہین ہوتی ہین بلکہ نزدلی یا جسوقت کہ مساواتین مفروض جنکو حل کرنا منظور ہوتا ہی چوتھے درجہ سی بہی زیادہ کی ہوتی ہین اوس صورت مین ہم قیمتین حقیقی مقدارون مجہول کی نہین دریافت کرسکتے ہین اور فقط قیمتین تقریبی دریافت کرکی قناعت کرنی پڑتی ہی لیکن مہندسون سینے ایسی قاعدیے نکالی ہین کہ جسکے تقریبی قیمتین اتنی قریب قیمتون حقیقی سے کے ہوسکتی ہین جتنی ہم چاہین اور جبکہ بہت کم فرق ان قیمتون مین رہجاتا اوسوقت ٹہرجاتی ہین اور قیمت تقریبی پر قناعت کرتے ہین اول قاعدہ یہہ ہی بوسیلہ قیاس یا امتحان سے ایک تقریبی قیمت جو بہت قریب قیمت حقیقی سے کے نہین ہی دریافت کرو اور بعد ازان ایک ایسی مقدار مثل ط سے فرض کرو کہ اگر اوسی قیمت مذکور پر زیادہ یا منہا کرین تو مجموعہ مساوی قیمت حقیقی کا ہو وسے لیکن چونکہ وہ قیمت تقریبی جو قیاس سے مقرر کی گئی ہی ایسی فرض کی جاتی ہی کہ اوسمین اور قیمت حقیقی مین فقط بقدر کسی کسر کے فرق ہوتا ہی اور چونکہ مجذور اور مکعب وغیرہ کسور کی کم ہوتی جایا کرتی ہین تو قاعدہ یہہ ہی کہ اگر عمل مساوات مفروض کی مین ط² یا ط³ وغیرہ واقع ہوں تو انہین دور کرتے ہین اور جو قیمت بعد دور کرنی انکی کے واسطی مقدار مجہول کے دریافت ہوگی اوسی قیمت قیاسی قرار دیکر پہر ایک مقدار مثل ص سے ایسی فرض کرو کہ اگر اوسی قیمت مذکور مین سے نکالین یا اوسپر زیادہ کرین تو مجموعہ قیمت حقیقی ہوجاوی اور پہر عمل مذکورہ بالا کرین تو اس سے ایک اور قیمت قریب تر قیمت حقیقی سے کے حاصل ہوگی اور اس ترکیب سی قیمت تقریبی کو اتنا قریب تر قیمت حقیقی کے لا سکتی ہین

جتنا ہم چاہین یہہ قاعدہ مثال آئندہ سیے خوب واضح ہوجائیگا چاہیے ہین ہم دریافت کرنا جذر ۲۰ کا یعنی حل کیا چاہتے ہین ہم اس مساوات درجہ دوم کو لاˆ۲ = ۲۰ اسجای ظاہر ہی کہ لا زیادہ ہی ۴ سیے اور کم ۵ سیے پس لازم ہی کہ فرض کرین ہم لا = ۴ + ط اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات

لا۲ = ۱۶ + ۸ ط + ط۲ = ۲۰ اور اسسیے یہہ حاصل ہوتا ہی ۸ ط + ط۲ = ۴ اور چونکہ ط ایک کسر ہی تو موافق قاعدہ مرقومہ بالا کی ط۲ کو ہم دور کرسکتے ہین اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات

۸ ط = ۴ ∴ ط = ۴/۸ = ۱/۲ اور یہان سیے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ لا = ۴ + ۱/۲ = ۴ ۱/۲ اور یہہ قیمت تقریبی بہت قریب قیمت حقیقی کے ہی یعنی بہ نسبت ۴ کے قریب تر قیمت حقیقی کے ہی اب اگر ہم قیمت تقریبی کو اور قریب تر قیمت حقیقی کے لایا چاہین تو لازم ہی ہمین بطور سابق کے فرض کرنا لا = ۴ ۱/۲ + ص اور چونکہ یہہ بات تحقیق ہی کہ ص ایک چھوٹی سی کسر ہی تو دور کرسکتے ہین ہم مجذور اسکے کو پس مساوات

لا۲ = ۲۰ ۱/۴ + ۹ ص + ص۲ سیے حاصل ہوگی یہہ مساوات

لا۲ = ۲۰ ۱/۴ + ۹ ص = ۲۰ ∴ ۹ ص = − ۱/۴ اور ∴ ص = − ۱/۳۶ پس معلوم ہوا کہ

لا = ۴ ۱/۲ − ۱/۳۶ = ۴ ۱۷/۳۶ اب اگر اور زیادہ قریب تر قیمت حقیقی کے قیمت تقریبی کو لایا چاہین تو لازم ہی کہ فرض کرین ہم لا = ۴ ۱۷/۳۶ + س اور اسی سبب سے حاصل ہوگی یہہ مساوات

لا۲ = ۲۰ ۱/۱۲۹۶ + ۸ ۳۴/۳۶ س + س۲ اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

لا۲ = ۲۰ ۱/۱۲۹۶ + ۸ ۳۴/۳۶ س = ۲۰ اور یہان سیے حاصل ہوتا ہی یہہ

۸ ۳۴/۳۶ س = − ۱/۱۲۹۶ ∴ ۳۲۲ س = − ۳۶/۱۲۹۶

∴ س = − ۳۶/(۱۲۹۶ × ۳۲۲) = − ۱/۱۱۵۹۲ اسیواسطی حاصل ہوتی ہی

یہہ مساوات لا = ۴ ۱۷/۳۶ − ۱/۱۱۵۹۲ = ۴ ۵۴۷۳/۱۱۵۹۲

اور یہہ قیمت اتنی قریب قیمت حقیقی سیکے ہی کہ جو غلطی اس صورت مین رہتی ہی وہ قابل لحاظ کے نہین اب ہم لکھتے ہین ایک عام قاعدہ جسکی مثال گذشتہ ایک خاص صورت ہی واسطی اس مطلب کے فرض کرو کہ مساوات مفروض لا۲ = ط ہی اور یہہ مان لو کہ ہم جانتے ہین کہ لا زیادہ ہی ن سیے اور کم ن + ۱ سیے پس اب اگر فرض کرین ہم کہ لا = ن + ص تو بالضرور ص کم ہوگا عدد ۱ کے سیے یعنی وہ کسر ہوگا اور اسیواسطے اوسکے مجذور اور مکعب وغیرہ کو دور کرسکتے ہین کیونکہ وسیے نسبت ص کی بہت چھوٹی مقدارین ہونگی اور

اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات $\text{لا}^2 = \text{ن}^2 + 2\text{ن}\,\text{ص} = \text{ط}$ اور اسیواسطی $\text{ص} = \frac{\text{ط} - \text{ن}^2}{2\text{ن}}$

اور اسیواسطی $\text{لا} = \text{ن} + \text{ص} = \text{ن} + \frac{\text{ط} - \text{ن}^2}{2\text{ن}} = \frac{\text{ط} + \text{ن}^2}{2\text{ن}}$

اب اگر $\overline{\text{ن}}$ ہووے ایک قیمت تقریبی قریب قیمت حقیقی سے کے تو $\frac{\text{ط} + \text{ن}^2}{2\text{ن}}$ ایک قیمت تقریبی قریب تر قیمت حقیقی سے کے ہوگی اور جسوقت بجای $\overline{\text{ن}}$ کے لکہا $\frac{\text{ط} + \text{ن}^2}{2\text{ن}}$ کو تو ایک قیمت اور قریب تر قیمت حقیقی سے کے حاصل ہوگی اور اگر یہی عمل بہت کئے جائین تو قیمت تقریبی کو اتنا قریب قیمت حقیقی کے لاسکتے ہین جتنا ہم چاہین مثلاً فرض کرو کہ چاہتے ہین ہم حل کرنا اس مساوات $\text{لا}^2 = 2$ کو یعنے دریافت کیا چاہتے ہین ہم جذر $\overline{2}$ کا اب اگر بجای $\overline{\text{ن}}$ کے عدد ۱ کا فرض کرین کہ ایک قیمت تقریبی $\overline{2}$ کے جذر کی ایسی ہی کہ وہ کم ہی بہ نسبت قیمت حقیقی کے فقط بقدر ایک کسر کی تو $\frac{\text{ط} + \text{ن}^2}{2\text{ن}}$ ایک اور قیمت قریب تر قیمت حقیقی جذر مذکور سے کے ہوگی اور اگر یہی عمل متواتر کرتے جائینگے تو صورت اوسکی یہہ ہوگی

(۱) $\text{ن} = 1$ اور اس صورت مین حاصل ہوگی یہہ قیمت $\text{لا} = \frac{3}{2}$

(۲) $\text{ن} = \frac{3}{2}$ ایضاً $\text{لا} = \frac{17}{12}$

(۳) $\text{ن} = \frac{17}{12}$ ایضاً $\text{لا} = \frac{577}{408}$

اور قیمت اخیر لا کی اتنی قریب قیمت حقیقی سے کے ہی کہ اوسکے مجذور سے یعنے $\frac{332929}{166464}$ مین اور $\overline{2}$ مین فقط یہہ فرق ہی $\frac{1}{166464}$ اور یہہ ایک ایسی چہوٹی کسر ہی کہ قابل لحاظ کے نہین ہی یہی قاعدہ جاری ہوسکتا ہی جسوقت کہ مطلوب ہوویں جذر تیسری یا زیادہ مرتبہ کا نزول کسی مقدار کا مثلاً فرض کرو کہ چاہتے ہین ہم حل کرنا اس مساوات تیسری درجہ کو $\text{لا}^3 = \text{ط}$ یعنے دریافت کیا چاہتے ہین ہم قیمت $\sqrt[3]{\text{ط}}$ کی چونکہ ہم جانتے ہین کہ $\overline{\text{لا}}$ $\overline{\text{ن}}$ سے زیادہ اور $\overline{\text{ن} + 1}$ سے کم ہی تو فرض کرسکتے ہین ہم $\text{لا} = \text{ن} + \text{ص}$ اور اسجاے $\overline{\text{ص}}$ بالضرور ایک کسر ہوگی اور اسیواسطے ص^2 اور ص^3 نسبت $\overline{\text{ص}}$ سے کے بہت چہوٹی چہوٹی مقدارین ہونگی اور موافق مرقومہ بالا کے انکو دور کرسکتے ہین پس اب حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$\text{لا}^3 = \text{ن}^3 + 3\text{ن}^2\,\text{ص} = \text{ط} \therefore \text{ص} = \frac{\text{ط} - \text{ن}^3}{3\text{ن}^2}$$ اور

$$\therefore \text{لا} = \text{ن} + \text{ص} = \text{ن} + \frac{\text{ط} - \text{ن}^3}{3\text{ن}^2} = \frac{\text{ط} + 2\text{ن}^3}{3\text{ن}^2}$$

اب اگر ن ہووے قریب $\sqrt[3]{\text{ط}}$ کے تو مقدار $\frac{\text{ط} + 2\text{ن}^3}{3\text{ن}^2}$ کے قریب تر قیمت حقیقی سے کے ہوگی اور اگر اس قیمت کو بجای $\overline{\text{ن}}$ کے لکہو تو قیمت $\frac{\text{ط} + 2\text{ن}^3}{3\text{ن}^2}$ اور قریب تر قیمت حقیقی سے کے ہوگی او علی ہذا القیاس مثلاً فرض کرو کہ ہی یہہ مساوات $\text{لا}^3 = \text{ط} = 2$ یعنے چاہتے ہین ہم دریافت کرنا کعب $\overline{2}$ کا پس موافق

مرقومہ بالا کی حاصل ہوگا ہمین یہہ سلسلہ قیمتون تقریبی کا

جبوقت $\text{ن} = \text{۱}$ اوسوقت دریافت ہوگا کہ $\text{لا} = \frac{\text{۴}}{\text{۳}}$

ایضاً $\text{ن} = \frac{\text{۴}}{\text{۳}}$ ایضاً ایضاً $\text{لا} = \frac{\text{۹۱}}{\text{۷۲}}$

ایضاً $\text{ن} = \frac{\text{۹۱}}{\text{۷۲}}$ ایضاً ایضاً $\text{لا} = \frac{\text{۱۶۲۱۳۰۸۹۶}}{\text{۱۲۸۶۳۴۲۹۴}}$

یہی قاعدہ واسطی دریافت کرنے قیمتون تقریبی ہر قسم کی مساوات کی جاری ہوسکتا ہی واسطی اس بات کے ثابت کرنے کے لیتی ہین ہم ایک مساوات تیسری درجہ کی $\text{لا}^{۳} + \text{ط لا}^{۲} + \text{ص لا} + \text{س} = \text{۰}$ اور اسمین ن ہی ایک تقریبی قیمت لا کی فرض کرو کہ $\text{لا} = \text{ن} - \text{م}$ اور چونکہ اس جا م ایک کسر ہی تو موافق مرقومہ بالا کے ہم $\text{م}^{۲}$ اور $\text{م}^{۳}$ وغیرہ کو دور کرسکتے ہین اور اسیواسطی حاصل ہونگی یے مساواتین

$\text{لا}^{۲} = \text{ن}^{۲} - \text{۲ن م}$ اور $\text{لا}^{۳} = \text{ن}^{۳} - \text{۳ن}^{۲}\text{م}$ اور اسیواسطی جبوقت لکھین ہم یے قیمتین بجای $\text{لا}^{۳}$ اور $\text{لا}^{۲}$ اور لا کے مساوات مفروضین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$\text{ن}^{۳} - \text{۳ن}^{۲}\text{م} + \text{ط ن}^{۲} - \text{۲ط ن م} + \text{ص ن} - \text{ص م} + \text{س} = \text{۰}\ \text{یا}$$

$$\text{ن}^{۳} + \text{ط ن}^{۲} + \text{ص ن} + \text{س} = \text{۳ن}^{۲}\text{م} + \text{۲ط ن م} + \text{ص م} = \text{م}(\text{۳ن}^{۲} + \text{۲ط ن} + \text{ص})$$ اور

اسیواسطی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

$$\text{م} = \frac{\text{ن}^{۳} + \text{ط ن}^{۲} + \text{ص ن} + \text{س}}{\text{۳ن}^{۲} + \text{۲ط ن} + \text{ص}}$$ اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$\text{لا} = \text{ن} - \left(\frac{\text{ن}^{۳} + \text{ط ن}^{۲} + \text{ص ن} + \text{س}}{\text{۳ن}^{۲} + \text{۲ط ن} + \text{ص}}\right) = \frac{\text{۲ن}^{۳} + \text{ط ن}^{۲} - \text{س}}{\text{۳ن}^{۲} + \text{۲ط ن} + \text{ص}}$$

یہہ تقریبی قیمت لا کی بہ نسبت ن کی زیادہ قریب قیمت حقیقی اوسکی کے ہی اور اگر بجای ن کے اس قیمت کو لکھین تو ایک اور قیمت قریب تر قیمت حقیقی کے حاصل ہوگی اب ہم توضیح کرتے ہین اس قاعدہ کی بذریعہ ایک مثال کے فرض کرو کہ چاہتے ہین ہم دریافت کرنے قیمت تقریبی اس مساوات تیسری درجہ کے

$$\text{لا}^{۳} + \text{۲لا}^{۲} + \text{۳لا} - \text{۵۰} = \text{۰}$$

پس اسوقت ظاہر ہی کہ $\text{ط} = \text{۲}$ اور $\text{ص} = \text{۳}$ اور $\text{س} = -\text{۵۰}$ اب اگر ہو وے ن ایک تقریبی قیمت اس مساوات کی تو ہو وے گی قیمت آئندہ قریب تر قیمت حقیقی کے

$$\text{لا} = \frac{\text{۲ن}^{۳} + \text{۲ن}^{۲} + \text{۵۰}}{\text{۳ن}^{۲} + \text{۴ن} + \text{۳}}$$

اس مثال مین ظاہر ہی کہ ۳ ہی ایک قیمت تقریبی لا کی یعنے اس صورت مین ن = ۳ پس حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$لا = \frac{۲ن^۳ + ۲ن^۲ + ۵۰}{۳ن^۲ + ۴ن + ۳} = \frac{۱۲۲}{۴۲} = \frac{۶۱}{۲۱}$$

اور اگر ہم اس قیمت لا کو بجای ن کے لکھین تو ایک اور قیمت قریب تر قیمت حقیقی کے معلوم ہوجایگی مساوات گذشتہ فقط تیسری درجہ کی تھی لیکن یہی قاعدہ جاری ہوسکتا ہی جبکہ مساوات مفروض زیادہ درجہ کی ہو اور واسطی ثبوت اس بات کی مثال آئندہ کفایت کریگی فرض کرو کہ مساوات مفروض جسکی تقریبی قیمت دریافت کرنی منظور ہی یہہ ہی $لا^۵ = ۶ لا + ۱۰$ یا $لا^۵ - ۶ لا - ۱۰ = ۰$ اور اس مساوات مین یہہ بات ظاہر ہی کہ ۱ تو کم اور ۲ زیادہ ہی اسکی قیمت سی پس فرض کرلیتے ہین ہم کہ ن ایک قیمت تقریبی لا کی ایسی ہی کہ وہ زیادہ ۱ سے اور کم ۲ سے ہی پس موافق مرقوم الصدر کے حاصل ہوگی ہمین یے مساوات $لا = ن + م$ اور اس جا ظاہر ہی کہ م ایک کسر ہی اور $لا^۵ = ن^۵ + ۵ن^۴ م$ اور $\therefore ن^۵ + ۵ن^۴ م - ۶ن - ۶م - ۱۰ = ۰$ یا $۵ن^۴ م - ۶م = ۶ن + ۱۰ - ن^۵$ اور اسیواسطی $م = \frac{۶ن + ۱۰ - ن^۵}{۵ن^۴ - ۶}$ اور اسیواسطی قیمت آئندہ لا کی قریب قیمت حقیقی کے ہوگی $لا = ن + م = ن + \frac{۶ن + ۱۰ - ن^۵}{۵ن^۴ - ۶} = \frac{۴ن^۵ + ۱۰}{۵ن^۴ - ۶}$

اب اگر ن = ۱ تو $لا = \frac{۴ + ۱۰}{۱} = ۱۴$ اور یہہ ایک ایسی قیمت ہی جو بالکل مطلوب نہ تھی اور یہہ بات اس سبب سے واقع ہوئی کہ ۱ بہت کم بہ نسبت قیمت حقیقی کے ہی اب فرض کرو کہ ن = ۲ تو اس صورت مین $لا = \frac{۱۲۸ + ۱۰}{۷۴} = \frac{۱۳۸}{۷۴} = \frac{۶۹}{۳۷}$ اور یہہ قیمت قریب قیمت حقیقی کے ہی اور اگر اسے بجای ن کے پھر لکھین تو جو قیمت بعد ازان حاصل ہوگی وہ اور بھی قریب تر قیمت حقیقی کے ہوگی سوای قاعدہ مرقومہ بالا کی جو سب سے بہتر قاعدہ ہی اور بھی قواعد واسطے دریافت کرنی قیمتون تقریبی مساواتون کے ہین انمین سے ایک بہت اچھا قاعدہ یہہ ہی دریافت کرو ایک ایسا سلسلہ اعداد کا مثل ط ص س وغیرہ کے کہ اگر قسمت کرین ایک کو انمین سے اوسکی ماقبل پر تو خارج قسمت اوتنا ہی قریب تر قیمت حقیقی کے ہو جتنا عدد قسمت کیا ہوا دور سلسلہ مین واقع ہو فرض کرو کہ سلسلہ مطلوب یہہ ہی ف ق ک ل م وغیرہ پس اس صورت مین ظاہر ہی کہ $\frac{م}{ل}$ ایک قیمت تقریبی لا کی ہو یعنے $\frac{م}{ل} = لا$ تقریبا اور ضرور ہی کہ یہہ بھی مساوات ہو $\frac{ل}{ک} = لا^*$ اور جسوقت ضرب کرین ان دو مساواتون کو اسمین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $\frac{م}{ک} = لا^۲$ اور چونکہ $\frac{م}{ل} = لا$ تو اگر ضرب کرین اسکو ساتھ اخیر کی مساوات

* لا کے آگے لفظ تقریبا کا محذوف ہی اور یہی قیاس کرنا چاہیئے ایسی جا موقعون پر

$\frac{\text{ک}}{\text{ن}} = \text{لا}^{2}$ ہین تو حاصل ہوگا یہہ $\frac{\text{ل}}{\text{ن}} = \text{لا}^{3}$ اور چونکہ $\frac{\text{م}}{\text{ل}} = \text{لا}$ ∴ $\frac{\text{م}}{\text{ن}} = \text{لا}^{4}$ اور
علی ہذا القیاس یہان تک بیان کرنیکے ہم لیتی ہین ایک خاص مساوات جس سے ماہیت اس قاعدہ کی معلوم ہوجاوے
فرض کرو کہ ہی یہہ مساوات دوسری درجہ کی $\text{لا}^{2} = \text{لا} + 1$ اب چونکہ یہہ بات ثابت ہوچکی ہی کہ
$\frac{\text{ک}}{\text{ن}} = \text{لا}^{2}$ اور $\frac{\text{ق}}{\text{ن}} = \text{لا}$ پس جسوقت لکھین ہم یہ قیمتین بجاے لا اور لا^{2} کے تو حاصل ہوگی یہہ
مساوات $\frac{\text{ک}}{\text{ن}} = \frac{\text{ق}}{\text{ن}} + 1$ اور اسیواسطی $\text{ک} = \text{ق} + \text{ن}$ اور اسیطور سے یہہ بھی ثابت ہوسکتا ہی
کہ $\text{ک} + \text{ق} = \text{ل}$ اور $\text{ک} + \text{ل} = \text{م}$ اور علی ہذا القیاس اور یہان سے یہہ بات معلوم ہوئی کہ وہ سلسلہ
اعداد کا جسکا دریافت کرنا منظور ہی ایسا ہی کہ ہر جز اوسکا مساوی ہوتا ہی حاصل جمع اوسکی ماقبل کے دو
اجزاء کے اور یہان سے یہہ بات ظاہر ہی کہ جسوقت معلوم ہوجائین ہمین دو اول کے جز تو ساری اجزاء
سلسلہ کی معلوم ہوسکتی ہین لیکن اول دو اجزاء کا مقرر کرنا ایک امر اختیاری ہی کیونکہ گو کہ دو اجزاء بہت
دور قیمت حقیقی سے ہون لیکن عمل کرنے سے موافق اوس شرط کی جو مساوات مذکور مین ثابت ہوئی ہی ہر جز
اوس سلسلہ کا جو پیدا ہوا ہی قسمت کرنی سے ہر جز سلسلہ مذکورہ بالا کو اوسکی ماقبل پر اور ثبت کرنی سی ان خارج قسمتون
کو ایک قطار مین قریب تر قیمت حقیقی کی ہوگا فرض کرو کہ اول دو اجزاء ۰ اور ۱ ہین پس موافق اوسکے پہلی ثابت ہوا
ہی سلسلہ قیمتون لا کا یہہ ہوگا

$$\text{لا} = \frac{1}{0}\ \frac{1}{1}\ \frac{2}{1}\ \frac{3}{2}\ \frac{5}{3}\ \frac{8}{5}\ \frac{13}{8}\ \frac{21}{13}\ \frac{34}{21}\ \frac{55}{34}\ \frac{89}{55}\ \frac{144}{89}$$

اور علی ہذا القیاس مثلاً اگر فرض کرین ہم کہ $\text{لا} = \frac{21}{13}$ تو $\frac{441}{169} = \frac{21}{13} + 1 = \frac{442}{169}$
اور اسیسے ظاہر ہی کہ غلطی فقط $\frac{1}{169}$ ہی اور اگر لیوین ہم ایک اور آگے کا جز تو اس سے بھی کم غلطی وقوع مین
آئے گی اب فرض کرو کہ دریافت کرنی ہی ہمین قیمت لا کی اس مساوات مین $\text{لا}^{2} = 2\,\text{لا} + 1$ اب چونکہ ہر صورت مین
$\text{لا} = \frac{\text{ق}}{\text{ن}}$ اور $\text{لا}^{2} = \frac{\text{ک}}{\text{ن}}$ تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $\frac{\text{ک}}{\text{ن}} = \frac{2\,\text{ق}}{\text{ن}} + 1$ یا $\text{ک} = 2\,\text{ق} + \text{ن}$
اور یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ ہر جز سلسلہ قیمتون لا کا مساوی ہوتا ہی حاصل جمع دوگنی اسکی پہلے کے
جز کے کہ اوسپر زیادہ کرین اس جز کی پہلے جز کو اب اگر فرض کرین کہ اول دو جز ۰ اور ۱ ہین تو حاصل ہوگا یہہ
۰ ، ۱ ، ۲ ، ۵ ، ۱۲ ، ۲۹ ، ۷۰ ، ۱۶۹ ، ۴۰۸ وغیرہ اور اسیواسطی سلسلہ قیمتون لا کا یہہ ہوگا

$$\frac{1}{0}\ \frac{2}{1}\ \frac{5}{2}\ \frac{12}{5}\ \frac{29}{12}\ \frac{70}{29}\ \frac{169}{70}\ \frac{408}{169}$$ وغیرہ

یہ قیمتین نوبت بنوبت قریب تر قیمت لا کی جو اس مساوات سی تعبیر ہوتی ہی $\text{لا} = 1 + \sqrt{2}$ آتی جاتی
ہین اور اگر تفریق کرین ہم ہر جز اس سلسلہ مین سے عدد ایک کو تو حاصل ہوگا سلسلہ آئندہ کہ اوسمین
ہر جز تعبیر کریگا قیمت تقریبی جذر ۲ کی یعنے اسکے $\sqrt{2}$

$\frac{۱}{۰}$ ، $\frac{۱}{۱}$ ، $\frac{۳}{۲}$ ، $\frac{۷}{۵}$ ، $\frac{۱۷}{۱۲}$ ، $\frac{۴۱}{۲۹}$ ، $\frac{۹۹}{۷۰}$ ، $\frac{۲۳۹}{۱۶۹}$ وغیرہ

مثلاً $\frac{۹۹}{۷۰}$ کا مجذور $\frac{۹۸۰۱}{۴۹۰۰}$ ہی اور اسمین اور مجذور ۲ کے بیچ مین یعنے ۲ مین فقط بقدر اس کسر کی $\frac{۱}{۴۹۰۰}$ فرق ہی جسوقت کہ مساواتین مفروض زیادہ درجہ کی ہون اوسوقت بھی یہی قاعدہ جاری ہوسکتا ہی مثلاً اگر ہووے یہہ مساوات تیسری درجہ کی $لا^۳ = لا^۲ + ۲ لا + ۱$ تو لازم ہی کہ فرض کرین ہم کہ $لا = \frac{ق}{ت}$ اور $لا^۲ = \frac{ک}{ت}$ اور $لا^۳ = \frac{ل}{ت}$ اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات $ل = ک + ۲ ق + ت$ اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ جسوقت معلوم ہون ہمین تین اجزا تو اوسوقت معلوم کرسکتے ہین چوتھا جز سلسلہ مطلوب کا اور چونکہ شروع کے جزون کو ہم کچھہ ہی فرض کرسکتی ہین تو ہم بناسکتے ہین سلسلہ آئندہ ۰ ۰ ۱ ۱ ۳ ۶ ۱۳ ۲۸ ۶۰ ۱۲۹ وغیرہ

اور یہان سے حاصل ہوتا ہی یہہ سلسلہ کسور کا کہ تقریبی قیمتین لا کی ہین

$لا = \frac{۰}{۰}$ ، $\frac{۱}{۰}$ ، $\frac{۱}{۱}$ ، $\frac{۳}{۱}$ ، $\frac{۶}{۳}$ ، $\frac{۱۳}{۶}$ ، $\frac{۲۸}{۱۳}$ ، $\frac{۶۰}{۲۸}$ ، $\frac{۱۲۹}{۶۰}$ وغیرہ

چند قیمتین اول کی ان کسور کی حقیقی قیمت سے بہت ہی دور ہین لیکن اگر لکھین ہم بجای لا کی مساوات مفروض مین کسر $\frac{۶۰}{۲۸}$ یا $\frac{۱۵}{۷}$ تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

$\frac{۳۳۷۵}{۳۴۳} = \frac{۲۲۵}{۴۹} + \frac{۳۰}{۷} + ۱ = \frac{۳۳۸۸}{۳۴۳}$ اور اسمین غلطی فقط یہہ ہی $\frac{۱۳}{۳۴۳}$ اسجای یہہ بات بیان کرنی چاہیئے کہ شکل تمام مساواتون کی ایسی نہین ہوتی ہی کہ اون پر قاعدہ مذکورہ بالا جاری ہوسکے مثلاً وہ نہین جاری ہوسکتا ہی جبکہ مساوات مفروض مین دوسرا جز نہین پایا جاتا ہی فرض کرو کہ مساوات مفروض یہہ ہی $لا^۲ = ۲$ اور اسجای ظاہر ہی کہ دوسرا جز اس مساوات درجہ دوم کا اسمین نہین پایا جاتا ہی پس اب اگر فرض کرین ہم $لا = \frac{ق}{ت}$ اور $لا^۲ = \frac{ک}{ت}$ تو حاصل ہوگا ہمین یہہ $\frac{ک}{ت} = ۲$ اور $ک = ۲ ت$ یعنے $ک = ۰ \times ق + ۲ ت$ اور یہان سے پیدا ہوتا ہی یہہ سلسلہ اعداد صحیح کا ۱ ۱ ۲ ۲ ۴ ۴ ۸ ۸ ۱۶ ۱۶ ۳۲ ۳۲ وغیرہ اور اس سے کچھہ بات مفید نہین نکل سکتی ہی کیونکہ اسواسطے کہ اگر قسمت کرین ہم کسی جز اس سلسلہ کو اوسکے ماقبل پر تو خارج قسمت ہمیشہ ۱ یا ۲ ہوتا ہی یعنے حاصل ہوتی ہین ہمیشہ سے مساواتین $لا = ۱$ یا $لا = ۲$ لیکن یہہ اعتراض جو اس قاعدہ پر ہے دور ہوسکتا ہی اگر فرض کرین ہم $لا = ی - ۱$ کیونکہ اسواسطے کہ اس ترکیب سے حاصل ہوگی ہمین یہہ مساوات $ی^۲ - ۲ ی + ۱ = ۲$ اور اگر فرض کرین ہم

$\frac{ق}{ت} = ر$ اور $ر^۲ = \frac{ک}{ت}$ اوران مساواتون سیکے وسیلہ سی وہی قیمت تقریبی جذر $\sqrt[۳]{۲}$ کی حاصل ہوگی جو سیہلے دریافت کی گئی ہی اعتراض مذکورہ بالا اس مساوات $لا^۳ = ۲$ کے حل کرنی میتہ ہی ہوسکتاہی یعنے اس صورت مین بہی قاعدہ مذکورہ بالا جاری نہین ہوسکتاہی لیکن اگر بطریق سابق سیکے فرض کرین ہم $لا = ر - ۱$ توحاصل ہوگی ہمین یہہ مساوات $ر^۳ - ۳ر^۲ + ۳ر - ۱ = ۲$ یا یہہ مساوات $ر^۳ = ۳ر^۲ - ۳ر + ۳$ اورجسوقت فرض کرین ہم $\frac{ق}{ت} = ر$ اور $\frac{ک}{ت} = ر^۲$ اور $\frac{ل}{ت} = ر^۳$ توحاصل ہوگی یہہ مساوات $ل = ۳ک - ۳ق + ۳ت$ اوراس مساوات سیے یہہ بات ظاہر ہی کہ جسوقت معلوم ہون تین اجزا اوسوقت معلوم ہوسکتے ہین انکی آگے کی جز سلسلہ مطلوب مین اگر فرض کرین ہم کہ اول تین اجزا اس سلسلہ کی ۰ ۰ ۱ ہین تو پیدا ہوگا سلسلہ آئندہ

۰ ۰ ۱ ۳ ۶ ۱۲ ۲۷ ۶۳ ۱۴۴ ۳۲۴ وغیرہ اخیر جز اس سلسلہ سیے حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت $ر$ کی $ر = \frac{۳۲۴}{۱۴۴}$ اوراسیواسطی

$لا = ر - ۱ = \frac{۳۲۴}{۱۴۴} - ۱ = \frac{۱۸۰}{۱۴۴} = \frac{۵}{۴}$ یہہ قیمت قریب $\sqrt[۳]{۲}$ سیکے ہی کسواسطے کہ مکعب $\frac{۵}{۴}$ کا $\frac{۱۲۵}{۶۴}$ ہی اور $۲ = \frac{۱۲۸}{۶۴}$ پس غلطی فقط $\frac{۳}{۶۴}$ ہی

مثالین واسطی مشق کی

۱ فرض کروکہ $لا^۳ + ۲لا^۲ - ۲۳لا - ۷۰ = ۰$ کیاہی قیمت لا کی

جواب $لا = ۵٫۱۳۴۵۰$

۲ فرض کروکہ $لا^۳ - ۱۵لا^۲ + ۶۳لا - ۵۰ = ۰$ کیاہی قیمت لا کی

جواب $لا = ۱٫۰۲۸۰۳۹$

۳ فرض کروکہ $لا^۴ - ۳لا^۲ - ۷۵لا = ۱۰۰۰۰$ کیاہی قیمت لا کی

جواب ۱۰٫۲۶۱۵

۴ فرض کروکہ $لا^۵ + ۲لا^۴ + ۳لا^۳ + ۴لا^۲ + ۵لا = ۵۴۳۲۱$ کیاہی قیمت لا کی

جواب $لا = ۸٫۴۱۴۴$

۵ فرض کروکہ $۰٫۱۲۰لا^۳ + ۵۷۲لا^۲ - ۲۶۵۴ - ۹۰۸٫۵۹لا = ۲۳۸۰۷۱٫۱۵$ کیاہی قیمت لا کی

جواب $لا = ۲۳۲۵٫۲۴۳$

باب چہارم مطالب مختلفہ

فصل اول ترتیب و اجتماع کی بیان مین

۱ اگر کئی مقداریں مختلف ترتیب سی ثبت کی جاوین تو سے مختلف ترتیبیں مقداروں مذکور کی ترتیبیں کہلاتی ہین مثلاً سب مختلف ترتیبیں حروف ا اور ب اور س کی کہ دو دو اکھٹی ثبت کیجاوین سیے ہونگی اب اور ب ا اور ا س اور س ا اور ب س اور س ب

۲ اگر کئی مقداریں ہوں اور بغیر لحاظ ترتیب کے اونکی مختلف مجموعے بنا کر الگ الگ ثبت کریں تو ان مجموعوں کو اجتماع مقداروں مذکور کا کہتے ہیں مثلاً اب اور ب س اور ا س ہیں مختلف اجتماع مقداروں ا اور ب اور س کے کہ لکھی جاوین دو دو اکھٹے اور یہاں سیے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اب اور ب ا اگرچہ دو ترتیب ہیں لیکن ان دونوں کا اجتماع ایک ہی ہی

۳ اگر ن کتنی تعداد میں مقداریں ہوں اور اگر اونمیں سیے دو دو کو اکھٹا کریں تو تعداد ترتیبونکی تعبیر کی جائیگی ن (ن — ۱) سیے اور اگر تین تین اکھٹے لکھی جاوین تو تعداد مختلف ترتیبوں کی ہوگی یہہ ن (ن — ۱) (ن — ۲) دلیل اسکی یہہ ہی اگر ن کتنی شی تعداد مین مثلاً اب س د وغیرہ ہوں اور اگر ا کو پہلے ہر ایک کی باقی حروف مین سیے ثبت کرین تو ظاہر ہی کہ (ن — ۱) کتنی مختلف ترتیبیں پیدا ہونگی لیکن اگر ب کو پہلے سب حروف کی لکھین تو بھی اتنی ہین یعنے (ن — ۱) کتنی مختلف ترتیبیں حروف مذکور کی پیدا ہونگی اور علی ہذا القیاس پس کل تعداد ترتیبونکی تعبیر کیجائیگی ساتھہ ن (ن — ۱) سکے اور ترتیبیں مذکور اس شکل کی ہونگی اب ب ا ا س س ا وغیرہ اگر (ن — ۱) کتنی شیے تعداد میں ہوں اور اونکو دو دو لیکر اکھٹا کرین تو موافق گذشتہ کے تعداد مختلف ترتیبوں کے یہہ (ن — ۱) (ن — ۲) ہوگی اور اگر ان سب ترتیبوں سیے پہلے ا کو لگاوین تو ظاہر ہی کہ تین تین حروف کی ترتیبیں تعداد مین (ن — ۱) (ن — ۲) کتنی ہونگی اور ان سب مین ا اول ہوگا لیکن اتنی ہی کو سے ترتیبیں ہونگی جنمیں ب اول ہوگی اور یہی قیاس کرنا چاہیئے واسطی باقی حروف کی پس کل تعداد ترتیبوں حروف مذکور سیے کہ تین تین ثبت کی جاوین یہہ ہوگی ن (ن — ۱) (ن — ۲)

۴ اگر جاری کرین ترکیب مرقومہ بالا کو تو ظاہر ہو جائیگا کہ اگر ن کتنی شیے مین سیے ر کتنی کو اکھٹا الگ الگ لکھین تو کل تعداد ترتیبوں کے

ن (ن — ۱) (ن — ۲) (ن — ۳) ... (ن — ر + ۱) ہوگی

۵ اگر ن سے کتنے حروف تعداد مین ہون اور انکو دو دو کو الگ الگ لکہین تو تعداد اجتماعون کی $ن \frac{ن-۱}{۲}$ ہوگی اور اگر تین تین الگ الگ لکہین تو تعداد مذکور $ن \frac{(ن-۱)(ن-۲)}{۳}$ ہوگی دلیل اسکی یہہ ہی صورت اول مین تعداد ترتیبون کے ن (ن ‒ ۱) ہوگی لیکن ہر ایک اجتماع مثلاً اب مین ہوتے ہین دو ترتیبین مثلاً اب اور ب ا پس معلوم ہوا کہ تعداد ترتیبون کی دو چند ہوتی ہی تعداد اجتماعون کی سے یہہ $ن \frac{ن-۱}{۲}$ ہوگی اب ظاہر ہی کہ اگر ن کتنی شئے ہون اور انمین سے تین تین الگ الگ لکہین تو تعداد ترتیبون کی ن (ن ‒ ۱) (ن ‒ ۲) ہوگی اور یہہ بہی ظاہر ہی کہ ہر اجتماع تین چیزون کی مین ۳ × ۲ × ۱ ترتیبین ہوتی ہین تو معلوم ہوا کہ ترتیبین بہ نسبت اجتماعون کے ۳ × ۲ × ۱ دفعہ زیادہ ہین اور اسیواسطے تعداد کل اجتماعون کے یہہ ہوگی

$$ن \frac{(ن-۱)(ن-۲)}{۱ \times ۲ \times ۳}$$

۶ اسیطور سی یہہ بہی ظاہر ہوتا ہی کہ اگر ن کتنی شئے ہون اور انمین سے ر کتنی الگ الگ لکہی جاوین تو کل تعداد اجتماعون کی یہہ ہوگی $\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\ldots\ldots(ن-ر+۱)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots\ldots ر}$

مثال ۱ بتاؤ کتنی ہین ترتیبین جسمین حروف لفظ حمد کی دو دو لکہی جا سکتی ہین یہان ظاہر ہی کہ ن = ۳ اور ر = ۲ پس تعداد ترتیبونکی ہوگی = ۳ × (۳ ‒ ۱) = ۳ × ۲ = ۶

مثال ۲ ایک شخص کے پاس سات رنگ ہین اور اوسنے دو دو رنگ ملاکر اور رنگ بنائے بتاؤ کل تعداد رنگون کی کیا ہی یہان ظاہر ہی کہ ن = ۷ اور ر = ۲

اور ∴ تعداد مطلوب = $\frac{۷(۷-۱)}{۲} = \frac{۷ \times ۶}{۲} = ۷ \times ۳ = ۲۱$

۷ اگر ن کتنی چیزین ہون اور انسی ر کتنی الگ الگ لکہی جاوین تو تعداد اجتماعون کے اوسیقدر ہوگی جسقدر (ن ‒ ر) الگ الگ سے لکہنے سی ہوتی ہی اسواسطے کہ جسوقت ر کتنی الگ الگ لکہی جاوین تو موافق (۶) کے تعداد اجتماعون کے یہہ ہوتی ہی $\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\ldots\ldots(ن-ر+۱)}{(۱ \times ۲ \times ۳ \ldots\ldots ر)}$

اب اگر اس صورت مین بجائے ر کی ن ‒ ر لکہین تو یہہ حاصل ہوتا ہی $\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\ldots(ر+۱)}{۱ \times ۲ \times ۳ \ldots\ldots (ن-ر)}$

اور ظاہر ہی کہ جسوقت ر کم ہووے ن ‒ ر سے اوسوقت صورت گذشتہ اسطرح کی ہو جاوے گی

$$\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)\cdots(\text{ن}-\text{ر}+1)(\text{ن}-\text{ر})\cdots(\text{ر}+1)}{1\times2\times3\cdots\text{ر}(\text{ر}+1)\cdots(\text{ن}-\text{ر})}\quad(1)$$

کیونکہ اجزاء ضربی شمارکنندہ مین کہتی جاتے ہین اور نسبنما مین کم ہوجاتی ہین اسیطرح سے اگر ر زیادہ ہو ن - ر سے تو صورت گذشتہ اس شکل کی ہوجاویگی

$$\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)\cdots(\text{ر}+1)\text{ر}(\text{ر}-1)\cdots(\text{ن}-\text{ر}+1)}{1\times2\cdots(\text{ن}-\text{ر})(\text{ن}-\text{ر}+1)\cdots(\text{ر}-1)\text{ر}}\quad\cdots\cdots(2)$$

اور اختصار کرنی سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ صورت (۱) اور (۲) مساوی ہین اس تعداد کے

$$\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\cdots\cdots(\text{ن}-\text{ر}+1)}{1\times2\times3}$$

اور یہی مطلب تہا

۸ اگر ن کتنی چیزین ہون اور ان مین کی ایک چیز کئی کئی بار شمار کی گئی ہو اور ن ہی کتنے کو اکہٹا کر کر الگ الگ لکہین تو بتاؤ کہ تعداد ترتیبون کی کیا ہوگی فرض کرو کہ چیزین مذکور آ ب ج وغیرہ ہین اور انہین سے آ ف دفعہ شمار کیا جاتا ہی اور ب ق دفعہ شمار کیا جاتا ہی اور ج ک دفعہ اور علی ہذا القیاس اور فرض کرو کہ ط تعبیر کرتا ہی کل تعداد ترتیبون مطلوب کو اب اگر ہم یہہ بات فرض کرین کہ آ جو ف دفعہ شمار ہوئے تہے سب کے سب مختلف حروف ہوگئی تو ظاہر ہی کہ فقط انہین حروف سے ترتیبین جو کل تعداد یعنے ف کے موافق بجائے اس صورت سے تعبیر ہونگی ۱×۲×۳...ف سے اور اسیواسطی لازم آتا ہی کہ ط ترتیبون مطلوب مین سے ہر واحد مین موافق فرض مذکور کے ۱×۲×۳... ترتیبین پیدا ہونگی اور اسی سبب سے تعداد ط ترتیبون مطلوب کی زیادہ ہوکر اس صورت سے تعبیر ہوگے ط (۱×۲×۳...ف) اب اگر ہم یہہ فرض کرین کہ ب سے جو ق دفعہ شمار کیا جاتا تہا مختلف حروف ہوگئے تو موافق بیان بالا کی تعداد انہین حروف کی ترتیبون کے جو کل ق کو اکہٹا کر کر کیجاوین تعبیر ہوینگے ۱×۲×۳...ق سے اور اسی سبب سے تعداد ط ترتیبون کی اس صورت مین زیادہ ہوکر اس صورت سے تعبیر ہوگی ط (۱×۲×۳...ف) (۱×۲×۳...ق) اب اگر اسیطرح سب حروف کو جو کئی کئی بار شمار کئی جاتے تہے مختلف حروف فرض کرلین تو تعداد ترتیبون ط کی زیادہ ہوکر اس صورت سی تعبیر ہوگی ط (۱×۲×۳...ف) (۱×۲×۳...ق) (۱×۲×۳...ک) وغیرہ لیکن یہہ بات ظاہر ہی کہ جسوقت ن کتنی چیزین مختلف ہون تعداد ہم کتنے کو اکہٹا کر کر الگ الگ لکہین تو تعداد ترتیبون کی یہہ ہوتی ہی ۱×۲×۳......ن اسیواسطی

۱ × ۲ × ۳ ۰۰۰۰ ن = ط × ۱ × ۲ × ۳ ۰۰۰ ف × ۱ × ۲ × ۳ ۰۰۰ ق × ۱ × ۲ × ۳ ۰۰۰ ک وغیرہ

∴ ط = (۱ × ۲ × ۳ ۰۰۰۰ ن) ÷ (۱ × ۲ × ۳ ۰۰۰ ف × ۱ × ۲ × ۳ ۰۰۰ ق × ۱ × ۲ × ۳ ۰۰۰ ک وغیرہ)

اگر لن سے ۱ × ۲ × ۳ ۰۰۰ × ن کو تعبیر کرین اور اسیطور سے ۱ × ۲ × ۳ ۰۰۰ ف وغیرہ کو تعبیر کرین فن اور ق ن وغیرہ سے تو ط = لن ÷ (فن × قن × کن وغیرہ)

مثال فرض کرو کہ تین گھوڑے اور ۴ ہاتی اور ۵ اونٹ ہین پس کل تعداد ۱۲ ہی اب اگر ۱۲ جانورون کو اکھٹا کر کر الگ الگ کھڑا کرین تو بتاو کتنی ترتیبین ہوگی اس صورت مین ظاہر ہی کہ ن = ۱۲ اور ف = ۳ اور ق = ۴ اور ک = ۵

∴ ط = (۱ × ۲ × ۳ × ۴ × ۵ × ۶ × ۷ × ۸ × ۹ × ۱۰ × ۱۱ × ۱۲) ÷ (۱ × ۲ × ۳ × ۱ × ۲ × ۳ × ۴ × ۱ × ۲ × ۳ × ۴ × ۵)

= (۶ × ۷ × ۸ × ۹ × ۱۰ × ۱۱ × ۱۲) ÷ (۱ × ۲ × ۳ × ۱ × ۲ × ۳ × ۴) = ۷ × ۴ × ۹ × ۱۰ × ۱۱ = ۲۷۷۲۰

= تعداد ترتیبون مطلوب کے

۹ فرض کرو کہ نَ اقسام کی چیزین ہین اور تعداد ان اقسام مختلفہ کی علیحدہ علیحدہ فَ اور قَ اور کَ وغیرہ سے تعبیر ہوتی ہین اور ہم ان اشیا مین سے ایسی مجموعی بنانا چاہتے ہین کہ ہر مجموعہ مین ایک ایک شے ہر قسم مین سے ہو تو اب دریافت کیا چاہتے ہین کہ ان مجمون یا اجتماعون کی کیا تعداد ہوگی

۱ اول فرض کرو کہ فقط دو قسم کی اشیا ہین اور انکی تعداد علیحدہ علیحدہ فَ اور قَ سے تعبیر ہوتی ہین تو اس صورت مین بہت ظاہر ہی کہ اگر ایک ایک شے ہر قسم مین سے لیکر مختلف مجموعی بنا دین تو تعداد ان اجتماعون کے مساوی حاصل ضرب فَ اور قَ کی یعنے فَ قَ کی ہوگی

۲ دوم فرض کرو کہ سوای دو اقسام مذکورہ بالا کی ایک اور تیسری قسم کی اشیا موجود ہین اور اس قسم مین تعداد اشیا کی کَ ہی پس ظاہر ہی کہ جب ہر واحد کو اینمین سے پہلے اجتماعون کے ساتھ لگا دین تو کل تعداد اجتماعون کی ف ق ک ہوگی اور اینمین ایک ایک شی تینون ان قسمون مین سی ہوگی

حکم اگر ہر قسم مین تعداد اشیا کی مساوی ہو یعنے ف = ق = ک = وغیرہ اور تعداد اقسام کی نَ ہو تو کل تعداد اجتماعون کی فَنَ ہوگی

مثال سات مرد اور پانچ عورت اور تین لڑکے ہین اگر اینمین سے ایک ایک مرد اور ایک ایک عورت

اور ایک ایک لڑکے کو جمع کر کر الگ الگ بٹھلادین تو تعداد اجتماعون کی کیا ہوگی اِس صورت مین ظاہر ہی کہ
ف = ٧ اور ق = ٥ اور ک = ٣ ∴ تعداد مطلوب = ٧ × ٥ × ٣ = ١٠٥

١٠ دو قسم کی چیزین ہین اور ہر قسم مین تعداد چیزون کی علیحدہ علیحدہ ف اور ق ہین اور دونون قسم کی چیزون سے ہم ایسی مجموعے بنائین کہ اون ہر واحد مین م تو ایک قسم کی چیزون سے اور ن دوسری قسم کی چیزون سے پائی جاوین تو بتاؤ کہ تعداد اون مجموعون یا اجتماعون کی کیا ہوگی

اِس جگہ ظاہر ہی کہ اگر اول قسم مین سے م کتنی چیزون کے مختلف مجموعی بناوین تو تعداد اجتماعون سے

$$\frac{ف\,(ف-١)\,\ldots\,(ف-م+١)}{١\times٢\times٣\times٤\,\ldots\,م}$$

ہوگی اور دوسری قسم کی چیزون سے مجموعی کہ ن ن کتنی علیحدہ علیحدہ لکھین جاوین یہہ ہوگی

$$\frac{ق\,(ق-١)\,\ldots\,(ق-ن+١)}{١\times٢\times٣\times\ldots\,ن}$$

اب ظاہر ہی کہ اگر ہم ایسی مجموعی دریافت کیا چاہین کہ ہر مجموعہ پہلی قسم مین شامل ہو جاوی ہر مجموعہ دوسری قسم کا تو ضرور ہی کہ تعداد ایسی اجتماعون کی مساوی حاصل ضرب دو صورتون مذکورہ کی ہوگی یعنے یہہ

$$\frac{ف\,(ف-١)\,\ldots\,(ف-م+١)}{١\times٢\times٣\times\ldots\,م}\times\frac{ق\,(ق-١)\,\ldots\,(ق-ن+١)}{١\times٢\times٣\times\ldots\,ن}$$

اور اسی قیاس سے یہہ بہی معلوم ہوتا ہی کہ اگر بجائے دو قسم کے زیادہ اقسام اشیاء کی ہون تو تعداد کل اجتماعون کی مساوی حاصل ضرب تعداد اجتماعون سب اقسام کی ہوگی

مثال اگر دس گہوڑے ہون اور تین ہاتی ہون اور چار چار گہوڑون اور دو دو ہاتیون کو علیحدہ علیحدہ اکہٹا کرین تو ان مجموعون کی تعداد کیا ہوگی اِس جای ظاہر ہی کہ ف = ١٠ اور ق = ٣ اور م = ٤ اور ن = ٢ ∴ تعداد مطلوب

$$=\frac{١٠\times٩\times٨\times٧}{١\times٢\times٣\times٤}\times\frac{٣\times٢}{١\times٢}=١٠\times٩\times٧=٦٣٠$$

فصل دوسری ثبوت ضابطہ نیوٹن صاحب کا

چند باتین ایسی ہین کہ اون پر ثبوت ضابطہ کا موقوف ہی اسواسطی اول اونکا لکھنا ضروری معلوم ہوتا ہی قاعدہ تقسیم کے بیان مین یہہ بات لکہی گئی ہی کہ مقسوم اور مقسوم علیہ مین جو مقدارین متماثل ایسی ہون کہ اونمین نشان قوت پایا جاوے تو خارج قسمت کا نشان قوت وہ مقدار ہوتی ہی جو مقسوم کے نشان قوت مین سے مقسوم علیہ کی نشان قوت کو تفریق کرتی سی باقی رہتی ہی پس $\frac{ح^{٣}}{ح^{٢}}=ح^{٣-٢}=ح$ اور $\frac{ح^{٢}}{ح^{٣}}=ح^{٢-٣}=ح^{-١}$

یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ نشان قوت منفی بھی ہوسکتا ہی اور بیان بالا کے موافق یہہ چند مثالین تقسیم کی مشق کے واسطی لکھی جاتی ہین

١ $ا^{-١} = \frac{١}{ا}$ اسواسطی کہ $\frac{١}{ا} = \frac{ا}{ا^{٢}} = ا^{١-٢} = ا^{-١}$

٢ $ا^{٠} = ١$ اسواسطی کہ $١ = \frac{ا}{ا} = ا^{١-١} = ا^{٠}$

٣ $ا^{-٩} = \frac{١}{ا^{٩}}$ اسواسطی کہ $\frac{١}{ا^{٩}} = \frac{ا}{ا^{١٠}} = ا^{١-١٠} = ا^{-٩}$

٤ $ا^{-ط} = \frac{١}{ا^{ط}}$ اسواسطی کہ $\frac{١}{ا^{ط}} = \frac{ا}{ا^{ط+١}} = ا^{١-ط-١} = ا^{-ط}$

٥ $(١+ب)^{-ط} = \frac{١}{(١+ب)^{ط}}$

٦ $\frac{١}{ا^{-ط}} = ا^{ط}$ اسواسطی کہ $\frac{١}{ا^{-ط}} = \frac{١}{\frac{١}{ا^{ط}}} = ١ \div \frac{١}{ا^{ط}} = ١ \times \frac{ا^{ط}}{١} = ا^{ط}$

٧ $\frac{ج}{ا^{ط}} = ج\,ا^{-ط}$ کیونکہ $\frac{ج}{ا^{ط}} = ج \times \frac{١}{ا^{ط}} = ج\,ا^{-ط}$

٨ $\frac{ن}{(١+ب)^{ر}} = ن\,(١+ب)^{-ر}$

اگر ایک سلسلہ مثلاً $ا + ب\,لا + س\,لا^{٢} + ص\,لا^{٣} + ع\,لا^{٤} + ط\,لا^{٥} = ٠$ ہو (١)
اور اُسکے اجزا ب س ص وغیرہ تو مقدار منقطع فرض کیجاوین اور لا اور اوسکی قوتین مقدارین غیر منقطع فرض کیجاوین تو کہتے ہین ہم کہ ا اور ب س وغیرہ کہ سر مین قوتون لا غیر منقطع کی سب ہر واحد = ٠ دلیل اسکی یہہ ہی چونکہ لا ایک مقدار غیر منقطع ہی تو فرض کرسکتے ہین ہم اوسی = ٠ تو اس حالت مین
$ا + ب\,لا + س\,لا^{٢} + ص\,لا^{٣} + ع\,لا^{٤} + ط\,لا^{٥} = ا + ٠ + ٠ + ٠ + ٠ + ٠ = ٠$
یعنے ا = ٠ اور اگر تقسیم کرین ہم مساوات (١) کو لا پر تو خارج قسمت یہہ ہوتا ہی
$ب + س\,لا + ص\,لا^{٢} + ع\,لا^{٣} + ط\,لا^{٤} = ٠$ اب اگر فرض کرین ہم لا = ٠ تو دلیل مرقومہ بالا سے ب بھی = ٠ دریافت ہوگا اور اسی طرح سے ثابت ہوسکتا ہی کہ س ص ط ع وغیرہ سب = ٠ کے ہین اگر $ا\,لا + ب\,لا^{٢} + س\,لا^{٣} = ص\,لا + ط\,لا^{٢} + ع\,لا^{٣}$ تو ا = ص اور ب = ط اور س = ع کیونکہ ظاہر ہی کہ اگر بائین طرف مساوات کو دہنی طرف علامات بدل کے لیے آوین تو
$(ا - ص)\,لا + (ب - ط)\,لا^{٢} +$ وغیرہ $= ٠$ اور بموجب مرقومہ بالا کے $ا - ص = ٠ \therefore ا = ص$

اور اسیطرح ب = لا اور س = ع چاہتے ہیں دریافت کرنا (ا + لا) کا صعود بانم م کی مقدار کی ایک سلسلہ میں خواہ م ایک مقدار صحیح ہو خواہ کسر اور خواہ مثبت ہو خواہ منفی

چونکہ (ا + لا)^م = {ا (ا + لا/ا)}^م = ا^م (ا + لا/ا)^م

اگر (ا + ی)^م = ا + ب ی + س ی^۲ + ص ی^۳ + ع ی^۴ + وغیرہ .

تو (ا + لا)^م = ا^م (ا + لا/ا)^م

= ا^م (ا + ب لا/ا + س لا^۲/ا^۲ + ص لا^۳/ا^۳ + وغیرہ)

= ا^م + ب ا^(م-۱) لا + س ا^(م-۲) لا^۲ + ص ا^(م-۳) لا^۳ + وغیرہ

صورت اول میں فرض کرو کہ م ایک مقدار مثبت اور صحیح ہے

تو (ا + ی)^م = (ا + ی) × (ا + ی) × (ا + ی) .... م تک بے اور ضرب دینے سے چند ان مساوی مضروب اور مضروب فیہ کی معلوم ہو جائیگا ہمیں کہ پہلے دو رقمیں حاصل ضرب سلسلہ میں ا + م ی ہیں اور باقی کی رقمیں اس شکل کی ہیں یعنے س ی^۲ + ص ی^۳ + ع ی^۴ + وغیرہ اور یہاں س ص ع وغیرہ سر غیر معلوم ہیں اور کچھہ علاوہ نہیں ر کہتے ہیں ی سے یعنے اگر ی زیادہ یا کم ہو تو اونکی قیمت میں نہیں فرق اسکتا ہے اور اسیواسطے معلوم ہوا کہ ب = م ہے صورت دوسرے اگر فرض کریں ہم م کو ایک مقدار منفی لیکن صحیح تو فرض کرو م = − ن تو

(ا + ی)^م = (ا + ی)^(−ن) = ا / (ا + ی)^ن = ا / (ا + ن ی + وغیرہ) = ا − ن ی + وغیرہ *

∴ ب = −ن = م صورت تیسری اگر فرض کریں ہم م کو ایک مقدار مثبت لیکن کسر تو فرض کرو م = ر/د تب

(ا + ی)^م = (ا + ی)^(ر/د) = ا + ب ی + س ی^۲ + ص ی^۳ + وغیرہ

∴ (ا + ی)^ر = (ا + ب ی + س ی^۲ + ص ی^۳ + وغیرہ)^د

∴ ا + ر ی + وغیرہ = {ا + (ب + س ی + ص ی^۲ + وغیرہ) ی}^د

= ا + د (ب + س ی + ص ی^۲ + وغیرہ) ی + وغیرہ

* واضح ہو کہ (ا + ب ی + س ی^۲ + ص ی^۳ + وغیرہ) میں کہ مساوی (ا + ی)^(ر/د) کی ہے کسی نشان قوت ی کا کسر نہیں ہوسکتا اسواسطے کہ اگر ایسا ہو تو مساوی کی (ا + ی)^(ر/د) کو اوسی د قوت کو صعود کریں جس قوت کا وہ جذر ہے تو اس حاصل صعود میں بھی نشان قوت ی کا کسر ہوگا جو برخلاف فرض کی ہے کیونکہ (ا + ی)^ر میں ی کی قوت کا نشان آتا ہے جو ایک مقدار صحیح ہے

اب بموجب (۲) دعوی کے $ر ء = د ب ء$ ∴ $ب = \frac{ر}{ء} =$ م صورت جو ہتی اگر فرض کرین حسم

م کو ایک منفی کسر تو فرض کرو $م = -\frac{ر}{ء}$

تب $(۱+ء)^{م} = (۱+ء)^{-\frac{ر}{ء}} = \frac{۱}{(۱+ء)^{\frac{ر}{ء}}} = \frac{۱}{۱+\frac{ر}{ء}ء+\text{وغیرہ}} = ۱-\frac{ر}{ء}ء+$ وغیرہ

∴ $ب = -\frac{ر}{ء} = م$ پس معلوم ہوا کہ تمام صورتونین $ب = م$ اور اسی سبب سے

$(۱+لا)^{م} = ۱^{م} + م\,۱^{م-۱}لا + س\,۱^{م-۲}لا^{۲} + ص\,۱^{م-۳}لا^{۳} +$ وغیرہ ترکیب دریافت کرنے س ص وغیرہ

کی یہہ ہی ظاہر ہی کہ $(۱+لا+ہ)^{م} = \{(۱+لا)+ہ\}^{م} = \{۱+(لا+ہ)\}^{م}$

اب خواہ اول خواہ دویم مساوی نہ $(۱+لا+ہ)^{م}$ کا صعود لیا جاوے تو حاصل دونو صورتونین باہم مساوی

ہوگا اول مساوی لی سی یہہ حاصل ہوتا ہی $(۱+لا+ہ)^{م} = \{(۱+لا)+ہ\}^{م} =$

$(۱+لا)^{م} + م(۱+لا)^{م-۱}ہ + س(۱+لا)^{م-۲}ہ^{۲} + ص(۱+لا)^{م-۳}ہ^{۳} +$ وغیرہ

$= ۱^{م} + م\,۱^{م-۱}لا + س\,۱^{م-۲}لا^{۲} + ص\,۱^{م-۳}لا^{۳} + ع\,۱^{م-۴}لا^{۴} +$ وغیرہ

$+ م\{۱^{م-۱} + (م-۱)۱^{م-۲}لا + سً\,۱^{م-۳}لا^{۲} + \text{وغیرہ}\}ہ$

$+ س\{۱^{م-۲} + (م-۲)۱^{م-۳}لا + \text{وغیرہ}\}ہ^{۲}$

$+ ص(۱^{م-۳} + (م-۳)۱^{م-۴}لا + \text{وغیرہ})ہ^{۳}$

+ وغیرہ = وغیرہ

$۱^{م} + م\,۱^{م-۱}لا + س\,۱^{م-۲}لا^{۲} + ص\,۱^{م-۳}لا^{۳} + ع\,۱^{م-۴}لا^{۴} +$ وغیرہ

$+ م\,۱^{م-۱}ہ + م(م-۱)۱^{م-۲}لا\,ہ + سً\,م\,۱^{م-۳}لا^{۲}ہ +$ وغیرہ

$+ س\,۱^{م-۲}ہ^{۲} \ldots\ldots + ص\,۱^{م-۳}ہ^{۳} +$ وغیرہ

دویم مساوی لی سی یہہ حاصل ہوتا ہی $(۱+لا+ہ)^{م} = \{۱+(لا+ہ)\}^{م}$

$= ۱^{م} + م\,۱^{م-۱}(لا+ہ) + س\,۱^{م-۲}(لا+ہ)^{۲} + ص\,۱^{م-۳}(لا+ہ)^{۳} +$ وغیرہ

$= ۱^{م} + م\,۱^{م-۱}لا + س\,۱^{م-۲}لا^{۲} + ص\,۱^{م-۳}لا^{۳} +$ وغیرہ

$+ م\,۱^{م-۱}ہ + ۲س\,۱^{م-۲}لا\,ہ + ۳ص\,۱^{م-۳}لا^{۲}ہ +$ وغیرہ

$+ س\,۱^{م-۲}ہ^{۲} + ۳ص\,۱^{م-۳}لا\,ہ^{۲} +$ وغیرہ

$+ ص\,۱^{م-۳}ہ^{۳} +$ وغیرہ

ان دونوں سلسلوں مین سر قوای متماثلہ لا اور ہ کے آپسمین مساوی ہین بموجب مرقومہ بالا کے اور اسیواسطے

۲ س = م (م − ۱) ∴ س = ... م(م − ۱) / ۲

۳ ص = س (م − ۲) = م(م − ۱)(م − ۲) / ۲ ∴ ص = م(م − ۱)(م − ۲) / (۲ × ۳)

اور ۴ ع = ص (م − ۳) اور ع = ص(م − ۳) / ۴ = م(م − ۱)(م − ۲)(م − ۳) / (۲ × ۳ × ۴)

وغیرہ = وغیرہ = وغیرہ اب حاصل ہوتا ہے

(۱ + لا)^م = ۱^م + م ۱^(م − ۱) لا + [م(م − ۱) / (۱ × ۲)] ۱^(م − ۲) لا^۲ + [م(م − ۱)(م − ۲) / (۱ × ۲ × ۳)] ۱^(م − ۳) لا^۳

+ [م(م − ۱)(م − ۲)(م − ۳) / (۱ × ۲ × ۳ × ۴)] ۱^(م − ۴) لا^۴ + وغیرہ

یہی ہی ضابطہ نیوٹن صاحب کا اور اس یہہ بہی حاصل ہوتا ہے (۱ − لا)^م =

۱^م − م ۱^(م − ۱) لا + [م(م − ۱) / (۱ × ۲)] ۱^(م − ۲) لا^۲ − [م(م − ۱)(م − ۲) / (۱ × ۲ × ۳)] ۱^(م − ۳) لا^۳ وغیرہ اب بیان کرتے

ہین ہم ترکیبین واسطے نکالنے کے جذر مالی اور جذر کعبی وغیرہ یعنے نزول کسی مرتبہ کا بیشمار فائدون مین سے
جو ضابطہ نیوٹن صاحب کے سے حاصل ہوئے ہین ایک فائدہ عظیم یہہ ہے کہ نکال سکتے ہین ہم کسی عدد کا
نزول کسی مرتبہ کا واضح ہو کر بتعبیر کر سکتے ہین ہم ہر عدد کو جو زیادہ ہے آ سے ساتھ اس ۱ + ط کے
اور ہر عدد کو جو کم ہے آ سے ساتھ اس ۱ − ط کے اور اس جائے فرض کر سکتے ہین ط کو واسطے ایک عدد
صحیح یا کسر ضابطہ نیوٹن صاحب کے سے واضح ہے کہ

(۱ + ط)^م = ۱ + م ط + [م(م − ۱) / (۱ × ۲)] ط^۲ + [م(م − ۱)(م − ۲) / (۱ × ۲ × ۳)] ط^۳

+ [م(م − ۱)(م − ۲)(م − ۳) / (۱ × ۲ × ۳ × ۴)] ط^۴ + [م(م − ۱)(م − ۲)(م − ۳)(م − ۴) / (۱ × ۲ × ۳ × ۴ × ۵)] ط^۵ + وغیرہ

اب فرض کرو م = ۱/۲ یعنے نکالتے ہین ہم جذر (۱ + ط) کا تو

$$(1+\text{ط})^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\text{ط}}{2} - \frac{\text{ط}^2}{8} + \frac{\text{ط}^3}{16} - \frac{5\text{ط}^4}{128} + \frac{7\text{ط}^5}{256} - \text{وغیرہ}$$

اسیطرح سی اگر فرض کرین ہم م $= \frac{1}{3}$ تو معلوم ہوجائیگا ہمین کعب $(1+\text{ط})$ کا اور اگر م $= \frac{1}{4}$ تو نیز مرتبہ کا نزولی $(1+\text{ط})$ کا معلوم ہوجائیگا چاہتے ہین ہم دریافت کرنا کعب ا۳ کا بوسیلہ ضابطہ نیوٹن صاحب کے ظاہر ہی کہ

$$\sqrt[3]{31} = \sqrt[3]{27+4} = \sqrt[3]{27}\left(1+\frac{4}{27}\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$3\left(1 + \frac{1}{3}\times\frac{4}{27} - \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{16}{729} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{5}{9}\times\frac{64}{19683} - \text{وغیرہ}\right)$$

$$= 3 + \frac{4}{27} - \frac{16}{2187} + \frac{320}{531441} - \frac{2560}{43046721}\ \text{وغیرہ}$$

لیکن

$$\left.\begin{aligned} 3 &= 3.000000 \\ \frac{4}{27} &= 0.14815 \\ \frac{320}{531441} &= 0.00060 \end{aligned}\right\} = 3.14875$$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{16}{2187} &= -0.00731 \\ -\frac{2560}{43046721} &= -0.00006 \end{aligned}\right\} = -0.00737$$

پس معلوم ہوا کہ کعب ا۳ کا یعنی $\sqrt[3]{31} = 3.14138$

ایک اور طریق ثابت کرنی ضابطہ نیوٹن صاحب کا

واضح ہو کہ اس طریق مین تین صورتین مذکورہ بالا ایکہی صورت عام سی نکل آتی ہین اور اسیواسطے ہم اس صورت عام کو دریافت کرتے ہین

فرض کرو کہ $\text{ط}_2 = \frac{\text{ط}(\text{ط}-1)}{2\times1}$ $\therefore 2\text{ط}_2 = (\text{ط}-1)\text{ط}$

$\text{ط}_3 = \frac{\text{ط}(\text{ط}-1)(\text{ط}-2)}{3\times2\times1}$ $\therefore 3\text{ط}_3 = (\text{ط}-2)\text{ط}_2$ اور علی ہذا القیاس

$\text{ط}_\text{ح} = \frac{\text{ط}(\text{ط}-1)\cdots(\text{ط}-\text{ح}+1)}{1\times2\times3\cdots\text{ح}}$ $\therefore \text{ح}\,\text{ط}_\text{ح} = (\text{ط}-\text{ح}+1)\,\text{ط}_{\text{ح}-1}$

$\text{ص}_2 = \frac{\text{ص}(\text{ص}-1)}{2\times1}$ $\therefore 2\text{ص}_2 = \text{ص}(\text{ص}-1)$

$\text{ص}_3 = \frac{\text{ص}(\text{ص}-1)(\text{ص}-2)}{3\times2\times1}$ $\therefore 3\text{ص}_3 = (\text{ص}-2)\text{ص}_2$ علی ہذا القیاس

ص ح = ص (ص − ۱) (ص − ۲) .... (ص − ح + ۱) / ۱ × ۲ × ۳ × ۴ .... ح ∴ ح ص ح = (ص − ح + ۱) ص ح−۱

اب ظاہر ہی کہ حاصل ضرب دو سلسلون ۱ + ط لا + ط۲ لا۲ + ط۳ لا۳ + ... ط ر لا ر ...... (۱)

۱ + ص لا + ص۲ لا۲ + ص۳ لا۳ + ... ص ر لا ر (۲) کا = ۱ + (ط + ص) لا + اجزا جنمین لا۲ اور لا۳

لا ح تک پائی جاتی ہین اور اب چونکہ سر لا ر کا یہہ ہی

ط ر + ط ر−۱ ص + ط ر−۲ ص۲ + ط ر−۳ ص۳ ...... ط ص ر−۱ + ص ر اور لا ر−۱ کا

یہہ ہی ط ر−۱ + ط ر−۲ ص + ط ر−۳ ص۲ .... ط ص ر−۲ + ص ر−۱ اور یہہ بہی

ظاہر ہی کہ ر ط ر = (ط − ر + ۱) ط ر−۱ اور ر ط ر−۱ ص = (ر − ۱) ط ر−۱ ص + ط ر−۱ ص

= (ط − ر + ۲) ط ر−۲ ص + ص ط ر−۱ اور اسیطور سے

ر ط ر−۲ ص۲ = (ر − ۲) ط ر−۲ ص۲ + ۲ ط ر−۲ ص۲

= (ط − ر + ۳) ط ر−۳ ص۲ + (ص − ۱) ص ط ر−۲ اور

ر ط ر−۳ ص۳ = (ر − ۳) ط ر−۳ ص۳ + ۳ ط ر−۳ ص۳

= (ط − ر + ۴) ط ر−۴ ص۳ + (ص − ۲) ص۲ ط ر−۳

وغیرہ = وغیرہ

ر ط ص ر−۱ = ط ص ر−۱ + (ر − ۱) ط ص ر−۱ = ط ص ر−۱ + (ص − ر + ۲) ص ر−۲ ط

ر ص ر = (ص − ر + ۱) ص ر−۱

جسوقت جمع کرین ہم ان سب اجزا کو اور یہہ بہی خیال رکہین کہ ہر دو سطر وینمین ایک جوڑا اجزای متشابہ کا ہی تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

ر × سر لا ر = (ط + ص − ر − ۱) (ط ر−۱ + ط ر−۲ ص + ط ر−۳ ص۲ + ... ص ر−۱)

∴ سر لا ر = (ط + ص − ر − ۱ / ر) × سر لا ر−۱ = (ط + ص − (ر − ۱) / ر) × (ط + ص − (ر − ۲) / ر − ۱) × سر لا ر−۲

= (ط + ص − (ر − ۱) / ر) × (ط + ص − (ر − ۲) / ر − ۱) ...... (ط + ص − ۱ / ۲) × سر لا

= (ط + ص − (ر − ۱) / ر) × (ط + ص − (ر − ۲) / ر − ۱) .... (ط + ص − ۱ / ۲) × (ط + ص / ۱)

= (ط + ص) (ط + ص − ۱) .... (ط + ص − ر + ۱) / ۱ × ۲ × ۳ .... ر

اب اگر کہین ہم عدد ۲ ۳ ۴ وغیرہ متواتر بجای ر کے تو حاصل ضرب سلسلون (۱) اور (۲) کا یہہ ہوگا

$$\text{او}\ 1 + (\text{ط}+\text{ص})\,\text{ل} + \frac{(\text{ط}+\text{ص})(\text{ط}+\text{ص}-1)}{1\times 2}\,\text{ل}^{2} + \dots \frac{(\text{ط}+\text{ص})(\text{ط}+\text{ص}-1)\dots(\text{ط}+\text{ص}-\text{ر}+1)}{1\times 2\times 3\times 4\dots\dots \text{ر}}$$

اب اگر ط کو نشانی سلسلہ اول کی متوزکرین اور ص کو سلسلہ دویم کی متوزکرین تو ظاہر ہی کہ یہہ بات ثابت ہوگی کہ حاصل ضرب دو ایسون سلسلون کا ایک ایسا سلسلہ ہوتا ہی کہ اوسکے قتانی حاصل جمع اون دو سلسلون کی نشانیون کی ہوتی ہی اور یہہ ہی ظاہر ہی کہ اگر اس حاصل ضرب کو ایک اور ایسی ہی سلسلہ سے ضرب کرین یعنے حاصل ضرب تین ایسے سلسلون کا لیوین تو نشانی اس حاصل ضرب کی حاصل جمع تینون سلسلون کی نشانیون کی ہوگی اور یہی قیاس کرنا چاہیئے اور زیادہ سلسلونکا —— اور فرض کرو کہ تعداد سلسلون کی ن ہی اور نشانی ہر واحد کی اینمین سے عدد ایک کا ہی تب چونکہ تمام سلسلہ ایکسی ہین اور حاصل جمع اونکی نشانیون کا ن ہی تو ظاہر ہی کہ حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$\left(1 + 1\times\text{ل} + \frac{1(1-1)}{2}\,\text{ل}^{2} + \dots\right)^{\text{ن}} = 1 + \text{ن}\,\text{ل} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2}\,\text{ل}^{2} + \text{وغیرہ}\ \text{یعنے}$$

$$(1+\text{ل})^{\text{ن}} = 1 + \text{ن}\,\text{ل} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2}\,\text{ل}^{2} + \dots \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)\dots(\text{ن}-\text{ر}+1)}{1\times 2\times 3\dots\dots \text{ر}}\,\text{ل}^{\text{ر}} + \dots$$

پس ثابت ہوا ضابطہ نیوٹن صاحب کا جب کہ نشان قوت ایک عدد صحیح مثبت ہی یہہ بات یہان یاد رکھنی چاہیئے کہ اول طرف اس مساوات مین یعنے بجائے $\overline{\text{ط}}_{2}$ اور $\overline{\text{ط}}_{3}$ وغیرہ کی اونکی قیمتین $\frac{\text{ط}(\text{ط}-1)}{1\times 2}$ اور $\frac{\text{ط}(\text{ط}-1)(\text{ط}-2)}{1\times 2\times 3}$ وغیرہ لکھین ہین صورت دوم مین فرض کرو کہ تعداد سلسلون کی بطور گذشتہ کے ن ہی لیکن نشانی ہر واحد کی اینمین سے $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ ہی پس اب چونکہ $\frac{\text{م}}{\text{ن}} + \frac{\text{م}}{\text{ن}} +$ وغیرہ ن حرون تک $=\text{م}$

$$\therefore \left(1 + \frac{\text{م}}{\text{ن}}\,\text{ل} + \frac{\frac{\text{م}}{\text{ن}}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}-1\right)}{1\times 2}\,\text{ل}^{2} + \text{وغیرہ}\right)^{\text{ن}} = 1 + \text{م}\,\text{ل} + \frac{\text{م}(\text{م}-1)}{1\times 2}\,\text{ل}^{2} + \text{وغیرہ} = (1+\text{ل})^{\text{م}}$$

موافق صورت اول کے

$$(1+\text{ل})^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}} = 1 + \frac{\text{م}}{\text{ن}}\,\text{ل} + \frac{\frac{\text{م}}{\text{ن}}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}-1\right)}{1\times 2}\,\text{ل}^{2} + \frac{\frac{\text{م}}{\text{ن}}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}-1\right)\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}-2\right)}{1\times 2\times 3}\,\text{ل}^{3} + \text{وغیرہ}$$

پس ثابت ہوا ضابطہ جبکہ نشان قوت ایک کسر ہو

صورت سویم مین فرض کرو کہ دو سلسلے ایسے ہین کہ اونکی نشانیان م اور $-\text{م}$ ہین $\therefore$

$$\left(1 + \text{م}\,\text{ل} + \frac{\text{م}(\text{م}-1)}{1\times 2}\,\text{ل}^{2} + \text{وغیرہ}\right)\left(1 - \text{م}\,\text{ل} + \frac{-\text{م}(-\text{م}-1)}{1\times 2}\,\text{ل}^{2} + \text{وغیرہ}\right) = 1 + (\text{م}-\text{م})\,\text{ل} + \text{وغیرہ}$$

$= ١ \div \frac{١}{(١+لا)^م}$ یعنے $(١+لا)^{-م} = ١ - م لا + \frac{-م(-م-١)}{١ \times ٢} لا^٢ +$ وغیرہ

پس ثابت ہوا ضابطہ جبکہ نشان قوت ایک عدد منفی ہو خواہ صحیح خواہ کسر

اگر $\overline{ن}$ ایک عدد مثبت اور صحیح ہو وسیے اور سلسلہ ضربی $١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times \ldots\ldots ن$ کو $\underline{ن}$ سے تعبیر کرین تو ضابطہ نیوٹن صاحب اسطور پر لکھا جاسکتا ہی

$$(لا+ط)^ن = \underline{ن}\left\{\frac{لا^ن}{\underline{ن}} + \frac{ط لا^{ن-١}}{\underline{١}\,\underline{ن-١}} + \frac{ط^٢ لا^{ن-٢}}{\underline{٢}\,\underline{ن-٢}} + \ldots + \frac{ط^{ن-١} لا}{\underline{ن-١}} + \frac{ط^ن}{\underline{ن}}\right\}$$

جبکہ ہم ضابطہ کو کام مین لاوین اسوقت مناسب ہی کہ اس بات کو یاد رکھین کہ جس حالت مین اول طرف کے دو نون جزو قوت اول رکھتے ہون اوس حالت مین ہر جز صورت مفصلہ مین مجموعہ نشانون قوت کا $\overline{ن}$ ہوگا اور جس صورت مین کہ دونون جز مذکور دو دو قوت رکھتے ہون اوس صورت مین ہر جز صورت مفصلہ مین مجموعہ نشانون قوت کا ۲ ان ہوگا اور علی ہذا القیاس واسطے آسانی کے لازم ہی کہ ہمیشہ $(ط+ص)^ن$ کو $ط^ن(١+\frac{ص}{ط})^ن$ سی تبدیل کرین اور بعد ازان $(١+\frac{ص}{ط})^ن$ کی صورت مفصلہ دریافت کرکی اوسکی ہر جز مین $ط^ن$ کو ضرب کرین

مثال (۱) $(ط^٢+لا^٢)^ن = \left\{ط^٢(١+\frac{لا^٢}{ط^٢})\right\}^ن = ط^{٢ن} \times (١+\frac{لا^٢}{ط^٢})^ن$

$$= ط^{٢ن}\left(١ + ن\frac{لا^٢}{ط^٢} + ن\frac{ن-١}{٢} \cdot \frac{لا^٤}{ط^٤} + \frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{١ \times ٢ \times ٣}\frac{لا^٦}{ط^٦} + \text{وغیرہ}\right)$$

$$= ط^{٢ن} + ن ط^{٢ن-٢} لا^٢ + \frac{ن(ن-١)}{١ \times ٢} ط^{٢ن-٤} لا^٤ + \frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{١ \times ٢ \times ٣} ط^{٢ن-٦} لا^٦ + \text{وغیرہ}$$

واضح ہو کہ جز عام کسی سلسلہ کا وہ جز ہوتا ہی کہ اوسکے ذریعہ سی کوئی سا جز اوسکا دریافت ہوسکتا ہی جاننے ہین ہم دریافت کرنا جز عام صورت مفصلہ $(لا+ط)^ن$ کا ظاہر ہی کہ جز اول $لا^ن$ ہی جز دویم $ن ط لا^{ن-١}$ جز سوم $\frac{ن(ن-١)}{١ \times ٢} ط^٢ لا^{ن-٢}$ جز چہارم $\frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{١ \times ٢ \times ٣} ط^٣ لا^{ن-٣}$

ان اجزا کے غور کرنی سے معلوم ہوتا ہی کہ ہر کسی جز کا مرکب ہوتا ہی اجزا وضربی $\frac{ن}{١}$ اور $\frac{ن-١}{٢}$ اور $\frac{ن-٢}{٣}$ وغیرہ سے اور انکی تعداد اوس عدد سی جو مرتبہ اوس جز کا ہے جسکا سر ہم دریافت کرتے ہین بقدر ایک کی کم ہوتی ہی پس معلوم ہوا کہ سر $\overline{ر}$ وین جز کا یہ ہی

$$\frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)\cdots(\text{ن}-\text{ر}+۲)}{۱\times۲\times۳\times\cdots(\text{ر}-۱)}$$

اور یہہ بھی ظاہر ہی کہ نشان قوت ط کا مساوی اخیر جز ضربی نسب نما کی ہوتا ہی اور نشان قوت لا کا مساوی حاصل تفریق ن اور نشان قوت ط کی ہوتا ہی پس معلوم ہوا کہ رواں جز یعنے جز عام مطلوب یہہ ہی

$$\frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)\cdots\cdots(\text{ن}-\text{ر}+۲)}{۱\times۲\times۳\times\cdots\cdots(\text{ر}-۱)}\,\text{ط}^{\text{ر}-۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{ر}+۱}$$

اور ظاہر ہی کہ اگر اس صورت جبریہ مین کوئی عدد مطابق کسی جز کے مرتبہ کے بجای ر کی درج کرین تو وہ جز ٹھیک معلوم ہوجائیگا

مثال کیا ہی پانچوان جز $(\text{ط}^۲-\text{ص}^۲)^{۱۲}$ کا بیان ظاہر ہی کہ $\text{ر}=۵$ اور $\text{ن}=۱۲$

$$\therefore\ \text{جز مطلوبہ}=\frac{۹\times۱۰\times۱۱\times۱۲}{۱\times۲\times۳\times۴}(-\text{ص}^۲)^۴\times(\text{ط}^۲)^۸=۴۹۵\,\text{ط}^{۱۶}\,\text{ص}^۸$$

اثبات ضابطہ نیوٹن صاحب کا بغیر مدد سلسلہ فرضی کے

اس ضابطہ مین تین صورتین ہین صورت اول وہ جسمین نشان قوت ن ایک عدد صحیح اور مثبت ہوتا ہی صورت دویم وہ ہی جسمین نشان قوت ایک کسر مثبت ہو صورت سیوم وہ جسمین نشان قوت منفی ہو خواہ عدد صحیح خواہ کسر ہم اول صورت کا اثبات کرتی ہین عمل ضرب سے معلوم ہوتا ہی کہ $(\text{لا}+\text{ا})(\text{لا}+\text{ب})=\text{لا}^۲+(\text{ا}+\text{ب})\,\text{لا}+\text{اب}$

اور $(\text{لا}+\text{ا})(\text{لا}+\text{ب})(\text{لا}+\text{ج})=\text{لا}^۳+(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})\,\text{لا}^۲+(\text{اب}+\text{اج}+\text{بج})\,\text{لا}+\text{ابج}$ اور $(\text{لا}+\text{ا})(\text{لا}+\text{ب})(\text{لا}+\text{ج})(\text{لا}+\text{س})=$

$\text{لا}^۴+(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج}+\text{س})\,\text{لا}^۳+(\text{اب}+\text{اج}+\text{بج}+\text{اس}+\text{بس}+\text{جس})\,\text{لا}^۲+(\text{ابج}+\text{اجس}+\text{بجس}+\text{ابس})\,\text{لا}+\text{ابجس}$ ظاہر ہی کہ اگر عمل مرقومہ بالا ضرب کا متواتر جاری رکھین تو منتاہ وہ سے معلوم ہوجائیگا کہ بطور گذشتہ کی اجزاء حاصل ضرب سے زیادہ ہوتی جائینگی خواہ تعداد اجزاء ضربی مثل $(\text{لا}+\text{ا})$ اور $(\text{لا}+\text{ب})$ وغیرہ کسیقدر ہوسے یعنے یہہ انتظام یا قانون حاصلضرب کا دریافت ہوگا کہ اوسمین قوای لا کی ہر جز مین کم ہوتی جاتی ہین اور سب سے بڑا نشان قوت مساوی تعداد اجزاء ضربی کے ہی اور ماندہ کی اجزاء حاصلضرب مین نشان قوت لا کا بقدر عدد ۱ کی بتدریج کم ہوتا جاتا ہی اور یہہ بھی معلوم ہوگا کہ سر اول جز حاصل ضرب کا عدد ۱ کا ہی اور سر دوسری جز کا حاصل جمع مقداردن ا اور ب اور س وغیرہ کا ہی اور تیسری جز کا حاصل جمع حاصل ضربون

ان مقدارون سے دو دو کا اور چوتھی جز کا حاصل ضربون تین تین کا ہی اور علی ہذالقیاس اور اخیر جز کا سر حاصلضرب کل ن مقدارون ا اور ب اور ح وغیرہ کا ہوگا فرض کرو کہ قانون مرقومہ بالا صحیح ہوتا ہی جب کہ اجزاو ضربی (لا + ا) اور (لا + ب) اور (لا + ح) .... (لا + کہ) تعداد مین ن ہون پس موافق اس فرض کے حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$(لا + ا)(لا + ب)(لا + ح) \dots (لا + کہ) = لا^{ن} + ا_{1} لا^{ن-1} + ب لا^{ن-2} \dots + کہ$$

اور اس جا کہ $ا_{1} = ا + ب + ح + \dots کہ$ اور

$ب = اب + اح + بح +$ وغیرہ

وغیرہ = وغیرہ

$کہ = اب ح س \dots کہ$

اب ضرب کرو طرفین اس مساوات کو ایک اور جز ضربی (لا + ل) مین تو حاصل ہوگا یہہ

$$(لا + ا)(لا + ب)(لا + ح) \dots (لا + کہ)(لا + ل) = لا^{ن+1} + (ا_{1} + ل) لا^{ن} +$$

$$(ب + ل ا_{1}) لا^{ن-1} + \dots + کہ ل$$ اور یہان سے معلوم ہوا کہ

$ا_{1} + ل = ا + ب + ح + \dots کہ + ل$

$ب + ا_{1} ل = اب + اح + بح + \dots ال + بل + \dots + کہ ل$

وغیرہ = وغیرہ

$کہ ل = اب ح س \dots کہ ل$

یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ اگر قانون مذکورہ بالا صحیح ہو واسطے ن اجزاو ضربی مثل (لا + ا) اور (لا + ب) وغیرہ کی تو بالضرور وہ درست ہوگا واسطے ن + ۱ اجزاو ضربی مذکور کی لیکن پہلی ثابت ہوا ہی کہ قانون مذکور درست ہی واسطے ۴ اجزاو ضربی کی تو اب معلوم ہوا کہ وہ درست ہی واسطے ۵ اجزا کی اور اگر وہ درست ہی واسطے ۵ اجزا کی تو وہ درست ہونا چاہیئے واسطے ۶ اجزا کی اور یہی قیاس کرنا چاہیئے واسطے زیادہ اجزا کی پس معلوم ہوا کہ قانون مذکور درست ہی خواہ تعداد اجزاو ضربی کچھ ہو

اب فرض کرو کہ $ا = ب = ح = س =$ وغیرہ

$\therefore ا_{1} = ا + ا +$ وغیرہ .... ن جزون تک $= ن ا$

ب = $\bar{ا}^{۲}$ + $\bar{ا}^{۲}$ + $\bar{ا}^{۲}$ + وغیرہ اسقدر اجزا تک جسقدر کہ ملکر مساوی ہون تعداد اجتماعون ن چیزون سے جبکہ وہ چیزین دو دو اکھٹی لے جائین = ن $\frac{ن-۱}{۲}$ $ا^{۲}$

س = $\bar{ا}^{۳}$ + $\bar{ا}^{۳}$ + وغیرہ اسقدر اجزا تک جسقدر کہ ملکر مساوی ہون تعداد اجتماعون ن چیزون سے جبکہ وہ چیزین تین تین اکھٹی لیجا دین = ن $\frac{(ن-۱)}{۲}\frac{(ن-۲)}{۳}$ $ا^{۳}$

وغیرہ = وغیرہ

اس صورت مین یہہ بھی ظاہر ہی کہ (لا + ا) (لا + ب) (لا + ج) .... (لا + ک) بتبدیل $(لا+ا)^{ن}$ سے ہوجاتا ہی ∴ $(لا+ا)^{ن}$ = $لا^{ن}$ + ن $لا^{ن-۱}$ ا + ن $\frac{(ن-۱)}{۲}$ $لا^{ن-۲}$ $ا^{۲}$ +

ن $\frac{(ن-۱)(ن-۲)}{۲ \times ۳}$ $لا^{ن-۳}$ $ا^{۳}$ + ... + $ا^{ن}$

حکم $(۱+لا)^{ن}$ = ۱ + ن لا + $\frac{ن(ن-۱)}{۱ \times ۲}$ $لا^{۲}$ + $\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۱ \times ۲ \times ۳}$ $لا^{۳}$ + ... + $لا^{ن}$

صورت دوم جبکہ قوت ایک مثبت کسر ہووی فرض کرکہ م اور ن اعداد صحیح مثبت ہین اب ہم ثابت کرینگی کہ $(۱+لا)^{\frac{م}{ن}}$ مساوی ہی اِس سلسلہ کے (۱ + $\frac{م}{ن}$ لا + $\frac{\frac{م}{ن}(\frac{م}{ن}-۱)}{۱ \times ۲}$ $لا^{۲}$ + وغیرہ) کی

ظاہر ہی کہ اگر اِس سلسلہ مین عدد ۱ کو اول جز قرار دین اور مجموعہ باقی اجزا کو دوسرا جز اور موافق صورت اول کے اسکا صعود بقدر ن کے کہ ایک عدد صحیح اور مثبت ہی لین تو حاصل ہوگا

$\left\{۱ + \frac{م}{ن} لا + \frac{\frac{م}{ن}(\frac{م}{ن}-۱)}{۱ \times ۲} لا^{۲} + وغیرہ\right\}^{ن}$ =

۱ + ن $\left(\frac{م}{ن} لا + \frac{\frac{م}{ن}(\frac{م}{ن}-۱)}{۱ \times ۲} لا^{۲} + وغیرہ\right)$ + $\frac{ن(ن-۱)}{۱ \times ۲}$ $\left(\frac{م}{ن} لا + \frac{\frac{م}{ن}(\frac{م}{ن}-۱)}{۱ \times ۲} لا^{۲} + وغیرہ\right)^{۲}$ + وغیرہ

= ۱ + م لا + $\left(م \times \overline{\frac{م}{ن}-۱} + ن \times \overline{ن-۱} \times \frac{م^{۲}}{ن^{۲}}\right)$ $\frac{لا^{۲}}{۱ \times ۲}$ +

$\left(م \times \overline{\frac{م}{ن}-۱} \times \overline{\frac{م}{ن}-۲} + ۳ (ن-۱) \times \frac{م^{۲}}{ن^{۲}} \times \overline{\frac{م}{ن}-۱} + ن \times \overline{ن-۱} \times \overline{ن-۲} \times \frac{م^{۳}}{ن^{۳}}\right)$ $\frac{لا^{۳}}{۱ \times ۲ \times ۳}$

+ وغیرہ اب تحویل کرنی سے سر $\frac{لا^{۲}}{۱ \times ۲}$ کا = $م^{۲}$ − م = م (م − ۱) کے ہوتا ہی

اور سر $\frac{\text{لا}^{3}}{1\times2\times3} = \text{م}\left(\frac{\text{م}^{2}}{\text{ن}^{2}} - \frac{3\text{م}^{2}}{\text{ن}} + 2 + \frac{2\text{م}^{2}}{\text{ن}} - 3\text{م} - \frac{3\text{م}^{2}}{\text{ن}^{2}} + \frac{3\text{م}}{\text{ن}} + \text{م}^{2} - \frac{3\text{م}^{2}}{\text{ن}} + \frac{2\text{م}^{2}}{\text{ن}^{2}}\right) = \text{م}\left(\text{م}^{2} - 3\text{م} + 2\right) = \text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)$ اور یہی قیاس کرنا چاہئیے واسطی سرون تم سے زیادہ قوای لا کی پر حاصل ہوگا ہے

$$\left(1+\frac{\text{م}}{\text{ن}}\text{لا} + \frac{\frac{\text{م}}{\text{ن}}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}-1\right)}{1\times2}\text{لا}^{2} \ldots \text{وغیرہ}\right)^{\text{ن}} = 1 + \text{م}\,\text{لا} + \frac{\text{م}(\text{م}-1)}{1\times2}\text{لا}^{2} + \frac{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)}{1\times2\times3}\text{لا}^{3} + \text{وغیرہ} = (1+\text{لا})^{\text{م}}$$

اسلئے کہ م ایک صحیح مثبت عدد ہی

$$\therefore (1+\text{لا})^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}} = 1 + \frac{\text{م}}{\text{ن}}\text{لا} + \frac{\frac{\text{م}}{\text{ن}}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}-1\right)}{1\times2}\text{لا}^{2} + \frac{\frac{\text{م}}{\text{ن}}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}-1\right)\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}-2\right)}{1\times2\times3}\text{لا}^{3} + \text{وغیرہ}$$

اور یہی ارادہ کیا تہا پس ثابت ہوا ضابطہ نیوطن کا صورت دوم مین بہی جب کہ نشان قوت ایک کسر مثبت ہو صورت سویم جبکہ نشان قوت ن منفی ہو خواہ صحیح خواہ کسر

ظاہر ہی کہ $\left(1 - \text{ن}\,\text{لا} + \frac{-\text{ن}(-\text{ن}-1)}{1\times2}\text{لا}^{2} + \frac{-\text{ن}(-\text{ن}-1)(-\text{ن}-2)}{1\times2\times3}\text{لا}^{3} + \text{وغیرہ}\right)$

$$\times\left(1 + \text{ن}\,\text{لا} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{1\times2}\text{لا}^{2} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{1\times2\times3}\text{لا}^{3} + \text{وغیرہ}\right)$$

$$= 1 + (\text{ن}-\text{ن})\text{لا} + \left(\text{ن}\times\overline{\text{ن}-1} + \text{ن}\times\overline{\text{ن}+1} - 2\text{ن}^{2}\right)\frac{\text{لا}^{2}}{1\times2}$$

$$+ \left(\text{ن}\times\overline{\text{ن}-1}\times\overline{\text{ن}-2} - \text{ن}\times\overline{\text{ن}+1}\times\overline{\text{ن}+2} + 3\text{ن}^{2}\times\overline{\text{ن}+1} - 3\text{ن}^{2}\times\overline{\text{ن}-1}\right)\frac{\text{لا}^{3}}{1\times2\times3} + \text{وغیرہ}$$

$$= 1 + 0\times\text{لا} + 0\times\frac{\text{لا}^{2}}{1\times2} + 0\times\frac{\text{لا}^{3}}{1\times2\times3} + \text{وغیرہ} = 1$$

$$\therefore 1 - \text{ن}\,\text{لا} + \frac{-\text{ن}(-\text{ن}-1)}{1\times2}\text{لا}^{2} + \frac{-\text{ن}(-\text{ن}-1)(-\text{ن}-2)}{1\times2\times3}\text{لا}^{3} + \text{وغیرہ}$$

$$= \frac{1}{1 + \text{ن}\,\text{لا} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{1\times2}\text{لا}^{2} + \text{وغیرہ}} = \frac{1}{(1+\text{لا})^{\text{ن}}} = (1+\text{لا})^{-\text{ن}}$$

پس ایہ ثابت ہوا ضابطہ سر اسحاق نیوطن کا تمام تینون صور تون مین

اگر نشان قوت ایک صحیح عدد مثبت ہو دیبے تو ہم کہتے ہین کہ سر ہر جز صورت مفصلہ کا کہ اسی نشان

قوت سی بنتا ہی ایک عدد صحیح مثبت ہوگا اسواسطی کہ ظاہر ہی کہ سر (ر+۱) وین جز کا یہہ ہی

$$\frac{\text{ن(ن − ۱)(ن − ۲)....(ن − ر + ۱)}}{\text{۱ × ۲ × ۳ × .... ر}}$$

اور موافق قاعدون اجتماع کے ظاہر ہی کہ یہی تعداد

اجتماعون ن چیزون سے کہ ر ر دفع اکہٹی کی جاوین اب موافق تعریف اجتماع کی لازم ہی کہ صورت جبریہ مذکور ایک عدد صحیح عدد مثبت ہووی اگر ہم ن اور ر کو صحیح اور مثبت مانی تو ثابت ہوا دعوی

دریافت کیا جاتے ہین ہم تعداد اجزاء صورت مفصلہ کسی صورت ثنائی کی سے پہلے ثابت ہوچکا ہی کہ ر + ۱ وان جز

$$\text{(لا + ط)}^{\text{ن}} \text{ کا } \frac{\text{ن(ن − ۱)(ن − ۲)....(ن − ر + ۱)}}{\text{۱ × ۲ × ۳ × .... ر}} \times \text{ط}^{\text{ر}}\ \text{لا}^{\text{ن − ر}}$$

پس اب ظاہر ہی کہ اگر اس صورت مین ر ایسا ہووی کہ ن − ر + ۱ = ۰ یعنے اگر ن ہووے ایک مثبت عدد صحیح اور ر ایسا ہووے کہ ر = ن + ۱ یعنے ر نسبت نشان قوت ن کے بقدر عدد ایک کی زیادہ ہووی تو ظاہر ہی اس صورت مین کہ بعد ر وین جز کے کوئی اور جز باقی نہین رہتا ہی یعنے صورت مفصلہ تمام ہوجاتی ہی اور اسیواسطی معلوم ہوا کہ تعداد مطلوبہ اجزاء کی ن + ۱ ہی یعنے تعداد مذکور نسبت نشان قوت کی بقدر عدد ایک کی زیادہ ہوتی ہی اگر ن ہووی ایک عدد منفی یا ایک کسر تو ظاہر ہی کہ ن − ر + ۱ صفر نہین ہوسکتا ہی گو کچھہ ہی قیمت واسطی ر کی فرض کرین پس معلوم ہوا کہ ان صورتون مین تعداد اجزاء کی غیر نہایت ہوگی مثلاً تعداد اجزاء صورتون مفصلہ $\text{(لا + ط)}^{۲}$ اور $\text{(لا + ط)}^{۳}$ کی ۳ اور ۴ ہی لیکن تعداد اجزاء صورتون مفصلہ $\text{(لا + ط)}^{-۲}$ یا $\text{(لا + ط)}^{\frac{۱}{۲}}$ کی غیر نہایت ہی جب کہ (لا + ط) کی کوئی قوت لین اور نشان قوت ایک عدد صحیح اور مثبت ہو تو ثابت کرو کہ اسکی صورت مفصلہ کی شروع اور اخیر سی کوئی دو جز مساوی فاصلون پر لین تو ان جزون مین مساوی ہونگی دلیل اسکی یہہ ہی چونکہ کل تعداد اجزاء کی ن + ۱ ہی تو ظاہر ہی کہ ر + ۱ وان جز اخیر سلسلہ سے (ن + ۱ − ر) وان یعنے (ن − ر + ۱) وان جز شروع سی ہوگا پس جس وقت لکھا ہی یعنے ن − ر + ۱ بجای ر کے تو سر جز مذکور کا موافق مضامین گذشتہ کی یہہ ہوگا

$$\frac{\text{ن(ن − ۱)(ن − ۲)....(ن − ن − ر − ۱)}}{\text{۱ × ۲ × ۳ × ...... (ن − ر)}}$$

$$= \frac{\text{ن(ن − ۱)(ن − ۲)......(ر + ۱)}}{\text{۱ × ۲ × ۳ × ...... (ن − ر)}}$$

$$= \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\cdots(\text{ن}-\text{ر}+1)(\text{ن}-\text{ر})\cdots(\text{ر}+1)}{1\times2\times3\times\cdots\cdots\text{ر}(\text{ر}+1)\cdots\cdots(\text{ن}-\text{ر})}$$ اور یہہ اوسوقت ہی جبکہ ۲ر > ن

$$= \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\cdots(\text{ر}+1)\,\text{ر}(\text{ر}-1)\cdots(\text{ن}-\text{ر}+1)}{1\times2\times3\times\cdots\cdots(\text{ن}-\text{ر})(\text{ن}-\text{ر}+1)\cdots(\text{ر}-1)\,\text{ر}}$$ اور یہہ اوسوقت ہی جبکہ ر > ن − ر

$$= \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\cdots\cdots(\text{ن}-\text{ر}+1)}{1\times2\times3\times\cdots\cdots\cdots\text{ر}}$$ اور یہہ دونو صورتوں مین ہوسکتا ہی

= سر (ر+۱) وین جز کی شروع سیے واضح ہو کہ یہہ بات ثابت ہوسکتی ہی جبکہ لکھین ہم ط بجای لا کے اور لا بجای ط کے یعنی صورتین مفصلہ $(\text{لا}+\text{ط})^{\text{ن}}$ اور $(\text{ط}+\text{لا})^{\text{ن}}$ کے لیکر اونکو مساوی ایک دوسری کے لکھین اور بعد ازان اون اجزا کی سر دنکو جنمین قوای متماثلہ لا اور ط کی پائی جاوین مساوی ایک دوسری کے لکھین حکم یہہ ان سے معلوم ہوتا ہی کہ اگر $(\text{لا}+\text{ط})^{\text{ن}}$ کی صورت مفصل لین اور ن کو ایک مقدار صحیح اور مثبت فرض کرین تو فقط اول سے ادہی سلسلہ کو دریافت کر کی باقی ادہی کے اجزا پہلی اجزا سے قیاس کئے جاسکتی ہین مثلاً

$$(\text{ط}+\text{ص})^7 = \text{ط}^7 + 7\,\text{ط}^6\text{ص} + 21\,\text{ط}^5\text{ص}^2 + 35\,\text{ط}^4\text{ص}^3 + 35\,\text{ط}^3\text{ص}^4 + 21\,\text{ط}^2\text{ص}^5 + 7\,\text{ط}\,\text{ص}^6 + \text{ص}^7$$

دریافت کیا جاسکتے ہین نہایت بڑا یعنی سب سے اعظم جز اجزا صورت مفصلہ $(\text{ط}+\text{ص})^{\text{ن}}$ مین سے ظاہر ہی کہ ر+۱ وان جز اس صورت مفصلہ کا $\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)\cdots\cdots(\text{ن}-\text{ر}+1)}{1\times2\times3\times\cdots\cdots\text{ر}}\,\text{ط}^{\text{ن}-\text{ر}}\,\text{ص}^{\text{ر}}$ اور ر وان جز یہہ ہی $\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)\cdots\cdots(\text{ن}-\text{ر}+2)}{1\times2\times3\times\cdots\cdots(\text{ر}-1)}\,\text{ط}^{\text{ن}-\text{ر}+1}\,\text{ص}^{\text{ر}-1}$ اور یہان سے معلوم ہوا کہ ر+۱ وان جز ر وین جز سے نکل سکتا ہی اگر ضرب کرین ر وین جز کو $\frac{\text{ن}-\text{ر}+1}{\text{ر}}\cdot\frac{\text{ص}}{\text{ط}}$ جبکہ ر کہ ایک عدد صحیح ہی نہایت کم ہو تو مضروب فیہ $\frac{\text{ن}-\text{ر}+1}{\text{ر}}\cdot\frac{\text{ص}}{\text{ط}}$ نہایت زیادہ ہو اور اوسوقت بہی کہ $\frac{\text{ن}-\text{ر}+1}{\text{ر}}\cdot\frac{\text{ص}}{\text{ط}} > 1$ ہو تو ظاہر ہی کہ اس صورت مین ر وان جز سب سے بڑا جز تمام اجزا صورت مفصلہ مین سے ہوگا موافق اس فرض کے $\frac{\text{ن}-\text{ر}+1}{\text{ر}}\cdot\frac{\text{ص}}{\text{ط}} > 1 \therefore (\text{ن}-\text{ر}+1)\,\text{ص} > \text{ر}\,\text{ط}$ یعنی $\text{ر}(\text{ط}+\text{ص}) < (\text{ن}+1)\,\text{ص}$ یا $\text{ر} < (\text{ن}+1)\cdot\frac{\text{ص}}{\text{ط}+\text{ص}}$ پس فرض کرو واسطے ر کی اول ہی عدد صحیح ایسا کہ وہ زیادہ ہو $(\text{ن}+1)\frac{\text{ص}}{\text{ص}+\text{ط}}$ سے اور اس صورت مین بیشک ر وان جز سب سے زیادہ ہوگا اگر $(\text{ن}+1)\frac{\text{ص}}{\text{ط}+\text{ص}}$ ایک عدد صحیح ہووی تو ظاہر ہی کہ $\frac{\text{ن}-\text{ر}+1}{\text{ر}}\cdot\frac{\text{ص}}{\text{ط}} = 1$ اور ∴ ر وان جز مساوی ر+۱ وین

سے ہوگا یعنی دو جز صورت مفصلہ کی ایسی ہونگی کہ ہر واحد اونمین سے سب باقی اجزاء سے زیادہ ہوگا

حکم جب ہم دریافت کرتے ہین اسطور سے کہ نسبتی بڑا اجزاء اوسوقت ہم دریافت کرتے ہین اوس مقام یا نقطہ کو جہان سے اجزاء سلسلہ کی نوبت بنوبت گھٹنی ہونے لگتے ہین یا موافق اصطلاح کے جہان سے سلسلہ مایل بہ اختتام ہونا شروع کرتا ہے

مثال دریافت کیا جاتا ہے ہم سب سے بڑا جزو صورت مفصلہ $(۳ + ۵ لا)^{۹}$ کا جبکہ $لا = \frac{۱}{۲}$

اگر جای $(ن + ۱)\frac{م}{ط + م} = (۸ + ۱)\cdot\frac{\frac{۵}{۲}}{۳ + \frac{۵}{۲}} = ۹ \times \frac{۵}{۱۱} = \frac{۴۵}{۱۱} = ۴\frac{۱}{۱۱}$

اور اسسے بڑا اول عدد ۴ ہے پس معلوم ہوا کہ سب سے بڑا جزو ۵ وان جز ہے دریافت کیا جاتے ہین ہم حاصل جمع سرون کا جو حاصل جمع کسی دو مقدارون کی کسی قوت کی صورت مفصلہ مین پائی جاوین چونکہ

$$(۱ + لا)^{ن} = ۱ + ن\,لا + \frac{ن(ن-۱)}{۱\times۲}لا^{۲} + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۱\times۲\times۳}لا^{۳} + \text{وغیرہ}$$

خواہ واسطی لا کی کوئی قیمت فرض کرین تو فرض کہ $لا = ۱ \therefore$

$$(۱ + ۱)^{ن} = ۱ + ن + \frac{ن(ن-۱)}{۱\times۱} + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۱\times۲\times۳} + \text{وغیرہ}$$

$\therefore ۲^{ن} =$ حاصل جمع تمام سرونکی

مثال $(لا + ط)^{۵} = لا^{۵} + ۵لا^{۴}ط + ۱۰لا^{۳}ط^{۲} + ۱۰لا^{۲}ط^{۳} + ۵لاط^{۴} + ط^{۵}$

$$= ۱ + ۵ + ۱۰ + ۱۰ + ۵ + ۱ = ۳۲ = ۲^{۵}$$

جب چاہتے ہین ہم دریافت کرنی مختلف مرتبہ کی نزول تقریباً اعداد کی بذریعہ ضابطہ نیوٹن کی ظاہر ہے کہ

$\sqrt[ن]{۱ \pm لا} = (۱ \pm لا)^{\frac{۱}{ن}} = ۱ \pm \frac{۱}{ن}لا - \frac{۱}{ن}\cdot\frac{ن-۱}{۲ن}لا^{۲} \pm \text{وغیرہ}$ اب اگر ع ہر کوئی عدد

مفروض جسکا ن مرتبہ کا نزول دریافت کیا جاتا ہے تو فرض کرو کہ $ف^{ن}$ ایک مناسب قریب قیمت ع سے کے $\therefore$ فرض کرو $ع = ف^{ن} \pm ق$ اور اس جای ق بہت کم ہی بہ نسبت $ف^{ن}$ کے اور علامت + یا − کی موافق صورتون $ع > ف^{ن}$ اور $ع < ف^{ن}$ کی لینی چاہیے پس اس صورت مین ظاہر ہے کہ

$\sqrt[ن]{ع} = ف\left(۱ \pm \frac{ق}{ف^{ن}}\right)^{\frac{۱}{ن}}$ اور جب لکھا جای لا کی مقدار $\frac{ق}{ف^{ن}}$ کو

اوسوقت $\sqrt[ن]{ع} = ف\left\{۱ \pm \frac{۱}{ن}\cdot\frac{ق}{ف^{ن}} - \frac{۱}{ن}\cdot\frac{ن-۱}{۲ن}\left(\frac{ق}{ف^{ن}}\right)^{۲} \pm \text{وغیرہ}\right\}$

اور اس سلسلے میں فقط چند اجزاء کی ذریعہ سے بہت قریب قیمت نزول مطلوب کی معلوم ہو جاویگی

مثال چاہتے ہیں دریافت کرنا کعب یعنی تیسری مرتبہ کا نزول عدد $\overline{۱۲۸}$ کا اس جای ۱۲۸ = ۵۳ + ۳ = ۱۲۵ + ۳

$$= ۵ \left\{ ۱ + \frac{۱}{۳} \cdot \frac{۳}{۱۲۵} - \frac{۱}{۳} \cdot \frac{۱}{۳} \left(\frac{۳}{۱۲۵}\right)^{۲} + \frac{۱}{۳} \cdot \frac{۵}{۹} \left(\frac{۳}{۱۲۵}\right)^{۳} - \text{وغیرہ} \right\}$$

$$= ۵ + ۵ \frac{۱}{۲۵} - \frac{۱}{۹} \cdot \frac{۱}{۴۵} + \frac{۱}{۳} \cdot \frac{۱}{۷۵} - \text{وغیرہ} = ۵ + \frac{۲}{۲۱۰} - \frac{۵۲}{۵۱۰}$$

$$+ \frac{۱}{۳} \cdot \frac{۷}{۱۰^{۷}} - \text{وغیرہ} = ۵ + ۰{,}۰۴ - ۰{,}۰۰۰۳۲ + ۰{,}$$

$$۰{,}۰۰۰۰۰۴۲ = ۵{,}۰۳۹۶۸۴۴$$

مثال دریافت کیا چاہتے ہیں ہم وہ جزء صورت مفصل $(۱ + ل + ل^{۲})^{۳}$ کا جسمیں $ل^{۳}$ پایا جای $۱ + ل$ کو ایک مقدار کرو اور: $(\overline{۱ + ل} + ل^{۲})^{۳} = (۱ + ل)^{۳} + ۳ (۱ + ل)^{۲} ل^{۲} + ۳ (۱ + ل) ل^{۴} + ل^{۶}$

اس جای تغیر اور عمل کرنے کی معلوم ہوتا ہی کہ جزء مطلوب $= ۳ ل^{۲} \times ل + ۳ ل^{۳} = ۶ ل^{۳}$ اور اسی طور سے کوی سا جزء یعنی جزون کے صعود و نکا دریافت ہوسکیگا

دریافت کیا چاہتے ہیں ہم تعداد اجزاء صورت مفصل $(۱ + ب + ج)^{ن}$ کی ظاہر ہی کہ تعداد مطلوبہ مساوی ہوگی حاصل جمع اجزاء صور توں مفصلہ قوتوں مختلفہ $(۱ + ب)$ کی یعنے صور توں مفصلہ $(۱ + ب)^{ن}$ اور $(۱ + ب)^{ن-۱}$ وغیرہ $(۱ + ب)$ تک اس سے معلوم ہوا کہ تعداد مطلوبہ $= (ن + ۱) + ن + (ن - ۱) +$ وغیرہ ۱ + ۱ اجزاء تک

$$= \frac{ن + ۱}{۲} \left\{ ۲ ن + ۲ - ن \right\} \text{ موافق قواعد سلسلہ جمع تفریق سے}$$

$$= \frac{(ن + ۱)(ن + ۲)}{۱ \times ۲}$$

چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا باقیات صورت مفصلہ $(۱ - ل)^{-۲}$ کا بعد ر اجزاء سے

ظاہر ہی کہ موافق ضابطہ نیوٹن صاحب کے $(۱ - ل)^{-۲} = ۱ + ۲ ل + ۳ ل^{۲} - \dots + ر ل^{ر-۱} + ب$

اور اس سے ب تغیر کرنا ہی باقیات کو بعد ر اجزاء کی اور

$$\frac{۱}{۱ - ۲ ل + ل^{۲}} = ۱ + ۲ ل + ۳ ل^{۲} + \dots + ر ل^{ر-۱} + ب$$

$$\therefore ۱ = \left\{ \begin{array}{l} ۱ + ۲ ل + ۳ ل^{۲} + \dots \qquad + ر ل^{ر-۱} + ب \\ - ۲ ل - ۴ ل^{۲} + \dots - ۲ (ر - ۱) ل^{ر-۱} - ۲ ر ل^{ر} - ۲ ب ل \\ + ل^{۲} \dots + (ر - ۲) ل^{ر-۱} + (ر - ۱) ل^{ر} + ر ل^{ر+۱} + ب ل^{۲} \end{array} \right.$$

یعنی $ا = ا - (ر+1)$ لاَ + رلا$^{ر+1}$ + ب (ا - لا)^2 ادب = $\frac{(ر+1) لاَ - رلا^{ر+1}}{(ا - لا)^2}$

اسی طرح سے باقیات بعد ر اجزاء کی صورتون معضلہ (ا - لا)$^{-3}$ اور (ا - لا)$^{-4}$ کی دریافت ہوسکتی ہین

واضح ہو کہ ہم جنس حاصلضرب وہ حاصلضرب مقدارون کی کہلاتی ہین جنہین اجزاء ضربی خواہ ایکسے خواہ مختلف ہوتے ہون مثلاً اَ^{3} اور ا بَ^{2} حاصلضرب ہم جنس ہین اسواسطے کہ دونو اجزاء ضربی مین تین تین ہیںٔ

ا × ا × ا اور ا × ا ب × ب ہین اب فرض کرو کہ ن مقدارین ا ب ج س وغیرہ ہین اور ر ر مرتبہ کی حاصلضرب ہم جنس کی تعداد دریافت کیا چاہتے ہین اب بذریعہ عمل نقشہ یا ضابطہ نیوطن صاحب کے یہہ مساواتین حاصل ہونگی

$$\frac{1}{1 - ا لا} = 1 + ا لا + اَ^2 لاَ^2 + اَ^3 لاَ^3 + \text{وغیرہ}$$

$$\frac{1}{1 - ب لا} = 1 + ب لا + بَ^2 لاَ^2 + بَ^3 لاَ^3 \dots + \text{وغیرہ}$$

$$\frac{1}{1 - ج لا} = 1 + ج لا + جَ^2 لاَ^2 + جَ^3 لاَ^3 + \text{وغیرہ}$$

وغیرہ = وغیرہ

$$\therefore \frac{1}{1 - ا لا} \cdot \frac{1}{1 - ب لا} \cdot \frac{1}{1 - ج لا} \cdot \text{وغیرہ} = 1 + (ا + ب + ج + \text{وغیرہ}) لا +$$

$$(اَ^2 + ا ب + بَ^2 + ا ج + ب ج + جَ^2 + \text{وغیرہ}) لاَ^2 +$$

$$(اَ^3 + اَ^2 ب + ا بَ^2 + بَ^3 + اَ^2 ج + بَ^2 ج + ا جَ^2 + جَ^3 + \text{وغیرہ}) لاَ^3$$

+ وغیرہ اور یہان ظاہر ہے کہ سر لاَ^{ر} کا حاصل جمع ر مرتبہ کی حاصلضرب ہون ہم جنس مقدارون اَ بَ جَ وغیرہ کا ہے اب واسطے دریافت کرنے حاصل جمع ان حاصلضربون کے فرض کرو کہ

ا = ب = ج = س = وغیرہ = ۱ اور ∴ اس صورت مین سر لاَ^{ر} کی عدد مطلوب ہوگا لیکن موافق اس فرض کے مساوی ہونے سب مقدارون کے د ہنی طرف مساوات گذشتہ کے (ا - لا)$^{-ن}$ ہوجائیگی اور یہہ موافق ضابطہ نیوطن صاحب کے اس صورت کی ہوتی ہے

$$1 + ن لا + ن \frac{ن+1}{2} لاَ^2 + ن \cdot \frac{ن+1}{2} \cdot \frac{ن+2}{3} لاَ^3 + \text{وغیرہ}$$

$$+ \frac{ن (ن+1) (ن+2) \dots\dots (ن + ر - 1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots\dots\dots ر}$$ اور اسیواسطے

$$\text{عدد مطلوبہ} = \frac{ن (ن+1) (ن+2) \dots\dots (ن + ر - 1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots\dots ر}$$

حکم یہان سے ہم دریافت کر سکتے تعداد اجزا کسی کثیر الاجزا مثل (۱ + ا۲ + ۱۳ + ۱۴ ....۱ ر)^{ن} کی اسواسطے کہ یہہ تعداد مطلوبہ اور تعداد ن مرتبہ کی حاصلضربون ر مقدارون کی ایکسی ہوتی ہی یعنے تعداد مطلوبہ یہہ ہی $\frac{ر(ر+۱)(ر+۲)\cdots(ر+ن-۱)}{۱\times۲\times۳\times\cdots ن}$ اگر ر = ۲ یعنی صورت (۱ + ر)^{ن} ہو تو تعداد مطلوبہ

یہہ ہوگی $\frac{۲\times۳\times۴\cdots(ن+۱)}{۱\times۲\times۳\times\cdots ن} = ن + ۱$

اگر ر = ۳ یعنے صورت (۱ + ب + ج)^{ن} ہو تو تعداد مطلوبہ یہہ ہوگی

$$\frac{۳\times۴\times۵\times\cdots(ن+۲)}{۱\times۲\times۳\times\cdots ن} = \frac{(ن+۱)(ن+۲)}{۱\times۲}$$

اگر ر = ۴ یعنے صورت (۱ + ب + ج + س)^{ن} ہووی تو تعداد اجزا کی ہوگی یہہ

$$\frac{۴\times۵\times۶\cdots(ن+۳)}{۱\times۲\times۳\times\cdots ن} = \frac{(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)}{۱\times۲\times۳}$$

اور یہی قیاس کرنا چاہیئے اور قیمت ر کی یہہ

ضابطہ غیر مقرر نشان قوت کا

چاہتے ہین دریافت کرنا صورت مفصلہ ط لا کی جسمین کہ قوای مختلفہ لا کی پائے جاوین واسطے اثبات اس سلسلہ یا ضابطہ ہم ایک اور طریق لکھتے ہین

$ط^{لا} = \left\{(۱ + ط - ۱)^{ن}\right\}^{\frac{لا}{ن}}$ اور بذریعہ ضابطہ نیوٹن صاحب کے یہہ

$$= \left\{۱ + ن(ط-۱) + ن\frac{ن-۱}{۲}(ط-۱)^{۲} + ن\frac{ن-۱}{۲}\cdot\frac{ن-۲}{۳}(ط-۱)^{۳} + وغیرہ\right\}^{\frac{لا}{ن}}$$

$$= \left\{۱ + \left((ط-۱) - \frac{(ط-۱)^{۲}}{۲} + \frac{(ط-۱)^{۳}}{۳} - وغیرہ\right)ن + ب ن^{۲} + ج ن^{۳} + وغیرہ\right\}^{\frac{لا}{ن}}$$

اور اس جا سے حروف ب ج وغیرہ مین قوای (ط - ۱) کی شامل ہین

$= \Big\{$ ۱ + ا ن + ب ن۲ + ح ن۳ + وغیرہ $\Big\}^{\frac{لا}{ن}}$ اگر ط − ۱ − ½ (ط − ۱)۲ + وغیرہ = ۱

= ۱ + $\frac{لا}{ن}$ (ا ن + ب ن۲ + وغیرہ) + $\frac{لا}{ن}$. $\frac{\frac{لا}{ن} - ۱}{۲}$ (ا ن + ب ن۲ + وغیرہ)۲ + وغیرہ

= ۱ + لا (۱ + ب ن + وغیرہ) + لا $\frac{لا - ن}{۲}$ (۱ + ب ن + وغیرہ)۲ + وغیرہ

اب جو نکہ طلا کو کچھہ تعلق ن سے نہین ہی تو معلوم ہوا کہ ن کی لیئے کوی قیمت فرض کرسکتے ہین اور
∴ فرض کرو کہ ن = ۰ اور اسیواسطے

طلا = ۱ + ۱ لا + $\frac{ا^۲ لا^۲}{۲ × ۱}$ + $\frac{ا^۳ لا^۳}{۳ × ۲ × ۱}$ + وغیرہ

حکم اگر ی ہو وہ قیمت ط کی کہ جسکی ذریعہ سی آ مساوی عدد ا کے ہوجاتا ہی تو ظاہر ہی کہ

یلا = ۱ + $\frac{لا}{۱}$ + $\frac{لا^۲}{۲ × ۱}$ + $\frac{لا^۳}{۳ × ۲ × ۱}$ + وغیرہ پس معلوم ہوا کہ اگر فرض کرین لا = ۱ تو

ی = ۱ + $\frac{۱}{۱}$ + $\frac{۱}{۲ × ۱}$ + $\frac{۱}{۳ × ۲ × ۱}$ + وغیرہ = ۲٫۷۱۸۲۸۱۸

فصل تیسری لوگارثم کے بیان مین حدود اور خواص لوگارثم کی بہلی لکہی جاتے ہین

ان دو سلسلون مقادیر مین ط‌َ طَ‌َ طَ‌َ‌َ طَ‌َ‌َ‌َ وغیرہ (۱) اور دَ دَ‌َ دَ‌َ‌َ دَ‌َ‌َ‌َ وغیرہ (ب)
کہ جنمین ط تو ایک مقدار منقطع ہی اور د دَ دَ‌َ وغیرہ مقادیر غیر منقطع ہین مقادیر سلسلہ (ب) کو لوگارسم مقادیر سلسلہ (۱) کا کہتے ہین مثلاً د لوگارسم طَ کا ہی اور دَ لوگارسم طَ‌َ کا ہی اور اسی قیاس پر
اور اگر فرض کرین ہم طَ = لا اور طَ‌َ = لاَ اور طَ‌َ‌َ = لاَ‌َ وغیرہ تو د = لوگ* لا اور
دَ = لوگ لاَ اور دَ‌َ = لوگ لاَ‌َ اور اسی قیاس پر تاکہ مقادیر سلسلہ (۱) کی مساوی ہوسکین
عدد دن ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ وغیرہ کے تو ضرور ہی کہ عدد مفروض ط زیادہ ہو ایک سی اور اول
نشان تو شیے د مساوی ہو صفر کے اور نشان تو تبالی کے دَ دَ‌َ دَ‌َ‌َ وغیرہ ہمیشہ زیادہ ہوتے
ہین جو نکہ بموجب گذشتہ کی ط‌َ = ۱ تو اسیواسطے یہہ سلسلہ ہمیشہ زیادہ ہوگا ایک سی اب ظاہر ہی کہ

* لوگ اختصار ہی لفظ لوگارسم کا

فرض کرسکتی ہین ہم واسطے ان $\overline{ء'}$ $\overline{ء''}$ $\overline{ء'''}$ $\overline{ء''''}$ کے ایسی مقدار کہ سلسلہ $ط^{ء'}$ $ط^{ء''}$ $ط^{ء'''}$ $ط^{ء''''}$
منطبق ہوسکے سلسلہ عددون $\overline{۲}$ $\overline{۳}$ $\overline{۴}$ $\overline{۵}$ $\overline{۶}$ وغیرہ سے یعنی $ط^{ء'} = ۲$ اور $ط^{ء''} = ۳$ اور اسی
قیاس پر مثلاً فرض کرو ط = ۱۰ اور چونکہ $۱۰^{۰} = ۱$ اور $۱۰^{۱} = ۱۰$ تو معلوم ہوا کہ وے
نشان قوتمن ۱۰ کے جو کرین گے $۱۰^{ء'}$ $۱۰^{ء''}$ $۱۰^{ء'''}$ وغیرہ کو مساوی $\overline{۲}$ $\overline{۳}$ $\overline{۴}$ $\overline{۵}$ $\overline{۶}$ ۰ $\overline{۱۰}$ تک
ضرور ہین کہ واقع ہون مابین $\overline{۰}$ اور $\overline{۱}$ کے مثلاً فرض کرو کہ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا لاگارثم عدد $\overline{۵}$
کی اب $۱۰^{\frac{۳}{۴}} = \sqrt[۴]{۱۰^{۳}} = \sqrt[۴]{۱۰۰۰} = ۵٫۶۲۴$ اور اس سے یہہ نتیجہ نکالتی ہین ہم اگر فرض کرین
ہم نشان قوت ۱۰ کا ایک کسر کچھہ زیادہ $\frac{۲}{۳}$ (= ٫۶۶۶۶۶۶ وغیرہ) سی تو حاصل ہوگا $۱۰^{ء'} = ۵$
حساب سے معلوم ہوا ہی کہ کسر مذکور یہہ ہی ٫۶۹۸۹۷۰۰ بہت قریب اور اسی سبب سے $۱۰^{٫۶۹۸۹۷۰۰} = ۵$
یعنے جسوقت ط = ۱۰ لوکارسم ۵ کی ہی ٫۶۹۸۹۷۰۰ مرقومہ بالا سے واضح ہی کہ مختلف قسم کے
لوکارسم ہوسکتے ہین یعنے اگر ط = ۱۰ تو لوکارسم جو اس فرض سے حاصل ہونگی وے ایک قسم کی
ہونگی اور اگر ط = ۲۰ تو لوکارسم جو اب حاصل ہونگی وہ ایک اور قسم کی ہونگی لیکن چونکہ $ط^{۰} = ۱$ تو اس سے
معلوم ہوا کہ ہر قسم کی لوکارسم مین لوکارسم ۱ کی صفر ہوتی ہی عدد ط کہلاتا ہی عدد بنیادی اوس قسم کی لوکارسم
کا جسکو وہ تعلق رکھتا ہی چونکہ بموجب مرقومہ گذشتہ کی کے $ط^{ء'} \times ط^{ء''} = ط^{ء' + ء''}$ تو معلوم ہوا کہ دو یا زیادہ
عددون کے حاصل ضرب کی لوکارسم مساوی ہوتی ہی حاصل جمع اون عددون کے الگ الگ لوکارسم کے
چونکہ $\frac{ط^{ء'}}{ط^{ء''}} = ط^{ء' - ء''}$ تو معلوم ہوا کہ دو عددون کے خارج قسمت کی لوکارسم مساوی ہوتی ہی الگ
الگ لوکارسم کی حاصل تفریق کی اور یہہ بہی معلوم ہوتا ہی کہ لوکارسم ایک کسر کی مساوی ہی اوسکی جو
حاصل تفریق کرنی سے لوکارسم نسب نما کی لوکارسم شمار کنندہ سی اور اس سے یہہ ظاہر ہوا کہ لوگارسم
ایک کسر مناسب * کی ہمیشہ منفی ہوتی ہی

چونکہ $ط^{ء'} \times ط^{ء'} \times ط^{ء'} \ldots\ldots$ لا تک $= ط^{ء' + ء' + ء' \ldots\ldots}$ لا تک
$= ط^{لا ء'}$ اور اسیطرح چونکہ $\sqrt[لا]{ط^{ء'}} = ط^{\frac{ء'}{لا}}$ تو معلوم ہوا کہ لوگارسم لا کتنی قوت کسی عدد کی
دریافت ہوسکتی ہی ضرب دینی سے اوس عدد کی لوگارسم کو لا مین اور لوگارسم نزول کسی عدد کی لا کتنی
مرتبہ تک دریافت ہوسکتی ہی تقسیم کرنی سے اوس عدد کی لوگارسم کو لا پر اگر سلسلہ (ا) مشتمل ہو مقدارون
اس صورت کی سے $ط^{لا}$ $ط^{۲لا}$ $ط^{۳لا}$ $ط^{۴لا}$ $ط^{۵لا}$ ...... $ط^{م لا}$ تو انکی مطابق مقدار سلسلہ (ب) کی
ہونگی لا ۲لا ۳لا ۴لا ۵لا .... م لا

---

* یعنے وہ کسر جسکا شمار کنندہ نسب نما سی کم ہی

یعنی اگر ایک سلسلہ مقادیر ضرب اور تقسیم کا ہو تو ان مقادیر کی لوگارسم بناتی ایک سلسلہ جمع اور تفریق کا

لوکارتم کی نکالنی کی ترکیب کا بیان

فرض کرو کہ $\text{۱} + \text{م}$ کوئی عدد ہی اور اوسکی لوگارسم د ہی تو بموجب مرقومہ بالا کی $\text{ط}^{\text{د}} = \text{۱} + \text{م}$ اور فرض کرو $\text{ط} = \text{۱} + \text{ص}$ تو اب چاہتے ہیں حل کرنا مساوات $(\text{۱} + \text{ص})^{\text{د}} = \text{۱} + \text{م}$ کو جسمیں د ایک مقدار مجہول ہی ر کتنا صعود دونو طرف اس مساوات کا دریافت کرو تب $(\text{۱} + \text{ص})^{\text{در}} = (\text{۱} + \text{م})^{\text{ر}}$ یعنے

$$\text{۱} + \text{در ص} + \frac{\text{در}(\text{در} - \text{۱})}{\text{۲}}\text{ص}^{\text{۲}} + \frac{\text{در}(\text{در} - \text{۱})(\text{در} - \text{۲})}{\text{۲} \times \text{۳}}\text{ص}^{\text{۳}} + \text{وغیرہ} =$$

$$\text{۱} + \text{رم} + \frac{\text{ر}(\text{ر} - \text{۱})}{\text{۲}}\text{م}^{\text{۲}} + \frac{\text{ر}(\text{ر} - \text{۱})(\text{ر} - \text{۲})}{\text{۲} \times \text{۳}}\text{م}^{\text{۳}} + \text{وغیرہ}$$

نکال ڈالو ۱ کو دونو طرف اس مساوات سے اور تقسیم کرو اونہیں ر پر تو

$$\text{د}\left(\text{ص} + \frac{\text{در} - \text{۱}}{\text{۲}}\text{ص}^{\text{۲}} + \frac{(\text{در} - \text{۱})(\text{در} - \text{۲})}{\text{۲} \times \text{۳}}\text{ص}^{\text{۳}} + \text{وغیرہ}\right) =$$

$$\text{م} + \frac{\text{ر} - \text{۱}}{\text{۲}}\text{م}^{\text{۲}} + \frac{(\text{ر} - \text{۱})(\text{ر} - \text{۲})}{\text{۲} \times \text{۳}}\text{م}^{\text{۳}} + \text{وغیرہ}$$ اب فرض کرو کہ $\text{ر} = \text{۰}$

تو حاصل ہوتا ہی ہمیں $\text{د}\left(\text{ص} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ص}^{\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}}\text{ص}^{\text{۳}} - \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\text{ص}^{\text{۴}} + \text{وغیرہ}\right)$

$$= \text{م} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{م}^{\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}}\text{م}^{\text{۳}} - \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\text{م}^{\text{۴}} + \text{وغیرہ}$$

یعنے $$\text{د} = \text{لوگ}(\text{۱} + \text{م}) = \frac{\text{م} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{م}^{\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}}\text{م}^{\text{۳}} - \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\text{م}^{\text{۴}} + \text{وغیرہ}}{\text{ص} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ص}^{\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}}\text{ص}^{\text{۳}} - \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\text{ص}^{\text{۴}} + \text{وغیرہ}}$$

$$= \frac{\text{م} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{م}^{\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}}\text{م}^{\text{۳}} - \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\text{م}^{\text{۴}} + \text{وغیرہ}}{(\text{ط} - \text{۱}) - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{ط} - \text{۱})^{\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}}(\text{ط} - \text{۱})^{\text{۳}} - \text{وغیرہ}}$$

$$= \text{ع}\left(\text{م} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{م}^{\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}}\text{م}^{\text{۳}} - \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\text{م}^{\text{۴}} + \text{وغیرہ}\right)$$

اگر فرض کریں ہم $$\text{ع} = \frac{\text{۱}}{(\text{ط} - \text{۱}) - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{ط} - \text{۱}) + \frac{\text{۱}}{\text{۳}}(\text{ط} - \text{۱})^{\text{۳}} - \text{وغیرہ}}$$

اور یہہ بات تم یاد رکھو کہ اگر ہم نہ فرض کریں م کو ایک چہوٹی کسر تو یہہ بات خوب ظاہر ہی کہ سلسلہ

جو حاصل ہوا ہی واسطی قیمت آ کی تمام ایسی جلدی سی نہین ہوگا کہ مجموعہ چند پر قیمتون سلسلہ مذکور کا کافی ہو جاوے واسطے قیمت آ مذکور کے *

سو اسی واسطی فرض کرو کہ $م = \frac{۱}{ل-۱}$ یہان ل = ہی ایک عدد کے جو زیادہ ہی ۲ سے تب

$$\frac{۱+م}{۱-م} = \frac{۱+\frac{۱}{ل-۱}}{۱-\frac{۱}{ل-۱}} = \frac{ل}{ل-۲}$$ اور لوگ (۱+م) − لوگ (۱−م)

= لوگ ل − لوگ (ل − ۲) اب لوگ (۱+م) = ... (۱)

$ع\left(م - \frac{۱}{۲}م^۲ + \frac{۱}{۳}م^۳ - \frac{۱}{۴}م^۴ + \frac{۱}{۵}م^۵ - \right)$ وغیرہ) بجای م کے مندرج کیا ہمنی − م

اس مساوات مین تو لوگ (۱−م) = $ع\left(-م - \frac{۱}{۲}م^۲ - \frac{۱}{۳}م^۳ - \frac{۱}{۴}م^۴ - \frac{۱}{۵}م^۵ - \right)$ وغیرہ) تفریق

کیا ہمنی مساوات اول سے دوسری کو تو

لوگ (۱+م) − لوگ (۱−م) = $۲ع\left(م + \frac{۱}{۳}م^۳ + \frac{۱}{۵}م^۵ + \right)$ وغیرہ) یعنی

لوگ ل − لوگ (ل − ۲) = $۲ع\left(م + \frac{۱}{۳}م^۳ + \frac{۱}{۵}م^۵ + \right)$ وغیرہ)

اور لوگ ل = $۲ع\left(م + \frac{۱}{۳}م^۳ + \frac{۱}{۵}م^۵ + \right)$ وغیرہ) + لوگ (ل − ۲) (ط)

جسوقت کوئی قیمت واسطی ع کے مقرر ہو تو سلسلہ بالا بہت خوب سلسلہ ہو جاتا ہی واسطے بنانی ایک کتاب لوگارسم کی

ترکیب بنانے لوگارتم کی کتاب کی

چونکہ ط کو بھی فرض کر سکتے ہین تو اول فرض کرو اسے ایسا کہ $(ط-۱) - \frac{۱}{۲}(ط-۱)^۲ + \frac{۱}{۳}(ط-۱)^۳ -$ وغیرہ یعنی $\frac{۱}{ع}$ کہ مساوی لہ اسکا ہی مساوی آ کے ہو اور اس صورت مین مساوات مرقومہ بالا ہو جاویگی اس شکل کی

لوگ ل = $۲\left(\frac{۱}{ل-۱} + \frac{۱}{۳(ل-۱)^۳} + \frac{۱}{۵(ل-۱)^۵} + \right)$ وغیرہ) + لوگ (ل − ۲)

لیکن چونکہ ل کا زیادہ ہونا ضرور ہی ۲ سے تو اول لازم ہی ہمین دریافت کرنا لوگارتم ۲ کا پہلے بنانے

---

* اگر ایک سلسلہ اس صورت کا ہو $۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} +$ وغیرہ تو ظاہر ہی کہ یہہ سلسلہ اختتام کی طرف نہین مایل ہی اور چونکہ سلسلہ لا انتہا ہی تو اسکی جمع نہین ہو سکتی اس سلسلہ کو سلسلہ دراز کہتی ہین اور اگر ایک سلسلہ اس شکل کا ہو $۱ + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱.۲} + \frac{۱}{۱.۲.۳}$ وغیرہ تو ظاہر ہی کہ یہہ سلسلہ مایل بہ اختتام ہی کہ اگر اسکی چند رقمین جمع کرین قیمت اوس مقدار کی جو مساوی ہی اس سلسلہ کی بہت قریب معلوم ہو سکتی ہی اور اس سلسلہ کو سلسلہ کوتہ کہتے ہین

کتاب لوگارتھم کی اسیوا سطی فرض کرو

ل = ۴ تو لوگ ۴ = لوگ $۲^۲$ = ۲ لوگ ۲ = ۲ $\left(\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳\times۳^۳} + \frac{۱}{۵\times۳^۵}\right.$ + وغیرہ)

+ لوگ ۲ نکالو دو نو طرف اس مساوات کی سی لوگ ۲ کو تو

لوگ ۲ = ۲ $\left(\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳\times۳^۳} + \frac{۱}{۵\times۳^۵}\right.$ + وغیرہ ۷ رقمون تک) = ۰٫۶۹۳۱۴۷۲

اسطرح سے حاصل کرکے لوگارتھم ۲ کی اگر فرض کرین ہم پی دری واسطے ل کی تمام اعداد اصلی سے یعنے اعداد جو نہین پورے سے قسمت ہوسکتے ہین کسی عدد پر سوای اپنی اور عدد ایک کی تو معلوم ہوجائینگی ہمین لوگارتھم اون سب اعداد کی اور بوسیلہ خواص لوگارتھم کے دریافت کرسکتے ہین ہم لوگارتھم اور عددون کی بہت سہولت سے مثلاً

لوگ

۱ = ... = ۰٫۰۰۰۰۰۰۰

۲ = ... ۰٫۶۹۳۱۴۷۲

۳ = ۲ $\left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳\times۲^۳} + \frac{۲}{۵\times۲^۵}\right.$ + وغیرہ ۱۰ رقمون تک) + لوگ $\frac{۱}{۱}$ (۰) = ۱٫۰۹۸۶۱۲۳

۴ = ۲ لوگ ۲ = ... ۱٫۳۸۶۲۹۴۴

لوگ

۵ = ۲ $\left(\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۳\times۴^۳} + \frac{۱}{۵\times۴^۵}\right.$ + وغیرہ + ۶ رقمون تک) + لوگ ۳ = ۱٫۶۰۹۴۳۷۹

۶ = لوگ ۲ + لوگ ۳ = ... = ۱٫۷۹۱۷۵۹۵

۷ = ۲ $\left(\frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۳\times۶^۳} + \frac{۱}{۵\times۶^۵} + \frac{۱}{۷\times۶^۷}\right)$ + لوگ ۵ = ۱٫۹۴۵۹۱۰۱

۸ = لوگ ۴ + لوگ ۲ یا لوگ $۲^۳$ = ۳ لوگ ۲ = ۲٫۰۷۹۴۴۱۵

۹ = لوگ $۳^۲$ = ۲ لوگ ۳ .... = ۲٫۱۹۷۲۲۴۶

۱۰ = لوگ ۵ + لوگ ۲ .... = ۲٫۳۰۲۵۸۵۱

وغیرہ = وغیرہ .... = وغیرہ

اس قسم کی لوگارسم کہ جو یہی ہین فرض کرتی سے ع = اسکے لوگارتھم نیپری کہلاتی ہین کیونکہ نیپر صاحب نے اونہین ایجاد کیا تہا اسی قسم کی لوگارتھم کو لوگارتھم بعید البیضوی بہی کہتے ہین کیونکہ وہ تعلق رکھتے ہین ساحت بعید البیضوی مساوی القطرین کی سے سوای لوگارتھم نیپر کی ایک اور قسم کی بہی لوگارسم ہوتی ہین جنکو لوگارسم مروج کہتے ہین اس قسم کی لوگارسم مین ط فرض کیا گیا ہی = ۱۰

∴ ط٢ = ١٠٠ اور ط٣ = ١٠٠٠ اور ط٤ = ١٠٠٠٠ اور اس سے یہہ معلوم ہوا کہ اعداد ١٠ ١٠٠ ١٠٠٠ یا ١٠٠٠٠ وغیرہ کی لوگارسم ١ ٢ ٣ ٤ وغیرہ ہین تا کہ معلوم ہو جاوے ہمین لوگارسم ان اعداد کی جو واقع ہین مابین عددون ١٠ اور ١٠٠ آ کے اور ١٠٠ اور ١٠٠٠ کی وغیرہ لازم ہی ہمین اول دریافت کرنا قیمت ع کی جسوقت ط = ١٠ اور اوسکی ترکیب یہہ ہی اوس قسم کی لوگارتم مین جسکا عدد مفروضہ ع ہی

لوگ (١ + م) = ع (م − ½ م٢ + ⅓ م٣ − وغیرہ) اور لوگارتم نیپری مین

لوگ (١ + م) = م − ½ م٢ + ⅓ م٣ − وغیرہ تو معلوم ہوا کہ اوس قسم کی لوگارتم مین جنمین عدد مفروضہ = ع کی ہی لوگ (١ + م) = ع × نیپری لوگ (١ + م) اب لوگارتم مروج مین ١ + م = ١٠ تو لوگ ١٠ = ع × نیپری لوگ ١٠ یعنے ١ = ع × ٢٫٣٠٢٥٨٥١ اور

ع = ١ / ٢٫٣٠٢٥٨٥١ = ٠٫٤٣٤٢٩٤٤٨ تا کہ دریافت ہو جاوے ہمین لوگارتم مروج اعداد کی چاہئے ہمین لکھنا اس قیمت ع کو مساوات (ط) مین تو حاصل ہوتا ہی

لوگ ل = ٠٫٨٦٨٥٨٨٩٦ × (١/(٢ل − ١) + ١/(٣(٢ل − ١)٣) + ١/(٥(٢ل − ١)٥) + وغیرہ)

+ لوگ (ل − ١) .... (٢)

اور اگر ہم فرض کرین پی در پے اعداد اصلی واسطی ل کے تو بوسیلہ اس مساوات کی فہرست ذیل بن جاویگی

لوگ مروج ٢ = ٠٫٨٦٨٥٨٨٩٦ (⅓ + ١/(٣ × ٣٣) + ١/(٥ × ٣٥) + وغیرہ ۸ رقمون تک) = ٠٫٣٠١٠٣٠

٣ = ٠٫٨٦٨٥٨٨٩٦ (⅕ + ١/(٣ × ٥٣) + ١/(٥ × ٥٥) + وغیرہ ۱۰ رقمون تک) = ٠٫٤٧٧١٢١٣

٤ = ٢ لوگ ٢ .... = ٠٫٦٠٢٠٦٠٠

٥ = لوگ ١٠/٢ = لوگ ١٠ − لوگ ٢ = ١ − لوگ ٢ .... = ٠٫٦٩٨٩٧٠٠

٦ = لوگ ٣ + لوگ ٢ .... = ٠٫٧٧٨١٥١٣

٧ = ٠٫٨٦٨٥٨٨٩٦ (١/١٣ + ١/(٣ × ١٣٣) + ١/(٥ × ١٣٥) + ١/(٧ × ١٣٧)) + لوگ ٦ = ٠٫٨٤٥٠٩٨٠

اسیطرح سب اعداد اصلی کی لوگارسم دریافت ہو سکتی ہین اور ظاہر ہی کہ جتنے اعداد بڑے ہونگی اوتنی ہی کم رقمین سلسلہ مین ضرور ہونگی واسطے دریافت کرنے اونکی لوگارتم کی ۔ ہم سے آ کے صرف آ ہی رقم ضرور ہوگی وہ قیمت ط کی جسکی وسیلے سے سلسلہ (ط − ١) − (ط − ١)٢/٢ + وغیرہ مساوی آ کے ہو جاوے سلسلہ غیر متقررہ مین جو فصل گذشتہ مین ثابت ہوا ہی دریافت ہوئی ہی

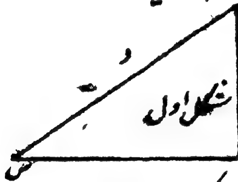
فصل چوتھی بیچ بیان حل کرنے سوالات ہندسی کے بوسیلہ جبر و مقابلہ کے

حدود

مثلث قایم الزاویہ کی طرفون کا ریاضی والون سینے علیحدہ علیحدہ نام رکھا ہی جو طرف کہ واقع ہوتی ہی سامنی قایمہ کے اوسیے وتر کہتے ہین اور باقی دو طرفون مین سیے ایک کو قاعدہ اور دوسری کو عمود کہتے ہین اگر ایک شکل چار ضلع کی ہو اور اوسکے سامنی کے دو گوشون مین ایک خط مستقیم وصل کیا جاے تو اوس خط کو قطر سطح کہتے ہین اگر ایک مثلث کی ایکطرف کو ہم قاعدہ مقرر کرین تو جس نقطہ پر باقی دو ضلعے الیسین تقاطع کرین اوس نقطہ کو راس مثلث کی کہتے ہین اور اگر خط عمود راس سے قاعدہ پر کھینچا جاوے اوس خط کو ارتفاع مثلث کہتے ہین ظاہر ہی کہ یہہ عمود تقسیم کرتا ہی قاعدہ کو دو حصون مین اور ہر دو ان حصون کو بازو کہتے ہین جو چھوٹا ہی اوس سے بازو خورد کہتے ہین اور جو حصہ بڑا ہی اوسیے بازو کلان کہتے ہین

سوالات مثلثون کے

سوال ۱ ا ب س ایک مثلث قایم الزاویہ ہی فرض کرو کہ معلوم ہین قاعدہ ب س اور مجموعہ وتر ا س اور عمود ا ب کا دریافت کرنا چاہتے ہین ہم علیحدہ علیحدہ مقدار عمود اور وتر کی سوال سیے واضح ہی کہ عمود اور وتر مقداریں مجہول ہین اور اسیواسطی فرض کرو عمود ا ب = لا اور وتر ا س = د لیکن مجموعہ عمود اور وتر کا اور مقدار قاعدہ کی معلوم ہی فرض کرو مجموعہ = ح اور قاعدہ = ط تب لا + د = ح لیکن بحکم ۴۷ شکل اول مقالہ اقلیدس کے $\text{لا}^2 + \text{ط}^2 = \text{د}^2$ لیکن لا = ح − د



اور $\text{لا}^2 = \text{ح}^2 - 2\,\text{ح}\,\text{د} + \text{د}^2$ اور یہی $\text{لا}^2 = \text{د}^2 - \text{ط}^2$ تو $\text{ح}^2 - 2\,\text{ح}\,\text{د} + \text{د}^2 = \text{د}^2 - \text{ط}^2$

اور $\text{ح}^2 - 2\,\text{ح}\,\text{د} = -\text{ط}^2$ اور $2\,\text{ح}\,\text{د} = \text{ح}^2 + \text{ط}^2$ اور $\text{د} = \frac{\text{ح}^2 + \text{ط}^2}{2\,\text{ح}}$ لیکن

$\text{لا} = \text{ح} - \text{د} = \text{ح} - \frac{\text{ح}^2 + \text{ط}^2}{2\,\text{ح}} = \frac{\text{ح}^2 - \text{ط}^2}{2\,\text{ح}}$ اگر ایک مثلث قایم الزاویہ کا قاعدہ = ط اور فرق اوسکے وتر اور عمود کا = ص تو اوسکے وتر اور عمود کے مقدار الگ الگ کیا ہی فرض کرو کہ عمود = لا تب وتر = لا + ص اور $\text{لا}^2 + \text{ط}^2 = (\text{لا} + \text{ص})^2 = \text{لا}^2 + 2\,\text{لا}\,\text{ص} + \text{ص}^2$ اور $\text{لا} = \frac{\text{ط}^2 - \text{ص}^2}{2\,\text{ص}}$

ایک مربع ہی کہ فرق اوسکے ایک طرف اور قطر کا = ط اور ہم دریافت کرنا چاہتے ہین سب اضلاع مربع کی فرض کرو کہ ایک ضلع مربع کا = لا تب موافق شرایط سوال کے قطر مربع کا = لا + ط ہے اور

$\text{لا}^2 + \text{لا}^2 = 2\,\text{لا}^2 = \text{لا}^2 + 2\,\text{لا}\,\text{ط} + \text{ط}^2$ اور

$\text{لا}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{ط} = \text{ط}^2$ اور $\text{لا}^2 - 2\,\text{ط}\,\text{لا} + \text{ط}^2 = \text{ط}^2 + \text{ط}^2 = 2\,\text{ط}^2$ اور $\text{لا} - \text{ط} = \sqrt{2\,\text{ط}^2} = \text{ط}\sqrt{2}$ اور $\text{لا} = \text{ط} + \text{ط}\sqrt{2}$

۴۲ ایک ایسا مستطیل ہے کہ نصف مجموعہ اوسکی اضلاع کا = س اور قطر اوسکا = ط ہم جانا چاہتے ہیں مقدار ہر ضلع کی علیحدہ علیحدہ فرض کرو کہ اوسکا عرض = لا تو بموجب شرایط سوال کے

س − لا = طول اور $(س - لا)^2 + لا^2 = ط^2$ اور $س^2 - ۲ س لا + لا^2 + لا^2 = ط^2$

∴ $۲ لا^2 - ۲ س لا = ط^2 - س^2$ تقسیم کرو دو پر ہر دو طرف اس مساوات کو تب

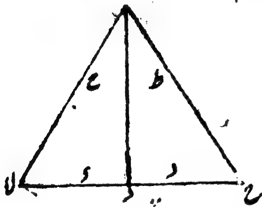
$لا^2 - س لا = \frac{ط^2 - س^2}{۲}$ اور حل کرنے اس درجہ دویم کی مساوات سے ہم پاتے ہیں

$$لا^2 - س لا + \frac{س^2}{۴} = \frac{ط^2 - س^2}{۲} + \frac{س^2}{۴} = \frac{۲ ط^2 - س^2}{۴}$$ اور

$$لا - \frac{س}{۲} = \pm \frac{۱}{۲}\sqrt{۲ ط^2 - س^2}$$ اور

$$لا = \frac{س}{۲} \pm \frac{۱}{۲}\sqrt{۲ ط^2 - س^2}$$

۴۳ معلوم ہیں ہمیں سب اضلاع ایک مثلث کی اور چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا مقدار ارتفاع مثلث کی مثلاً فرض کرو مثلث ب ح لا کا



خط $\overline{ب ح}$ معلوم ہے = ط اور ب لا = ح

اور قاعدہ ح لا = س کیا ہے مقدار عمود

$\overline{ب د}$ کے فرض کرو مجہول مقدار $\overline{ب د}$ = لا اور مجہول ح د = د اور د لا = ذ تب

$$\begin{cases} د + ذ = س \\ لا^2 + د^2 = ط^2 \\ لا^2 + ذ^2 = ح^2 \end{cases}$$ اور

اور تفریق کرو تیسری مساوات کو دوسری مساوات سے اور حاصل یہہ ہے $د^2 - ذ^2 = ط^2 - ح^2$

لیکن چونکہ د + ذ = س تو د = س − ذ اور

$د^2 = (س - ذ)^2 = س^2 - ۲ س ذ + ذ^2$ اور اس قیمت $د^2$ کو مساوات

$د^2 - ذ^2 = ط^2 - ح^2$ مین لکھو تب $س^2 - ۲ س ذ + ذ^2 - ذ^2 = س^2 - ۲ س ذ = ط^2 - ح^2$

اور $س^2 + ح^2 - ط^2 = ۲ س ذ$ اور $ذ = \frac{س^2 + ح^2 - ط^2}{۲ س}$ اور

$د = س - ر = س - \frac{س^2 + ح^2 - ط^2}{2 س} = \frac{س^2 + ط^2 - ح^2}{2 س}$ لیکن

$ط^2 - د^2 = ط^2 - \left(\frac{س^2 + ط^2 - ح^2}{2 س}\right)^2 = ل^2$ اور $ل = \pm \sqrt{ط^2 - \left(\frac{س^2 + ط^2 - ح^2}{2 س}\right)^2}$

مثلاً ایک اب مثلث ہی کہ مقدار ایک اوسکی ضلع کی ۱۰ آ ہی اور دوسریکی ۱۷ اور مقدار قاعدہ کی ۲۱ بتاؤ کیا مقدار ہی ارتفاع مثلث کی اور قاعدہ اور دو بازو کی اوس صورت مین

ط = ۱۰ اور ح = ۱۷ اور س = ۲۱ تو

$ل = \pm \sqrt{100 - \left(\frac{441 + 100 - 289}{42}\right)^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$

ارتفاع اور $د = \frac{س^2 + ط^2 - ح^2}{2 س} = \frac{441 + 100 - 289}{42} = 6$

اور ر = ۲۱ - ۶ = ۱۵ شکل ۱۴ اول مقالہ سی ثابت ہوا ہی کہ اگر ایک مثلث کی قاعدہ اور ارتفاع کو آپسمین ضرب دو تو نصف حاصل ضرب مساحت مثلث کی ہوتی ہی اور چونکہ بموجب قاعدہ مرقومہ بالا کی جب تین ضلعے ایک مثلث کی معلوم ہون تو اوسکی ارتفاع معلوم ہوسکتی ہی تو یہ ظاہر ہی کہ اگر اس ارتفاع کو قاعدہ مین ضرب دین تو مساحت بہی اوس مثلث کی معلوم ہوجایگی مثلاً مثال مرقومہ بالا مین ارتفاع اوس مثلث کی جسکی دو طرف تو ۱۰ آ اور ۱۷ آ ہین اور قاعدہ ۲۱ ہی ۸ معلوم ہوئی ہی اور اگر ارتفاع کو یعنی ۸ کو قاعدہ مین یعنے ۲۱ مین ضرب دین تو حاصل ضرب ۱۶۸ ہوتا ہی اور نصف اسکا یعنی ۸۴ مثلث کی ہی چونکہ ہر شکل کیسی ہی کی قاعدہ ہو مثلثون مین تقسیم ہوسکتی ہی تو بوسیلہ مساحت مثلث کی ہم سب شکلون مستقیم الاضلاع کی مساحت معلوم کرسکتے ہین مرقومہ بالا سی ظاہر ہی کہ ارتفاع مثلث کی یعنی

$ل = \pm \sqrt{ط^2 - \frac{(س^2 + ط^2 - ح^2)^2}{4 س^2}}$ تو

$ل^2 = ط^2 - \frac{(س^2 + ط^2 - ح^2)^2}{4 س^2} = \frac{4 س^2 ط^2 - (س^2 + ط^2 - ح^2)^2}{4 س^2}$

$= \frac{(2 س ط + س^2 + ط^2 - ح^2)(2 س ط - س^2 - ط^2 + ح^2)}{4 س^2}$

$$=\frac{\left((\text{س}+\text{ط})^{2}-\text{ح}^{2}\right)\times\left(\text{ح}^{2}-(\text{ط}-\text{س})^{2}\right)}{4\,\text{س}^{2}}$$

$$=\frac{(\text{س}+\text{ط}+\text{ح})(\text{س}+\text{ط}-\text{ح})\times(\text{ح}+\text{ط}-\text{س})(\text{ح}+\text{س}-\text{ط})}{4\,\text{س}^{2}}$$

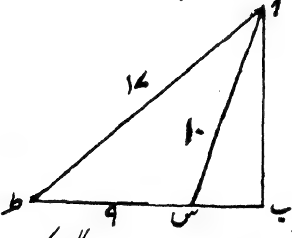
اور $\frac{\text{لا}\,\text{س}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\text{س}+\text{ط}+\text{ح})(\text{س}+\text{ط}-\text{ح})}{2}\cdot\frac{(\text{ح}+\text{ط}-\text{س})(\text{ح}+\text{س}-\text{ط})}{2}}$

$$=\sqrt{\frac{\text{س}+\text{ط}+\text{ح}}{2}\cdot\frac{\text{س}+\text{ط}-\text{ح}}{2}\cdot\frac{\text{ح}+\text{ط}-\text{س}}{2}\cdot\frac{\text{ح}+\text{س}-\text{ط}}{2}}$$

اور اگر فرض کرین که $\frac{\text{س}+\text{ط}+\text{ح}}{2}=\text{ص}$ تو سطح مثلث

$$=\text{لا}\times\frac{\text{س}}{2}=\sqrt{\text{ص}(\text{ص}-\text{ح})(\text{ص}-\text{س})(\text{ص}-\text{ط})}\;\ldots\ldots(1)$$

مثال ۱ ایک شخص ایک مکان کی چھت پر جانی کی لیئے نردبان که اوسکا طول ۱۰ گز تھا لگایا چاہتا تھا لیکن اتفاقاً نردبان ۷ گز کم نکلی اگر وه ۷ گز زیاده ہوتی تو چھت تک پہونچتی اب شخص مذکور مکان کی طرف ۹ گز گیا تب نردبان چھت تک پہونچی بتاو مکان کی کیا بلندی ہے اور شخص مذکور اول دفع مکان مذکور سے کتنے فاصله پر تھا اور دوسری دفع کتنے فاصله پر تھا



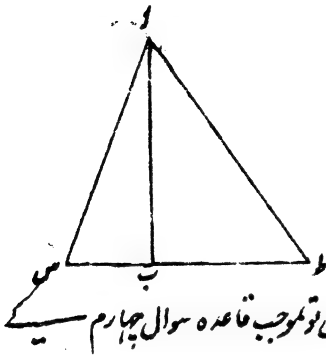
فرض کرو که اب ہی مکان اور ا ط ایک خط مساوی ہی نردبان مع ۷ گز کے یعنی کل ۱۷ گز ہی اور ا س = نردبان = ۱۰ اور س ط = ۹ اب ظاہر ہی که معلوم ہین ہمین تینون ضلعی مثلث ا س ط کے تو بموجب قاعده سوال چہارم کے بازو

$$\text{ب ط}=\frac{۱۷^{2}+۹^{2}-۱۰^{2}}{۲\times۹}=\frac{۲۸۹+۸۱-۱۰۰}{۲\times۹}=\frac{۲۷۰}{۱۸}=۱۵$$

اور بلندی اب $=\sqrt{۱۷^{2}-۱۵^{2}}=\sqrt{۶۴}=۸$ اور ب س $=۱۵-۹=۶$

مثال ۲ دو شخص دو مخالف طرفون ایک مینار کی بفاصله ۲۱ گز کے سے تھے ایک نی تو ۱۰ گز

کی نردبان لگائی اور دوسرے نے ۷ اگز کی اور دونو کی نردبان چوٹی مینار تک پہونچیں بتاو بلندی مینار کی اور فاصلہ ہر شخص کا مینار سے آب مینار ہی اور ط اور س دو شخص ہیں اور نردبان ا س = ۱۰ اگز اور نردبان ا ط = ۷ اگز کے اور فاصلہ درمیان ط اور س کے = ۲۱ اب ظاہر ہی کہ معلوم ہیں تینوں ضلعی آط اور اس اور ط س مثلث ط ا س سے کے

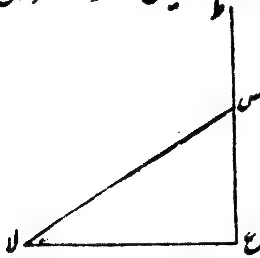


اور معلوم ہوسکتی ہی بلندی آب اور بازو طب اور ب س کی تو بموجب قاعدہ سوال چہارم سے کے

$$ب\ س = \frac{\overline{۱۷}^۲ - \overline{۱۰}^۲ + \overline{۲۱}^۲}{۲۱ \times ۲} = \frac{۲۸۹ - ۱۰۰ + ۴۴۱}{۴۲} = \frac{۲۵۲}{۴۲} = ۶$$

$$اور\ طب = ۲۱ - ۶ = ۱۵\ اور\ آب = \sqrt{\overline{۱۰}^۲ - \overline{۶}^۲} = \sqrt{۶۴} = ۸$$

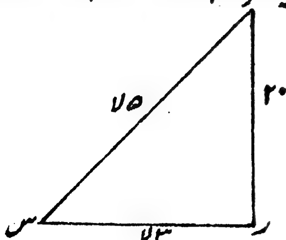
۳ ایک بانس کہ اوسکا طول ۸ گز تھا زمین میں گڑا ہوا تھا اندہی چوچلی وہ کسی جای بیچ میں سے ٹوٹ گیا اور اوسکا اوپر کا سرا زمین سے آ لگا بعد اسکی دریافت ہوا کہ فاصلہ درمیان دونو سروں سے کے ۴ گز تھا بتاو بانس کس جای سے ٹوٹا چونکہ معلوم ہی ہمیں کہ ط ع یعنے س ع + س لا کہ حاصل جمع عمود اور وتر کا ہی مساوی ۸ کے ہی اور ع لا ۲ یعنے س لا ۲ − س ع ۲ کہ حاصل تفریق مجذوروں عمود اور وتر کا ہی مساوی ہی ۱۶ کے تو بموجب قاعدہ سوال اول سے کے



$$س\ لا = \frac{\frac{۱۶}{۸} + ۸}{۲} = \frac{۲ + ۸}{۲} = \frac{۱۰}{۲} = ۵$$

$$اور\ س\ ع = \frac{\frac{۱۶}{۸} - ۸}{۲} = \frac{۶}{۲} = ۳$$ تو معلوم ہوا کہ بانس مذکور ۳ گز کی بلندی سے ٹوٹا

۴ ایک مینار پر ایک مور بیٹھا ہوا تھا اوسنے مینار کی جڑ میں ایک سانپ دیکھا اور سانپ نی اوسی دیکھا اور بھاگا اور مور اوسکی پکڑنی کے واسطی اوڑا رفتار ۵ گز فی پل اور سانپ کی رفتار ۳ گز تھی اور بلندی مینار کی ۲۰ گز تھی بتاو مور سانپ کو کتنی دیر میں پکڑیگا اور کتنی مسافت سانپ اور مور طی کریگی فرض کرو کہ لا = وقت مطلوبہ کی اور ا ب = مینار = ۲۰ تو ظاہر ہی کہ رس = ۳ لا اور اس = ۵ لا



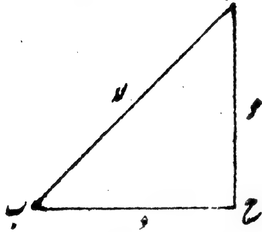
(۵ لا)^۲ − (۳ لا)^۲ = ۲۵ لا^۲ − ۹ لا^۲ = ۱۶ لا^۲ = ۲۰^۲ = ۴۰۰ اور

√۱۶ لا^۲ = √۴۰۰ یعنے ۴ لا = ۲۰ اور لا = ۲۰/۴ = ۵ = وقت مطلوب ہے

۳ لا = ۳ × ۵ = ۱۵ = رس مسافت سانپ ہے اور

۵ لا = ۵ × ۵ = ۲۵ = مسافت مور کے

۵ معلوم ہی ہمین حاصل جمع اور حاصل تفریق وتر او رعمود ایک مثلث قائمہ الزاویہ کا چاہتے ہین ہم دریافت کرنا قیمت عمود اور قاعدہ اور وتر کی



الگ الگ فرض کرو قاعدہ ح ب = د اور عمود ا ح = د اور وتر ا ب = لا تو بموجب شرایط سوال کے لا + د = ط = مقدار معلوم کی اور لا − د = س = مقدار معلوم ہے تو ظاہر ہی کہ ۲ لا = ط + س اور لا = (ط + س)/۲ اور اسیطور سی د = (ط − س)/۲ اور یاگر ضرب دین ہم لا + د = ط کو لا − د = س مین تو حاصل ہوتا ہی لا^۲ − د^۲ = ط س لیکن لا^۲ − د^۲ = د^۲ تو معلوم ہوا کہ

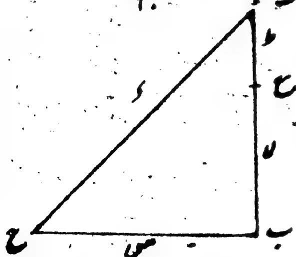
د = √(لا^۲ − د^۲) = √ط س مثلاً اگر حاصل جمع = ۸ اور حاصل تفریق

= ۲ تو لا = (ط + س)/۲ = (۸ + ۲)/۲ = ۱۰/۲ = ۵ اور

د = (ط − س)/۲ = (۸ − ۲)/۲ = ۶/۲ = ۳ اور

د = √(لا^۲ − د^۲) = √ط س = √۸ × ۲ = √۱۶ = ۴

۶ معلوم ہی ہمین ایک مثلث قائمہ الزاویہ کے عمود کا ٹکڑا ا ع اور اوسکا قاعدہ اور جانتی ہین ہم کہ حاصل جمع قاعدہ اور باقی ٹکڑے عمود مذکور کا مساوی ہی حاصل جمع وتر اور پہلے ٹکڑے عمود کی چاہتے ہین دریافت کرنا وتر کو اور دوسری ٹکڑے عمود کو



معلوم ہی ہمین ا ع = ط اور قاعدہ ب ح = س اور جانتے ہین ہم کہ ا ع + ا ح = ع ب + ب ح فرض کرو کہ ع ب اور ا ح کہ مقدار مجہول ہین مساوی لا اور د کے اب ظاہر ہی کہ √((ط + لا)^۲ + س^۲) = د

اور بموجب شرطوں سوال کے لا + س = ط + √((ط + لا)² + س²)

یعنی √((ط + لا)² + س²) = لا + س − ط مجذور کرو دونو طرف اس مساوات کو

تو (ط + لا)² + س² = (لا + س − ط)² =

لا² + ۲ س لا − ۲ ط لا − ۲ س ط + س² + ط² یعنی

ط² + ۲ ط لا + لا² + س² = لا² + س² + ط² + ۲ س لا − ۲ ط لا − ۲ س ط اور

۲ ط لا = ۲ س لا − ۲ ط لا − ۲ س ط یا ط لا = س لا − ط لا − س ط

اور س لا − ۲ ط لا = لا (س − ۲ ط) = س ط اور لا = س ط / (س − ۲ ط)

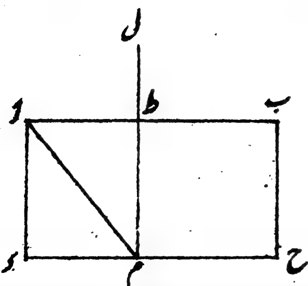
اور د = √((ط + س ط / (س − ۲ ط))² + س²) مثلاً فرض کرو کہ

ط = ۲ اور س = ۶ تو لا = ۲ × ۶ / (۶ − ۴) = ۱۲ / ۲ = ۶

د = √((۶ × ۲)² + ۶²) = √(۳۶ + ۶۴) = √۱۰۰ = ۱۰

مثال ۵ فرض کرتے ہیں ہم کہ خط آب ایک مکان ہی اور مقام ع پر ایک دریچہ ہی اور آح ایک زینہ ہی دریچہ ع میں ایک شخص ہی اور مقام ح پر ایک دوسرا شخص ہی اس شخص نے پہلی شخص سی یہہ کہا آپ جلدی نیچے رستہ اوتر آئیے اوسنی جواب دیا کہ خواہ مین اوپر چڑھ کر لکڑی کے زینہ کی رستہ آؤن خواہ کٹھڑکی زینہ سی اوتر کی آؤن مجھے دونو صورتومین مسافت ایک سی طے کرنی پڑیگی اب فرض کرو کہ معلوم ہی ہمین فاصلہ آع اور ب ح کا تو بتاو دریچہ زمین سے کتنا بلند ہی اور زینہ کا کیا طول ہی ظاہر ہی کہ یہہ سوال حل ہوسکتا ہی بعینہ بطور مرقومہ بالا کے

مثال ۱۶ ا ب ح د ایک تالاب ہی اور ایک درخت ل م کا ہی ایک حصہ اوس درخت کا ط م تو پانی کے اندر ہی اور دوسرا حصہ ل ط باہر پانی کے اگر درخت ل م کو جہکا دین طرف کنارہ کے تو نقطہ ل کا منطبق ہوتا ہی آ پر اور درخت ل م خط آ م پر

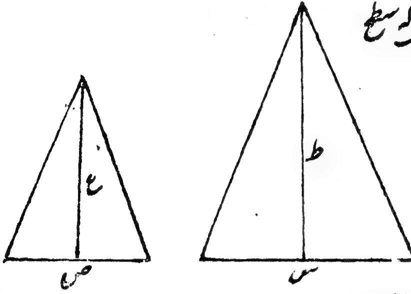


جاتے ہین ہم مقدار ل ط اور ط آ کے بتاو درخت کا کتنا طول ہی اور وہ کتنا پانی کے اندر ہی فرض کرو ط ل اور ط آ کہ مقدارین معلوم ہین مساوی ط اور س کے اور فرض کرو ط م

کہ مقدار مجہول ہی مساوی لاَ کے تو ظاہر ہی کہ خط م ل بینے
$\overline{اَم} = لا + ط$ اور $لاَ^۲ + س^۲ = (لا + ط)^۲ = لاَ^۲ + ۲ لا ط + ط^۲$ یعنے
$۲ لا ط + ط^۲ = س^۲$ اور $لا = \frac{س^۲ - ط^۲}{۲ ط} = \frac{(س + ط)(س - ط)}{۲ ط}$ اور طول درخت کا کہ مساوی
$\overline{اَم}$ کے ہی $= لا + ط = \frac{س^۲ - ط^۲}{۲ ط} + ط = \frac{س^۲ + ط^۲}{۲ ط}$ مثلاً فرض کرو کہ جز درخت نہ کو رکا باہر
پانی کے $= ۲$ اور فاصلہ درخت کا کنارہ سے $= ۶$ تو ظاہر ہی کہ جز درخت کا کہ پانی کے اندر ہی
$= \frac{(۶ + ۲)(۶ - ۲)}{۲ \times ۲} = \frac{۳۲}{۴} = ۸$
اور طول درخت $= \frac{۶^۲ + ۲^۲}{۲ \times ۲} = \frac{۴ + ۳۶}{۴} = \frac{۴۰}{۴} = ۱۰$

ضابطہ

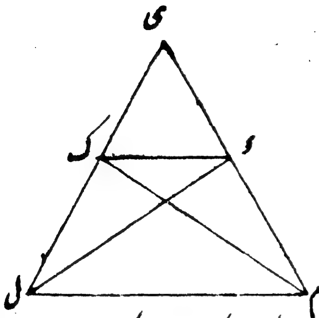
۱ اگر فرض کرین ہم قاعدہ بڑی مثلث کا $=$ س اور اوسکے ارتفاع $=$ ط اور قاعدہ چہوٹی مثلث کا $=$ ص اور اوسکے ارتفاع $=$ ع تو ظاہر ہی کہ سطح بڑے مثلث کی $= \frac{ط س}{۲}$ اور سطح چہوٹے مثلث کی $= \frac{ع ص}{۲}$ اور اگر فرض کرین ہم بڑے مثلث کی سطح $= ۱$ اور چہوٹے



مثلث کی $=$ ب تو ظاہر ہی کہ ۱ : ب : : $\frac{ط س}{۲}$: $\frac{ع ص}{۲}$ یعنی ۱ : ب : : ط س : ع ص اس سے یہہ معلوم ہوا کہ ایک مثلث دوسرے مثلث سی وہ نسبت رکہتا ہی جو حاصل ضرب ارتفاع ایک مثلث کا اوسکی قاعدہ مین نسبت رکہتا ہی حاصل ضرب ارتفاع دوسرے مثلث کی اور اوسکی ارتفاع مین اگر فرض کرین ہم کہ ط $=$ ع تو مرقومہ بالا سی ظاہر ہی کہ ۱ : ب : : ط س : ط ص یعنے ۱ : ب : : س : ص اس سے یہہ معلوم ہوا کہ اگر دو مثلث ایسے ہون کہ اونکی ارتفاع برابر ہون تو دے ایک دوسری سے وہ نسبت رکہتے ہین جو اونکی قاعدے اپسمین رکہتے ہین یہہ شکل ۶ مقالہ اقلیدس ہی بخوبی ثابت کی گئی ہی اور چونکہ یہہ بہت فائدہ مند ہی اور اس پر علم مثلث بہی موقوف ہی تو ہمنی اسے بوسیلہ دلائل جبریہ کی ثابت کیا تاکہ پڑہنی والون اس کتاب کو ضرورت تحصیل ساری اقلیدس کی نہ پڑے

ضابطہ

۲ مثلث ی ل م میں فرض کرتے ہین ہم کہ خط وک متوازی ہی اَ م سے کہ قاعدہ ہی مثلث کا تو ظاہر ہی

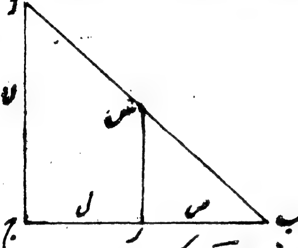


کہ مثلث د ک م = مثلث د ک ل سے کم اور تعبیر
کرتے ہین ہم ہر ایک کو ان مثلثون مین سے = ا
اور مثلث ی د ک = ب کی اب بموجب ضابطہ
پہلی سے ظاہر ہی کہ

ی د : د م :: ب : ا اور ی ک : ک ل :: ب : ا

∴ ی د : د م :: ی ک : ک ل اور ی د + د م : ی د :: ی ک + ک ل : ی ک

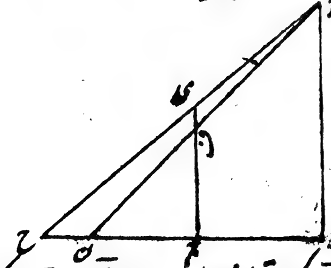
یعنے ی م : ی د :: ی ل : ی ک اور اگر منطبق کرین زاویہ ی د ک کو اوپر زاویہ ی م ل کے تو ثابت
ہوگا کہ ی م : م ل :: د ی : د ک اور اسیطرح سے ثابت ہو سکتا ہی کہ ی ک : ک د :: ی ل : ل م
اس سے یہہ معلوم ہوا کہ خطوط ی د اور ی ک جو ہین مثلث ی د ک کے متناسب ہین خطون ی م اور ی ل
بڑی مثلث کی اور چونکہ بسبب متوازی ہونی خط د ک کی خط م ل کو سے دونون مثلثات ایسین متساوی
الزوایا ہین تو ظاہر ہوا کہ ہر مثلث متساوی الزوایا کی اضلاع متناسب ہوتی ہین ہم اب بیان کرتے ہین
چند فوائد ضابطہ ۳ سے فرض کرو کہ س ایک لکڑی بمقدار معلوم سطح زمین پر عمود ہی اور متوازی ہی ایک منارہ



سے کہ لا ہی اور مقدار خط ج ب معلوم ہی اور ب پر
قایم ہو کر س اور لا کا راس نمودار ہوتا ہی اسطرح
کہ ا ب ایک خط مستقیم وصل ہو سکتا ہی درمیان
نقطہ ب اور راسون مذکورہ سے لا کو معلوم کرو
فرض کرو ب ر = ص اور ر ج = ل سے پس بسبب اسکی کہ بحکم ضابطہ ۳ کے

ص : س :: ص + ل : لا ∴ معلوم ہوا کہ $\frac{س ص + س ل}{ص}$ = لا وہو المراد اسیطرح سے

ی ح ایک لکڑی متوازی منارہ ا ہ سے ہی اور ف ایک سوراخ لکڑی مین ہی اور اس منارہ کا مقام ن ح



اور ر ح سے دکھائی دیتا ہی چاہتے ہین ہم دریافت کرنا
بلندی منارہ کی اور اوسکا فاصلہ مقامون ح اور ر ح
سے پیمایش کرو خط ح ح اور ح ن اور ح ف
اور ح ی کو اور فرض کرو ح ح = س اور ح ن = ط
اور ح ف = ص اور ی ح = ع اور فرض کرو کہ ا ہ اور ج ہ کہ مقدار مجہول ہین = لا اور ر کے
تو ظاہر ہی کہ بحکم ضابطہ (۲) سے کے

ط : ص :: ط + ر : لا یعنے (ص ر + ص ط) / ط = لا اور

س : ع :: س + ر : لا کو یعنے (ع س + ع ر) / س = لا پس

(ص ر + ط ص) / ط = (ع س + ع ر) / س اور حاصل ضرب دونوکا ط مین یہہ

ص ر + ص ط = (ع س ط + ط ع ر) / س ہی اور حاصل ضرب ان دونوکا س

مین ص ر س + ص ط س = ط ع س + ط ع ر اور

ص س ر − ط ع ر = ط ع س − ص ط س یعنے (ص س − ط ع) ر = س ط × (ع − ص)

اور بعد قسمت کی ص س − ط ع پر خارج قسمت ر = س ط (ع − ص) / (ص س − ط ع) ہی

اور واسطے اختصار کی فرض کرو اس قیمت ر کو = ل کے چونکہ

ط : ص :: ط + ر : لا تو ط لا = ص ر + ص ط یعنے

ط لا − ط ص = ص ر اور (ط لا − ط ص) / ص = ر اور چونکہ

س : ع :: س + ر : لا تو س لا = ع س + ع ر یعنے

س لا − ع س = ع ر اور (س لا − س ع) / ع = ر پس ظاہر ہوا کہ

(ط لا − ط ص) / ص = (س لا − س ع) / ع اور حاصل ضرب دونون کا ص ع مین

یہہ ط لا − ط ص = (س ص لا − ص ع س) / ع ہی اور حاصل ضرب اون دونون کا

ع مین یہہ ط ع لا − ط ص ع = س ص لا − ص ع س ہے یعنے

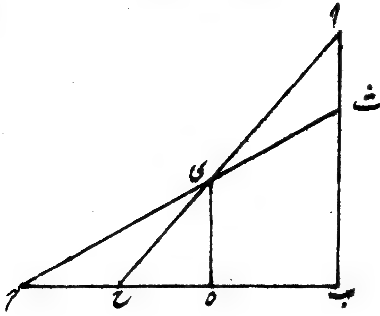
ط ع لا − س ص لا = ط ص ع − ص ع س یعنے

(ط ع − س ص) لا = (ط − س) ص ع پس لا = (ط − س) / (ط ع − س ص) × ص ع

اور واسطے اختصار کی فرض کرو اس قیمت لا کو = م کے تو

√((ل + ط)² + م²) = ا ب اور اسیطرح √((ر + س)² + م²) = ا ح وہو المراد

ا ب ایک منارہ ہی اور ی ہ ایک لکڑی متوازی ا ب کے ہی اور مقام ح سی سیدہ مین ی ح کے
اس منارہ کے دکھلائی دیتی ہی اور مقام ح سے ی کی سیدہ مین نقطہ
ث کا دکھلائی دیتا ہی اور معلوم ہے ہمین مقدار ا ث کے = ع اور پیمایش سے
معلوم ہوا کہ



ح ہ = س اور ہ ج = ط

اور ہ ی = ص اب چاہتے ہین ہم دریافت
کرنا ب ش اور ہ ب کو فرض کرو
ش ب = ر اور ب ہ = لا اور یہ
دو مقدار مجہول ہین تو بحکم ضابطہ (۲) کی

ط : ص :: ط + لا : ر+ع یعنی ص ط + ص لا = ط ر + ط ع اور

ص ط + ص لا – ط ع = ط ر تو ر = $\frac{\text{ص ط + ص لا – ط ع}}{\text{ط}}$

اور س : ص :: س + لا : ر یعنے ص س + ص لا = س ر اور

ر = $\frac{\text{ص س + ص لا}}{\text{س}}$ پس $\frac{\text{ص ط + ص لا – ط ع}}{\text{ط}} = \frac{\text{ص س + ص لا}}{\text{س}}$

اور حاصل ضرب دونوکا س مین $\frac{\text{س ص ط + س ص لا – س ط ع}}{\text{ط}}$ = ص س + ص لا

اور حاصل ضرب ان دونون کا ط مین

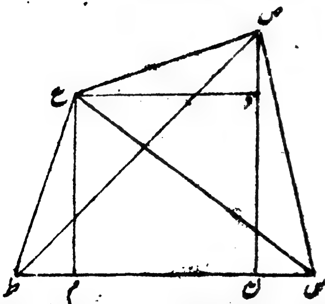
س ص ط + س ص لا – س ط ع = ص ط س + ط ص لا اور بعد ابدال علامت کے حاصل
ہوتا ہے — س ط ع = ط ص لا – س ص لا یعنے

س ص لا – ط ص لا = (س ص – ط ص) لا = س ط ع اور

لا = $\frac{\text{س ط ع}}{\text{س ص – ط ص}}$ اور ر = $\frac{\text{ص س + ص}\left(\frac{\text{س ط ع}}{\text{س ص – ط ص}}\right)}{\text{س}}$

= $\frac{\text{ص س} + \frac{\text{س ط ع}}{\text{س – ط}}}{\text{س}}$ = $\frac{\text{ص س}^2 \text{ – ص س ط + س ط ع}}{\text{س}^2 \text{ – س ط}}$ = $\frac{\text{ص س + (ع – ص) ط}}{\text{س – ط}}$

ص ع ط س ایک شکل منحرف ہی اور جانتے ہین ہم سب ضلعے اور دونو قطر الا ص ع
اور جانتے ہین ہم دریافت کرنا اس ضلع کا
بموجب قواعد مرقومہ بالا کے چونکہ تینون
ضلعے مثلث ص ط س کے معلوم
ہین تو دریافت ہوسکتے ہی مقدار عمود
ص ن کی اور اسیطور سی عمود ع م



کی اور ان دو عمود کے تفریق کرنی سے معلوم ہو جائیگا ہمین ص د اور چونکہ مقدار س م اور س ن کی بہی معلوم ہو سکتی ہی تو انکی تفریق کرنی سے معلوم ہو جائیگی ہمین مقدار ن م یعنی د ع کی لیکن $\text{ص د}^2 + \text{د ع}^2 = \text{ص ع}^2$ تو مقدار ص ع کی معلوم ہو جائیگی فہو المراد

فرض کرو کہ دو مثلث قایمہ الزوایا ا ع ل اور ب ل ع کی ایسی ہین کہ اونکا قاعدہ ل ع تو ایک ہی اور اونکی وتر ا ع اور ب ل ایک دوسری کو تقاطع کرتے ہین نقطہ ح مین گراو ایک عمود ح ط کا اوپر قاعدہ ل ع کے جانتے ہین ہم خطوط ا ل اور ل ع اور ع ب کی بتاو کس جاے دو وتر ایک دوسری کو تقاطع کرینگی اور محل تقاطع سے ایک عمود کہینچا جاوی تو اوسکا کیا طول ہوگا اور وہ کس جای قاعدہ ل ع سے ملاقی ہوگا یعنی بتاو کیا ہی قیمت خطون ح ع اور ح ل اور ح ط اور ط ع اور ط ل کے فرض کرو

ا ل = ط اور ل ع = س اور ع ب = ص اور ح ع = لا اور ح ل = د اور ح ط = ء اور ط ع = ھ اور ل ط = ن چونکہ خط ح ط متوازی ہی خطون ب ع اور ا ل کے تو ظاہر ہی کہ

ع ل : ل ا :: ع ط : ط ح یعنی س : ط :: ھ : ء یعنی $\frac{\text{ط ھ}}{\text{س}} = \text{ء}$

اور یہہ بہی ظاہر ہی کہ ع ل : ع ب :: ل ط : ط ح یعنی

س : ص :: ن : ء یعنی

$\frac{\text{ص ن}}{\text{س}} = \text{ء}$ یعنی $\frac{\text{ص ن}}{\text{س}} = \frac{\text{ط ھ}}{\text{س}}$ ∴ ص ن = ط ھ اور

$\text{ن} = \frac{\text{ط ھ}}{\text{ص}}$ لیکن ل ع = ط ل + ط ع یعنی ن + ھ = س یعنی

$\frac{\text{ط ھ}}{\text{ص}} + \text{ھ} = \text{س}$ اور ط ھ + ص ھ = ص س یعنی ھ (ط + ص) = ص س اور

$\text{ھ} = \frac{\text{ص س}}{\text{ط} + \text{ص}}$ اور $\text{ن} = \frac{\text{ط}}{\text{ص}} \times \frac{\text{ص س}}{\text{ط} + \text{ص}} = \frac{\text{ط س}}{\text{ط} + \text{ص}}$ اور

$\text{ء} = \frac{\text{ص ن}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} \times \frac{\text{ط س}}{\text{ط} + \text{ص}} = \frac{\text{ط ص}}{\text{ط} + \text{ص}}$ اور

$$\text{لا} = \sqrt{\text{ء}^2 + \text{ھ}^2} = \sqrt{\frac{\text{ط}^2\text{ص}^2}{(\text{ط}+\text{ص})^2} + \frac{\text{ص}^2\text{س}^2}{(\text{ط}+\text{ص})^2}} = \sqrt{\frac{\text{ص}^2(\text{ط}^2 + \text{س}^2)}{(\text{ط}+\text{ص})^2}}$$

$$\text{د} = \sqrt{\text{ء}^2 + \text{ن}^2} = \sqrt{\frac{\text{ط}^2\text{ص}^2}{(\text{ط}+\text{ص})^2} + \frac{\text{ط}^2\text{س}^2}{(\text{ط}+\text{ص})^2}} = \sqrt{\frac{(\text{ص}^2 + \text{س}^2)\,\text{ط}^2}{(\text{ط}+\text{ص})^2}}$$

سب مقادیر مجہول کی قیمت اس فہرست مین مندرج کرتے ہین

$$\text{ح ع} = \text{ا} = \frac{\text{ص}\sqrt{\text{ط}^2 + \text{س}^2}}{\text{ط} + \text{ص}} = \frac{\text{ص}}{\text{ط} + \text{ص}} \times \sqrt{\text{ط}^2 + \text{س}^2}$$

$$\text{ح ل} = \text{د} = \frac{\text{ط}\sqrt{\text{ص}^2 + \text{س}^2}}{\text{ط} + \text{ص}} = \frac{\text{ط}}{\text{ط} + \text{ص}} \times \sqrt{\text{ص}^2 + \text{س}^2}$$

$\text{ح ط} = \text{ء} = \frac{\text{ط ص}}{\text{ط} + \text{ص}}$ ، $\text{ط ع} = \text{ه} = \frac{\text{ص س}}{\text{ط} + \text{ص}}$ اور

$\text{ط ل} = \text{ن} = \frac{\text{ط س}}{\text{ط} + \text{ص}}$ مثلاً اگر فرض کرین ہم

که $\left\{ \begin{array}{l} \text{ط} = 15 \\ \text{س} = 8 \\ \text{ص} = 6 \end{array} \right\}$ توحاصل ہوتی ہین یے مساواتین

$$\text{ا} = \frac{\text{ص}}{\text{ط} + \text{ص}} \times \sqrt{\text{ط}^2 + \text{س}^2} = \frac{6}{6 + 15} \times \sqrt{15^2 + 8^2} = \frac{6}{21} \times \sqrt{225 + 64}$$

$$= \frac{2 \times \sqrt{289}}{7} = \frac{2 \times 17}{7} = \frac{34}{7} = 4\tfrac{6}{7}$$ اور

$$\text{د} = \frac{\text{ط}}{\text{ط} + \text{ص}} \times \sqrt{\text{ص}^2 + \text{س}^2} = \frac{15}{6 + 15} \times \sqrt{6^2 + 8^2}$$

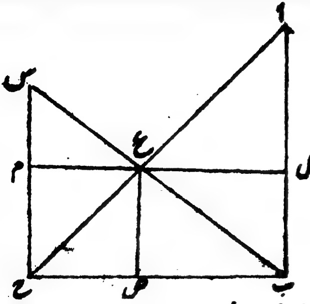
$$= \frac{15}{21} \times \sqrt{36 + 64} = \frac{5 \times \sqrt{100}}{7} = \frac{50}{7} = 7\tfrac{1}{7}$$

اور $\text{ء} = \frac{\text{ط ص}}{\text{ط} + \text{ص}} = \frac{15 \times 6}{15 + 6} = \frac{90}{21} = 4\tfrac{2}{7}$

اور $\text{ه} = \frac{\text{ص س}}{\text{ط} + \text{ص}} = \frac{8 \times 6}{15 + 6} = \frac{48}{21} = 2\tfrac{2}{7}$

اور $\text{ن} = \frac{\text{ط س}}{\text{ط} + \text{ص}} = \frac{15 \times 8}{15 + 6} = \frac{120}{21} = 5\tfrac{5}{7}$

ایک شخص مینار اب پر که اوسکی بلندی ۱۵ گز ہی دوربین لگائی ہوی طرف نقطہ ح کی دیکہہ رہا تہا اور اسیطور سے ایک اور شخص مقام س سی دوربین مین سے طرف نقطہ ح کے دیکہہ رہا تہا اور بلندی س ح کی = ٦ اور اب = ۱۵ اور فاصلہ درمیان دونو میناروں سے کے یعنی خط ب ح = ۸ گز سے کے اتفاقاً دونو شخصوں مذکورین نے ایکہی وقت ایک کبوتر کو دوربین مین سے دیکہا بتاؤ کبوتر کس جا ہے دیکہو او ر فاصلہ



فاصلہ اوسجای کا دونون میناروں سیے اور خط سح سیے اور نقطہ ب اور ح سی بموجب ضابطۂ گذشتہ کے ظاہر ہی کہ جای کبوتر کی ع ہی اور اوسکا فاصلہ خط سح سیے یعنی ص ع = ۲/۷ ۴ اور اوسکا فاصلہ مینار اب سیے یعنی ع ل یا ص ب = ۲/۷ ۵ اور اوسکا فاصلہ مینار سح سی یعنی خط ع م یا ص ح = ۲/۷ ۲ اور اوسکا فاصلہ نقطہ ح سی یعنی ع ح = ۲/۷ ۴ اور نقطہ ب سی یعنی خط ب ع = ۱/۷ ۷ ایک شخص ایک دیوار کے نیچے کہڑا تہا کہ اوسی طرف چوٹی ایک مینار کے اوپر دیوار کے دکہلائی دیتی اور شخص اور دیوار میں ایک گز کا فاصلہ تہا اور وہ شخص ۱۶ گز کے فاصلہ پر مینار سیے تہا اور دیوار ۵ گز بلند تہی بتاؤ کیا ہی بلندی مینار کی بموجب گذشتہ کی بلندی مینار $= \frac{5 \times 16}{1} = 80$

ایک دیوار ۱۲ گز بلند ہی اور ایک شخص اوسکے نیچے بفاصلہ ۱۵ گز کے کہڑا ہی اور اوسی طرف چوٹی ایک مینار کی نظر آتی تہی بعد اسکے شخص مذکور ۱۰ گز دیوار سیے اور ہٹا تب لوسکو ایک ہی کہ اوسکی بلندی ۸ گز تہی نظر آنی لگا بتاؤ کیا ہی بلندی مینار کی اور فاصلہ لوس مینار کا شخص بموجب شکل گذشتہ کی ظاہر ہی کہ بلندی مینار

$$= \frac{(12-8)15 + 25 \times 12}{15-25} + 8 = \frac{60-300}{10} + 8 = 32$$

اور فاصلہ شخص کا مینار سیے

$$= \frac{8 \times 15 \times 25}{(15 \times 12) - (12 \times 25)} - 25 = \frac{3000}{120} + 25 = 50$$

ایک دیوار ۲۰ گز بلند تہی اور اوسمین ایک سوراخ ۱۵ گز کی بلندی پر تہا ایک شخص نی ۵ گز کی فاصلہ پر دیوار سی چوٹی ایک مینار کی سوراخ سیے دیکہی اور بعد اسکی وہ ۱۲ گز دیوار سیے اور ہٹا اور پہر دیوار کی سیدہ مین چوٹی مینار مذکور کی اوسیے نظر آئی بتاؤ کیا ہی بلندی مینار کی اور فاصلہ شخص مذکور کا اوس سیے بموجب شکل گذشتہ کے

بلندی $= \frac{20 \times 15 \times (17-5)}{17 \times 15 - 20 \times 5} = \frac{3600}{255-100} = \frac{3600}{155} = \frac{720}{31}$

اور فاصلہ مینار کا شخص سیے پہلی دفعہ $= \frac{(20-15)5 \times 17}{17 \times 15 - 20 \times 5} = \frac{85 \times 5}{155} = \frac{85}{31}$

مرقومہ بالا سی ظاہر ہی کہ اگر بجای دیوار کے فرض کرین ہم ایک تختہ لکڑیکا اور اوسمین ایک سوراخ کرین تو بلندی مینار کی اور فاصلہ اوس سیے ہر جای سیے معلوم ہوسکتا ہی خواہ وہان دیوار ہو یا نہین

فصل پانچوین حد زیادتی اور کمی کے بیان مین

بعضی ایسی مقدارین ہوتی ہین کہ اونکی زیادتی یا کمی کے واسطی ایک حد ہی مثلاً وتر ایک دائرہ کا ایک مقدار ہی کہ اوسکی زیادتی کے واسطی ایک حد ہی یعنی وہ نہین زیادہ ہوسکتی قطر دایرہ سی اور خط جو کہنیچا جاوے ایک نقطہ مفروض سیسے (کہ واقع ہی باہر ایک خط مفروض کے) خط مذکور تک نہین کم ہوسکتا ہی عمود سیسے کہ گرایا جاوے نقطہ مفروض سیسے خط مفروض تک یعنے چہوٹی سیسے چہوٹا خط جو ایک نقطہ مفروض سیسے ایک خط مفروض تک کہنیچا جاوے عمود خط مذکور پر ہوتا ہی

علم ہندسہ مین بہت سی ایسی مقدارین ہین کہ اونکی زیادتی یا کمی کے واسطی ایک حد مقرر ہی اور دریافت کرنا اس حد کا اکثر نہایت مشکل ہوتا ہی اور بہت سی سوالات درباب اس حد کی نہین حل ہوسکتے الا بدد علم لا انتہا کے کہ اوسکو زبان انگریزی مین ڈفرنشل کیل کیولس کہتے ہین اس کتاب مین ایسے سوالات اس قسم کی مندرج کیئے جاتی ہین جو حل ہوسکتے ہین بوسیلہ علم جبر و مقابلہ کے

سوال ۱ تقسیم کرو ایک خط مفروض کو اسطور پر کہ سطح اوسکی دو اقسام کی بڑی سیسے بڑی ہو یعنے اگر خط مفروض کسی اور طرح سی تقسیم کیا جاوے تو سطح دونوں اقسام کی ہمیشہ کم ہو سطح مذکور الصدر سی فرض کرو کہ خط مفروض = ط اور ایک اوسکی قسم = لا تو ظاہر ہی کہ دوسری قسم خط مذکور کی مساوی ہوگی ط − لا کے اور سطح یعنی حاصل ضرب ان دونوں کا = ط لا − لا۲ اب یہہ ظاہر ہی کہ ط ایک مقدار منقطع ہی یعنے اوسکی قیمت نہین بدل سکتی لیکن لا ایک مقدار غیر منقطع ہی کیونکہ معلوم نہین ہی کہ لا کو کتنا بڑا فرض کرنا چاہیئے تاکہ ط لا − لا۲ ایک مقدار اعظم ہو جاوے اس بات کی دریافت کرنی کی لیئے فرض کرتے ہین ہم کہ ط لا − لا۲ = س یعنے لا۲ − ط لا = − س اور حل کرنیسے اس مساوات درجہ دویم سی حاصل ہوتا ہی

$$\text{لا} - \frac{\text{ط}}{۲} = \pm\sqrt{\frac{\text{ط}^۲}{۴} - \text{س}}$$

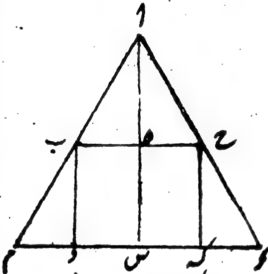
اب ظاہر ہی کہ س نہین زیادہ ہوسکتا $\frac{\text{ط}^۲}{۴}$ سی کیونکہ اگر ایسا ہو تو مقدار $\sqrt{\frac{\text{ط}^۲}{۴} - \text{س}}$ غیر ممکن ہو جاوے تو معلوم ہوا کہ اگر س کو نہایت بڑا فرض کرین تو وہ مساوی ہوتا ہی $\frac{\text{ط}^۲}{۴}$ کے اور اس صورت مین لا − $\frac{\text{ط}}{۲}$ = ۰ یعنے لا = $\frac{\text{ط}}{۲}$ اور اس سے ثابت ہوا کہ واسطی حاصل کرنی سب بڑی سطح کے تقسیم کرنا چاہیئے خط مفروض کو دو مساوی اقسام مین

۲ وہ کونسی کسر ہی کہ اگر اوسمین سیسے تفریق کرین اوسکا مجذور تو حاصل تفریق ایک مقدار نہایت بڑی ہوتی ہی فرض کرو کہ کسر مطلوب = لا اور لا − لا۲ = ط اب معلوم کیا چاہتے ہین ہم کیا ہی بڑی سیسے بڑی قیمت ط کی چونکہ لا − لا۲ = ط تو لا۲ − لا = − ط اور حل کرنی اس مساوات کی سیسے

حاصل ہوتا ہی لا = ½ ± √(¼ − ط) اب معلوم ہوا کہ بڑی سے بڑی قیمت ط کی ¼ ہی اور

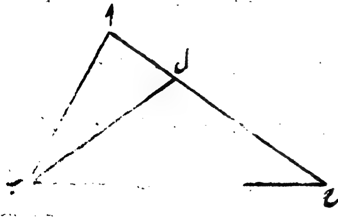
اس صورت مین لا = ½ = کسر مطلوبہ کی یہہ سوال علم لا انتہاسی باسانی حل ہو سکتا ہی لیکن حل کرنا
اس سوال کا بوسیلہ جبر و مقابلہ کی حقیقت مین مشکل ہی ہرچند کہ یہہ ظاہر ہی کہ بعد حل ہونے کے وہ بہت سہل
معلوم ہوتا ہی اس سوال کی وسیلہ سے سوال (۱) بھی حل کیا گیا ہی اور سوال (۳) حل کیا جاتا ہی

۳ بناو ایک بڑی سے بڑا مستطیل بیچ ایک مثلث مفروض کی فرض کرو کہ مثلث ا د م کا
مثلث مفروض ہی اور مستطیل کہ ب مستطیل مطلوبہ ہی اب ہم دریافت کیا چاہتے ہین کہ کیا شرط ضرور
ہی واسطے اس بات کی کہ مقدار مستطیل مذکور کی بڑی سے بڑی ہو معلوم ہی ہمین کہ د م جو کہ قاعدہ مثلث
مفروض کا ہی مساوی ہی ط کے اور ا س کہ ارتفاع



مثلث مفروض کا ہی مساوی ہی ص کے اور فرض کرو
کہ لا = ایک ایسی کسر کے ہی کہ اگر ضرب دین ادسمین
ص کو تو حاصل ضرب مساوی ہو خط ہ س کے یعنے
فرض کرین ہم ہ س = لا ص کے تو ظاہر ہی کہ
ص − لا ص مساوی ہوگا خط ا ہ کی اب ظاہر ہی کہ مثلث ا ح ب کا مشابہ ہی مثلث ا م د کے
تو ا س : ا ہ :: د م : ح ب یا کہ د یعنے ص : ط :: ص − لا ص : کہ د یعنے
کہ د = (ط ص − ط ص لا)/ص اور مستطیل کہ ب = کہ د × ہ س = لا ص × (ط ص − ط ص لا)/ص = ط ص لا − ط ص لا²
= ط ص (لا − لا²) اور اب یہہ ظاہر ہی کہ جتنی مقدار (لا − لا²) بڑی ہو اوتنا ہی زیادہ
ط ص (لا − لا²) یعنے مستطیل کہ ب ہوگا اور چونکہ یہہ سوال (۲) مین ثابت ہوا ہی کہ بڑی سے بڑی قیمت
(لا − لا²) کی ¼ اور لا کی ½ ہی تو معلوم ہوا کہ ا س = ۲ ہ س یعنے ارتفاع مثلث کی دوچند ہی
ارتفاع مستطیل مطلوبہ سے

۴ معلوم ہین ہمین دو طرفین ایک مثلث کی چاہتے ہین ہم دریافت کرنا اس بات کا کہ مقدار
قاعدہ مثلث کی کتنی فرض کرین تا کہ مثلث مذکور کی مساحت



نہایت بڑی ہو مثلاً معلوم ہین دو طرفین ا ح اور ا ب
مثلث ا ح ب کی چاہتے ہین ہم دریافت کرنا ایسی قیمت
واسطے ح ب کے کہ مثلث ا ح ب نہایت بڑا ہو

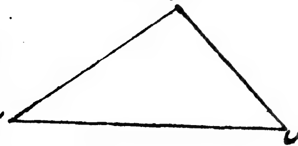
نقطہ ب سی گرا دعمود ب ل کا خط ا ح پر فرض کرو ا ح = ط اور ا ب = س اور
ا ل = لا اب ظاہر ہی کہ $\sqrt{\text{س}^2 - \text{لا}^2}$ = ب ل اور مساحت اس مثلث کی
= $\frac{1}{2}$ ا ح × ب ل = $\frac{1}{2}$ ط × $\sqrt{\text{س}^2 - \text{لا}^2}$ اب یہہ ظاہر ہی کہ جتنا زیادہ $\sqrt{\text{س}^2 - \text{لا}^2}$
ہو اوتنی ہی زیادہ مساحت مثلث کی ہوگی لیکن زیادہ ہونا $\sqrt{\text{س}^2 - \text{لا}^2}$ کا موقوف اوپر کم ہونے
لا کی ہی تو معلوم ہوا کہ مساحت بڑی ہوگی اگر فرض کرین ہم لا = ۰ یعنی اگر خط ب ل ا ب پر منطبق ہو جاوے
یعنی جب دو ضلعون ط اور س کے مابین ایک قایمہ بنے تو اس سے یہہ ثابت ہوا کہ مجذور دونون طرفون
معلوم کا لیکر اونکے حاصل جمع کا جذر لیوین تو یہہ جذر ایک ایسی مقدار ہوتی ہی کہ اگر فرض کرین مساوی
اسکے قاعدہ مثلث کا تو مساحت اوس مثلث کی نہایت بڑی ہوگی

۵ معلوم ہی ہمین قاعدہ ایک مثلث قایمۃ الزاویہ کا اور مجموعہ اوسکی دونو طرفونکا چاہتے ہین ہم
دریافت کرنا اس بات کا کہ کیا نسبت دو طرفون مثلث مذکور مین ضرور ہی
تاکہ مثلث نہایت بڑا ہو معلوم ہی ہمین کہ ا ب + ا ح = س اور
فرض کرو کہ ا ب − ا ح = لا = ایک مقدار مجہول سے
جمع کرو دونو مساوات کو تو ا ب = $\frac{\text{س} + \text{لا}}{2}$ بعد ازان تفریق
کرو ان دونو مساوات کو تو ا ح = $\frac{\text{س} - \text{لا}}{2}$ اور ظاہر ہی کہ مساحت اس مثلث کی

$$= \frac{\text{ا ب} \times \text{ا ح}}{2} = \frac{\frac{(\text{س} + \text{لا})(\text{س} - \text{لا})}{4}}{2} = \frac{(\text{س} + \text{لا})(\text{س} - \text{لا})}{8}$$

= $\frac{\text{س}^2 - \text{لا}^2}{8}$ اب ظاہر ہی کہ جتنا زیادہ $\frac{\text{س}^2 - \text{لا}^2}{8}$ ہوگا اوتنی ہی زیادہ مساحت مثلث
کی ہوگی اور زیادہ ہونا $\frac{\text{س}^2 - \text{لا}^2}{8}$ موقوف ہی کم ہونی لا^2 کے پر تو معلوم ہوا کہ اگر لا = ۰ تو
مساحت مثلث کی نہایت بڑی ہوگی اور اس سے یہہ ثابت ہوا کہ مساحت مثلث کی نہایت بڑی ہوتی ہی جسوقت
کہ دو ساقین مثلث کی آپسمین نسبت برابری کی رکھتے ہین

۶ معلوم ہی ہمین قاعدہ ایک مثلث کا اور حاصل جمع اوسکی دو باقی ضلعون کا بنا دان دو
ضلعون مین کیا نسبت چاہیئے تاکہ مساحت مثلث کی نہایت بڑی ہو فرض کرو کہ حاصل جمع دو ضلعون



= ط اور قاعدہ = س اور ط اور س مقدار معلوم ہین
اور فرض کرو کہ فرق دونو ضلعونین = لا کہ ایک مقدار مجہول ہی
تو معلوم ہوا کہ ا ب + ا س = ط اور

اب − اس = لا جمع کرو ان مساواتون کو تو ۲اب = ط + لا اور اب = $\frac{\text{ط}+\text{لا}}{۲}$ اور تفریق کرنے سے
اس = $\frac{\text{ط}-\text{لا}}{۲}$ اور معلوم ہی ہمین س ب = س تو ظاہر ہوا کہ نصف حاصل جمع تینون ضلعون مثلث کا = $\frac{\text{ط}+\text{س}}{۲}$

$$\text{اور}\quad \frac{\text{ط}+\text{س}}{۲} - \text{س} = \frac{\text{ط}-\text{س}}{۲}$$

$$\text{اور}\quad \frac{\text{ط}+\text{س}}{۲} - \frac{\text{ط}+\text{لا}}{۲} = \frac{\text{س}-\text{لا}}{۲}$$

$$\text{اور}\quad \frac{\text{ط}+\text{س}}{۲} - \frac{\text{ط}-\text{لا}}{۲} = \frac{\text{س}+\text{لا}}{۲}$$

تو معلوم ہوا کہ مساحت اس مثلث کی بموجب سوال گذشتہ کے

$$\frac{۱}{۴}\sqrt{(\text{ط}+\text{س})(\text{ط}-\text{س})(\text{س}+\text{لا})(\text{س}-\text{لا})} =$$

$$\frac{۱}{۴}\sqrt{(\text{ط}+\text{س})(\text{ط}-\text{س})} \times \sqrt{(\text{س}^۲-\text{لا}^۲)}$$

اب ظاہر ہی کہ جتنا لا کم ہو اوتنا ہی مساحت مثلث کی زیادہ ہوگی اور اگر لا = ۰ یعنے اس = اب
تو مساحت مثلث کی نہایت بڑی ہوگی

۷ تمام مثلثون قایم الزاویہ مین سے کہ جنکی سطح ایک مقدار مقررہ ہی وہ کون مثلث ہی جسکی دو ساقون کا مجموعہ ایک مقدار نہایت کم ہی فرض کرو سطح مثلث کی کہ ایک مقدار مقررہ ہی = ط اور ایک ساق مثلث مطلوبہ کی = لا تو ظاہر ہی کہ دوسری ساق
= $\frac{۲\text{ط}}{\text{لا}}$ اور مجموعہ دونو ساقون کا = لا + $\frac{۲\text{ط}}{\text{لا}}$ = $\frac{\text{لا}^۲+۲\text{ط}}{\text{لا}}$ اب فرض کرو کہ
$\frac{\text{لا}^۲+۲\text{ط}}{\text{لا}}$ = س تو لا² + ۲ط = لاس اور لا² − س لا = − ۲ط

$$\text{اور}\quad \text{لا}^۲ - \text{س لا} + \frac{\text{س}^۲}{۴} = \frac{\text{س}^۲}{۴} - ۲\text{ط} \quad\text{اور}\quad \text{لا} - \frac{\text{س}}{۲} = \sqrt{\frac{\text{س}^۲}{۴} - ۲\text{ط}}$$

اب ظاہر ہی کہ اگر س کو یعنے $\frac{\text{س}^۲}{۴}$ کو نہایت کم فرض کرین تو ضرور ہی کہ

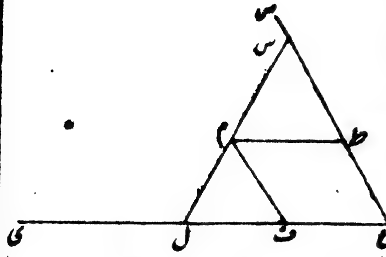
$$\frac{\text{س}^۲}{۴} = ۲\text{ط} \quad\text{اور}\quad \frac{\text{س}}{۲} = \sqrt{۲\text{ط}} \quad\text{بعد}\quad \text{لا} - \frac{\text{س}}{۲} = ۰ \quad\text{اور}$$

$$\text{لا} = \frac{\text{س}}{۲} = \sqrt{۲\text{ط}} \quad\text{اور}\quad \frac{۲\text{ط}}{\text{لا}} = \frac{۲\text{ط}}{\sqrt{۲\text{ط}}} = \sqrt{۲\text{ط}}$$

تو ظاہر ہوا کہ مثلث مطلوبہ کی ساقین مساوی ہوتی ہین

۸ فرض کئے ہینے دو خط ص ع اور ع ی کے اور ایک نقطہ م کا چاہتی ہین ہم کھینچ

ایک خط مثل س م ل کی ایسا کہ وہ گذری نقطہ م مین اور ملی خطون ع ص اور ع ی مفروض سے اسطرح



کہ س ع + ل ع ایک مقدار نہایت چھوٹی ہو نقطہ م سے
کھینچو خط م ط کا متوازی ی ع سے کے اور خط م ف کا
متوازی ص ع اور پیمایش کرو خطون ط م اور م ف
کو فرض کرو کہ ط م اور م ف کہ مقدارین معلوم ہین مساوی
ج اور ص کے اور خط ف ل کہ مقدار مجہول ہے مساوی
لا کی تو اب ظاہر ہے کہ مثلث م ف ل اور ط س م کے متشابہ ہین اور اسیواسطے

لا : ص :: ج : ط س ∴ ط س = ص ج / لا ∴ س ع + ل ع = ص ج / لا + ص + ج + لا

اب چاہتے ہین ہم دریافت کرنا ایسی ایک مقدار واسطے مجہول لا کی کہ مقدار (ص ج / لا + ص + ج + لا) نہایت
کم ہو فرض کرو ص ج / لا + ص + ج + لا = ل ∴ ص ج + ص لا + ج لا + لا² = ل لا
اور لا² = − ص ج + (ل − ص − ج) لا یعنے لا² − (ل − ص − ج) لا = − ص ج اور بموجب قاعدہ مساوات کی

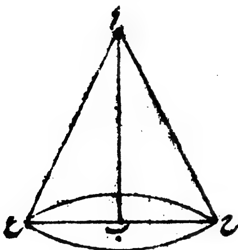
لا² − (ل − ص − ج) لا + (ل − ص − ج)² / ۴ = (ل − ص − ج)² / ۴ − ج ص

اور لا − (ل − ص − ج) / ۲ = √((ل − ص − ج)² / ۴ − ج ص)

یہان ظاہر ہے کہ اگر ل کو نہایت کم فرض کرین تو

(ل − ص − ج)² / ۴ = ج ص ∴ (ل − ص − ج) / ۲ = √(ج ص)

اور ہی لا = (ل − ص − ج) / ۲ = √(ص ج) تو معلوم ہوا کہ اگر خط ف ل مساوی √(ج ص) کے ہو
تو خط جو گذری نقطون ل اور م مین خطون ی ع اور ع ص کو اسطور سے تقاطع کریگا کہ ع ل + ع س
ایک نہایت کم مقدار ہوگی



۹ دریافت کرو کہ ایک ایسا مخروط مستدیر کہ اوسکی
باہر کی سطح تو ایک مقدار مقررہ ہے اور اوسکی ساحت جسم کی
نہایت بڑی ہے فرض کرو ع ب کو کہ نصف قطر قاعدہ مخروط
کا ہے = لا اور ترچھا خط ا ع = د اور کہ = محیط

اوس دائرہ کی جسکا قطر عدد ایک کا ہی تو ظاہر ہی کہ سطح قاعدہ = ک × لا × لا = ک لا٢ لیکن سطح منشوری
= د × ک لا = ک د لا تو کل باہر کی سطح مخروط = ک لا٢ + ک د لا اور فرض کرو کہ
ک لا٢ + ک د لا = س تو د = س/(ک لا) − لا اور ارتفاع ا ب مخروط کی =

√(ا ع٢ − ب ع٢) = √((س٢/(ک٢ لا٢) − ٢س/ک + لا٢) − لا٢) =

√(س٢/(ک٢ لا٢) − ٢س/ک) اور مساحت مخروط = (ک لا٢/٣) √(س٢/(ک٢ لا٢) − ٢س/ک)

اور اسکی ہم نہایت بڑی قیمت معلوم کیا چاہتے ہیں تو اول اوسکی مجذور کی نہایت بڑی قیمت دریافت کرینگے
اور بعد ازان اوسکے خود فرض کرو کہ ١/٩ (س٢ لا٢ − ٢ ک س لا٤) = ط/٩
تو س٢ لا٢ − ٢ ک س لا٤ = ط اور ٢ ک س لا٤ − س٢ لا٢ = − ط اور

لا٤ − س لا٢/(٢ک) = − ط/(٢ک س) اور لا٤ − س لا٢/(٢ک) + س٢/(١٦ ک٢) = س٢/(١٦ ک٢) − ط/(٢ک س)

اور لا٢ − س/(٤ک) = √(س٢/(١٦ ک٢) − ط/(٢ک س)) اب اگر ط کو نہایت بڑا فرض کریں تو

س٢/(١٦ ک٢) = ط/(٢ک س) اور لا٢ = س/(٤ک) اور لا = √(س/(٤ک)) اور

د = س/(ک لا) − لا = (س − ک لا٢)/(ک لا) = (٤ک لا٢ − ک لا٢)/(ک لا) = ٣ک لا٢/(ک لا) =

٣ لا = ٣ √(س/(٤ک)) اور ارتفاع = √(س٢/(ک٢ لا٢) − ٢س/ک) =

√(٤ک س٢/(ک٢ س) − ٢س/ک) = √(٤س/ک − ٢س/ک) = √(٢س/ک)

مرقومہ بالا سے معلوم ہوا کہ نصف قطر قاعدہ کا ترچھی خط سے وہی نسبت رکھتا ہی جو ا رکھتا ہی ٣ سے اور
مجذور کل قاعدہ مخروط کا ارتفاع کے مجذور سے وہی نسبت رکھتا ہی جو ٢ رکھتا ہی ا سے۔

١٠ اگر دو جسم حرکت کریں ایکہی وقت نقطوں مفروض آ اور ب سے بیچ سمتوں آ ص اور س ص

مفروضہ کے ساتھ رفتار مفروضہ کی تو چاہتے ہیں دریافت کرنا
اس بات کا کہ جس وقت دو جسم نہایت نزدیک ایک دوسری کے
آوینگے وہ کس مقام پر ہونگی اور کتنی کتنی مسافت ہر ایک
نے طی کی ہوگی خط ا ب س کو زیادہ کرو جب تک کہ وہ ملے خط ص ل کو بیچ نقطہ ط کی معلوم ہیں ہمیں ط ب = ط
اور ط ع = س اور ط ا = ص اور فرض کرو کہ رفتار جسم ب کی ی ہے اور جسم ا کی م ہے اور فرض
کرو کہ جس وقت جسم ب مسافت ب ج کو طی کرکے نقطہ ج پر پہونچی ہو اسی وقت جسم ا مسافت ا م طی کرکے
نقطہ م پر پہنچے اور فرض کرو کہ ج م نہایت کم فاصلہ دو جسموں میں ہے اب دریافت کرینگے ہم مقدار ج م
اور ب ج اور ا م کی فرض کرو کہ ط ج کہ ایک مقدار مجہول ہے = لا چونکہ ج ل متوازی ب ع کے
تو ط : س :: لا : ط ل یعنے ط ل = س لا / ط یہہ بھی ظاہر ہے کہ مسافت جو دو جسموں نے طی کی ہے آپس میں
وہی نسبت رکھتے ہیں جو رفتار دو جسموں کی آپس میں رکھتے ہیں اور اسی واسطے

ی : م :: لا − ط : ا م یعنے (لا م − ط م) / ی = ا م اور اسی سبب سے

ط م = ط ا − ا م = ص + ط م / ی − لا م / ی فرض کرو کہ ص + ط م / ی = ع

تو ط م = ع − لا م / ی یہہ ظاہر ہے کہ ط ل = (ط م^۲ + ط ج^۲ − ج م^۲) / ۲ ط م

یعنے ج م^۲ = ط م^۲ + ط ج^۲ − ۲ ط ل × ط م یعنے

ج م^۲ = (ع − لا م / ی)^۲ + لا^۲ − (ع − لا م / ی) × ۲ س لا / ط

= ع^۲ − ۲ ع م لا / ی + لا^۲ م^۲ / ی^۲ + لا^۲ − ((۲ ع ی س لا − ۲ م س لا^۲) / ی ط)

= ع^۲ / ۱ − ۲ ع م لا / ی + لا^۲ م^۲ / ی^۲ + لا^۲ / ۱ − ۲ ع س لا / ط + ۲ م س لا^۲ / ی ط

= (ی^۲ ط^۲ ع^۲ − ۲ ع م ی ط^۲ لا + م^۲ ی ط^۲ لا^۲ + ی^۲ ط^۲ لا^۲) / ی^۲ ط^۲

+ (− ۲ ع س ی^۲ ط لا + ۲ م س ی^۲ ط لا^۲) / ی^۲ ط^۲

$$\frac{(م^۲ ی ما^۲ + ی^۲ ط^۲ + ۲ م س ی^۲ ط)\ لا^۲}{ی^۲ ط^۲} +$$

$$\frac{(۲ ع م ی^۲ ط + ۲ ع س ی^۲ ط)\ لا + ی^۲ ط^۲ ع^۲}{ی^۲ ط^۲} -$$ فرض کرو کہ س ر لا =

ف اور س ر لا = ک تو ظاہر ہی کہ ح م^۲ = $\frac{ف لا^۲ - ک لا + ی^۲ ط^۲ ع^۲}{ی^۲ ط^۲}$ اور

فرض کرو $\frac{ف لا^۲ - ک لا + ی^۲ ط^۲ ع^۲}{ی^۲ ط^۲}$ = ل اور

ف لا^۲ − ک لا + ی^۲ ط^۲ ع^۲ = ی^۲ ط^۲ ل اور ف لا^۲ − ک لا = ی^۲ ط^۲ ل − ی^۲ ط^۲ ع^۲ =

(ل − ع^۲) ی^۲ ط^۲ اور لا^۲ − $\frac{ک}{ف}$ لا = $\frac{(ل - ع^۲) ی^۲ ط^۲}{ف}$ = (ل − ع^۲) × $\frac{ی^۲ ط^۲}{ف}$

اور لا^۲ − $\frac{ک}{ف}$ لا + $\frac{ک^۲}{۴ ف^۲}$ = (ل − ع^۲) × $\frac{ی^۲ ط^۲}{ف}$ + $\frac{ک^۲}{۴ ف^۲}$

اور لا − $\frac{ک}{۲ ف}$ = $\sqrt{(ل - ع^۲) \times \frac{ی^۲ ط^۲}{ف} + \frac{ک^۲}{۴ ف^۲}}$

اب ظاہر ہی کہ مقدار منفی کم ہوتی ہی صفر سے کسواسطے کہ اگر ایک تو بڑی اور دوسری چھوٹی مقدار ہو اور ان دونون مقدارون پر ایکہی اور مقدار زیادہ کرین تو حاصل جمع اس مقدار اور بڑی مقدار کا زیادہ ہوگا حاصل جمع اسی مقدار اور چھوٹی مقدار کی سے اب ہم دعوی کرتے ہین کہ صفر زیادہ ہی − ۱ سے کیونکہ ۰ + ۱۰ = ۱۰ اور − ۹ + ۱۰ = ۱ اب یہہ ظاہر ہی کہ ل کو ہم اتنا کم یعنے − ل کو اتنا زیادہ فرض کرسکتے ہین کہ (ل − ع^۲) × $\frac{ی^۲ ط^۲}{ف}$ ایک ایسی مقدار منفی ہوسکتی ہی کہ وہ زیادہ ہو مثبت مقدار $\frac{ک^۲}{۴ ف^۲}$ سے لیکن ہم زیادہ فرض ہمین کرسکتے تو حد کمی کی مساوی ہونا ان دو منفی اور مثبت مقدارونکا ہی اور ∴ لا − $\frac{ک}{۲ ف}$ = ۰ یعنے لا = $\frac{ک}{۲ ف}$ یعنے

$$لا = \frac{۲ ع م ی^۲ ط + ۲ ع س ی^۲ ط}{۲ (م^۲ ی ط^۲ + ی^۲ ط^۲ + ۲ م س ی^۲ ط)} = \frac{ع م ی ط + ع س ی}{م^۲ ط + ی^۲ ط + ۲ م س ی}$$

جسوقت معلوم ہوئی ہمین مقدار لا کی تب معلوم ہوسکتی ہی ہمین مقدار خطون ب ح اور ا م بوسیلہ ان مساواتون کے ب ح = لا − ط اور ا م = $\frac{لا م - ط ا م}{ی}$ اور

$$\text{ح م} = \sqrt{\left(\text{ع} - \frac{\text{لا م}}{\text{ی}}\right)^2 + \text{لا} - \left(\text{ع} - \frac{\text{لا م}}{\text{ی}}\right) \times \frac{\text{۲ س لا}}{\text{ط}}}$$

جو شخص ذرا بھی غور کریگا اوسی معلوم ہو جائیگا کہ شکل گذشتہ بہت فائدہ مند ہی یہہ شکل سمپسن صاحب نے
کہ بڑے ریاضی دان انگلستان کی تھے بوسیلہ علم لا انتہا کے ثابت کی ہی

۱۱ ایک شخص نے ایک راجہ سی زمین مانگی راجہ نی ایک بانس کو توڑ کر کہا کہ جتنی زمین بشکل مثلث
اس بانس کے دو ٹکڑونین آ ہو جاوے اوتنی زمین تو لیلے اب شخص ہنر کو پڑھنے والی اس کتاب سے التماس کرتا ہی
کہ وہ ٹکڑون بانس کو کتنا پھیلاوے یعنی تیسری طرف مثلث کی کس مقدار پر فرض کرے کہ زمین اوسی نہایت زیادہ
ہاتھ لگی جواب تیسری طرف مساوی ہو جذر حاصل جمع مجذور دو ساقون کے جیسا کہ سوال چہارم
مین ثابت ہو چکا ہے

۱۲ ایک گاجرونکا ڈھیر لگا ہوا ہی اور اگر کسی ایک گاجر کا ایغن سے چھلکا اوتارین تو مساحت ہر
گاجر کی چھلکے کی یکسان ہوتی ہی بتاؤ کونسی گاجر ایغن سے نہایت وزنی ہوگی

۱۳ تصنیف کرو ایک مثلث مفروض کو ایک نہایت چھوٹی خط سے حل کرو اس سوال کو صرف
بمدد جبر و مقابلہ کے اور بوسیلہ علم مثلث یا علم لا انتہا کی فقط

واضح ہو کہ فرنگستان کے ریاضی دانون نے جبر و مقابلہ سی فقط وہ مثالین حد زیادتی اور کمی کی حل کی
ہین جو مساوات درجہ دویم ہی سے متعلق ہین اور جن مثالون مین مساواتین تیسری درجہ یا چوتھے درجہ یا زیادہ کی حل کرنی
پڑتی ہین اون مثالونکا جبر و مقابلہ سے حل کرنا اب تک کسی ریاضی دان انگلستان نے نہین لکھا بلکہ ایسی مثالین
علم جزئیات و کلیات سی جسکو زبان انگریزی مین ڈفرنشل کیلکیولس کہتے ہین حل کی ہین سو اب جناب مخدومی مکرمی
ماسٹر رامچندر نی ایک طریقہ ایسا ایجاد کیا ہی کہ جس سے تیسری چوتھے مرتبہ کی مثالین سب جبر و مقابلہ سے
حل ہو سکتی ہین اور اس طریقہ سی ہر طرح کی مثالین نکالکر زبان انگریزی مین ایک کتاب تصنیف کی ہی اور اوس کتاب
کی چار باب ہین اول باب مین فقط وہ مثالین لکھی ہین جو مساوات درجہ دویم اور اول سے متعلق ہین اور ایسی
مثالین انگریزی جبر و مقابلہ مین بھی ہوتی ہین اور دوسرے باب مین وہ مثالین لکھی ہین جو مساوات تیسری درجہ
سے متعلق ہین اور تیسری باب مین وہ مثالین لکھی ہین جنمین چوتھی درجہ اور پانچوین درجہ اور چھٹی درجہ کی
مساواتین حل کرنی پڑتی ہین اور چوتھی باب مین ایسی مثالین ہین جنمین دو مقدار غیر مقررہ یا کئی مقدار غیر مقررہ
مساوات مین شامل ہوتے اس کتاب کی دیکھنی سے ایسی ذکاوت اور جودت طبع مصنف کی معلوم ہوتی ہی
کہ مین اوسکا بیان نہین کرسکتا دل بی اختیار چاہتا تھا کہ اسکی اکثر مثالین اس جبر و مقابلہ مین لکھون لیکن کتاب

کتاب کی بڑھ جانی سے قیمت کی زیادہ ہونیکا اندیشہ ہی اسواسطی ہر باب مین سی ایک یا دو مثالین بطریق مشتے نمونہ از خروارے لکھہ کر خوبی اس کتاب کی شایقین پر ظاہر کرتا ہون

دو مثالین اول باب کی

۱ چاہتے ہین ہم دریافت کرنی ایسی قیمت لا کی کہ جس سے $\frac{لا(۱-لا)}{۲}$ ایک نہایت بڑی مقدار ہو چونکہ اس صورت مین ۲ ایک مقدار مقررہ ہی اسواسطی اوسکے تقسیم ہونے کی زیادتی اور کمی مین کچھہ خلل واقع نہین ہو سکتا پس معلوم ہوا کہ لا (۱ - لا) نہایت بڑی مقدار ہونی چاہیئے پس اسکو ط کی برابر فرض کیا یعنے

$لا(۱-لا) = ط \therefore ۱لا - لا^۲ = ط \therefore لا^۲ - ۱لا = -ط$ اور $لا^۲ - ۱لا + \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۴} - ط$

$\therefore لا - \frac{۱}{۲} = \pm\sqrt{\frac{۱}{۴} - ط} \therefore لا = \frac{۱}{۲} \pm \sqrt{\frac{۱}{۴} - ط}$ اس صورت مین ظاہر ہی کہ ط نہایت زیادہ ہو تو $\frac{۱}{۴}$ سے کے برابر ہوگی کیونکہ اس سے زیادہ ہو تو مقدار جذری غیر ممکن ہو جاتی ہی پس لازم آیا کہ $ط = \frac{۱}{۴}$

$\therefore لا = \frac{۱}{۲}$ یعنے وہ قیمت لا کی جس سے $\frac{لا(۱-لا)}{۲}$ نہایت بڑی مقدار ہو $\frac{۱}{۲}$ ہی

۲ دو کرہ اسطرح رکھے گئے ہین کہ اونکی درمیان کچھہ فاصلہ ہی اور اون دونو کے مرکزون مین خط ملا ہوا ہے تو اب ہم پوچھتے ہین کہ اوس خط مین ایسا مقام کہان ہی کہ اوسپر کھڑی ہوکر دونو کرہ نہایت بڑے نظر اوین مثلا دونو کرون کے دو دایرہ عظیمہ ا ل ن اور ق ح ک ایک سطح مین ہین اور خط ا ق دونو دایرون کا مماس ہی اور س اور م دونو کرون کے مرکز ہین اور فرض کرو کہ خط س م = س اور س ہ = ط اور ر م = ص اور س ب = لا اور مقام مطلوب ب ہی پس اب چھٹی مقالہ کی اٹھوین شکل سے ظاہر ہی کہ س ب : س ا :: س ا : س ص یا لا : ط :: ط : س ص = $\frac{ط^۲}{لا}$

$\therefore$ ص ہ = س ہ - س ص = $ط - \frac{ط^۲}{لا}$ اور اسیطرح ع ر = م ر - م ع = $ص - \frac{ص^۲}{س-لا}$

اب قواعد مساحت سی ظاہر ہی کہ سطح اوس تراش کروی کی جسکی بلندی ص ہ ہی یہہ ہوتی ہی

۲ ک ط × ص ہ = ۲ ک $(ط^۲ - \frac{ط^۳}{لا})$ اور اسیطرح سطح اوس تراش کروی کی جسکی بلندی ع ر ہی یہہ ہوتی ہی ۲ ک ص × ع ر = ۲ ک $(ص^۲ - \frac{ص^۳}{س-لا})$ پس معلوم ہوا کہ مجموعہ سطحون تراشہای کروی کا جو نہایت زیادہ ہونا چاہیئے یہہ ہی ۲ ک $(ط^۲ - \frac{ط^۳}{لا})$ + ۲ ک $(ص^۲ - \frac{ص^۳}{س-لا})$

یعنے ۲ ک ($ط^۲ + ص - \frac{ط^۳}{لا^۲} - \frac{ص^۳}{س - لا}$) اور چونکہ اس صورت مین ۲ ک ایک مقدار مقررہ ہی اسیواسطے اسکی دور کرنی سی کسیطرح کی خرابی واقع نہین ہوسکتی ∴ فرض کرو کہ $ط^۲ + ص - (\frac{ط^۳}{لا^۲} + \frac{ص^۳}{س - لا}) =$ حد زیادتی کے $=$ ق ∴ $ط^۲ + ص - ق = \frac{ط^۳}{لا^۲} + \frac{ص^۳}{س - لا}$ یہان صاف ظاہر ہی کہ اگر ق نہایت زیادہ ہو تو $ط^۲ +$ ص $-$ ق ایک مقدار نہایت کم ہوگی پس فرض کرو کہ $ط^۲ +$ ص $-$ ق $=$ حد کمی کے یا $\frac{ط^۳}{لا^۲} + \frac{ص^۳}{س - لا} =$ حد کمی کے ∴ $\frac{ط^۳ س + (ص^۳ - ط^۳) لا}{س لا - لا^۲} =$ حد کمی کے اب تعبیر کرو لا کو

$$\frac{س}{۱ + ى}$$ سے یعنی لا $= \frac{س}{۱ + ى}$ ∴ $$\frac{ط^۳ س + (ص^۳ - ط^۳) لا}{س لا - لا^۲} = \frac{ط^۳ س + (ص^۳ - ط^۳) \frac{س}{۱ + ى}}{\frac{س^۲}{۱ + ى} - \frac{س^۲}{(۱ + ى)^۲}}$$

$$= \frac{ط^۳ (۱ + ى)^۲ + (ص^۳ - ط^۳)(۱ + ى)}{س ى} = \frac{ط^۳ ى^۲ + ۲ ط^۳ ى + ط^۳ + (ص^۳ - ط^۳) ى + ص^۳ - ط^۳}{س ى}$$

$$= \frac{ص^۳ - ط^۳ + ۲ ط^۳}{س} + \frac{ط^۳ ى^۲ + ص^۳}{س ى} =$$ حد کمی کے اس صورت مین $\frac{ص^۳ - ط^۳ + ۲ ط^۳}{س}$ ایک

مقدار مقررہ ہی اسواسطے اسکی دور کرنی سے کوئی خرابی نہین ہوسکتی اسیواسطے فرض کرو کہ $\frac{ط^۳ ى^۲ + ص^۳}{س ى} =$ حد کمی کے $=$ ع ∴ $ط^۳ ى^۲ + ص^۳ = س ى ع$ ∴ $ى^۲ - \frac{س ع}{ط^۳} ى = - \frac{ص^۳}{ط^۳}$

اور اس مساوات کی حل کرنی سے ظاہر ہی کہ $ى = \frac{س ع}{۲ ط^۳} \pm \sqrt{\frac{س^۲ ع^۲ - ۴ ط^۳ ص^۳}{۴ ط^۶}}$ اس قیمت

سی معلوم ہوتا ہی کہ ع اوسوقت نہایت کم ہوسکتا ہی جسوقت $س^۲ ع^۲ = ۴ ط^۳ ص^۳$ کیونکہ اس سے کم فرض کرین تو مقدار نزولی غیر ممکن ہوجاتی ہی پس لازم آیا کہ $س ع = ۲ ط^{\frac{۳}{۲}} ص^{\frac{۳}{۲}}$ ∴ ع $= \frac{۲ ط^{\frac{۳}{۲}} ص^{\frac{۳}{۲}}}{س}$

اور $ى = \frac{س ع}{۲ ط^۳} = \frac{ص^{\frac{۳}{۲}}}{ط^{\frac{۳}{۲}}}$ اور ∴ لا $= \frac{س}{۱ + ى} = \frac{س}{۱ + \frac{ص^{\frac{۳}{۲}}}{ط^{\frac{۳}{۲}}}} = \frac{س ط^{\frac{۳}{۲}}}{ط^{\frac{۳}{۲}} + ص^{\frac{۳}{۲}}} =$ فاصلہ مطلوبہ کے یعنے نقطہ س سے اگر اتنی فاصلہ پر کھڑی ہو کر نظر کرن تو دونو کرہ نہایت زیادہ نظر آوین دوسری باب کے

(۱۱) مثال وہ کسر کونسی ہی کہ اگر اوس کسر مین سے اوسکی مکعب کو تفریق کرین تو حاصل تفریق نہایت زیادہ ہو فرض کرو کہ لا $=$ کسر مطلوب کی اور ع $=$ حاصل تفریق نہایت زیادہ کی اسیواسطے یہہ مساوات حاصل ہوتی ہی لا $-$ لا$^۳ =$ ع ∴ لا$^۳ -$ لا $+$ ع $= ۰$ یہہ بات ظاہر ہی کہ اس مساوات کی تین قیمتین ہین اور فرض کرو کہ اونمین ایک $-$ ط ہی اب موافق خواص مساوات کی ظاہر ہی کہ یہہ مساوات پوری تقسیم ہوجائیگی لا $+$ ط پر اور کچھہ باقی نرہیگا پس عمل تقسیم کیا

(لا + ط) لا^۳ − لا + ع = (لا^۲ − ط لا + ط^۲ − ۱ = ۰ (۱)

لا^۳ + ط لا^۲

− ط لا^۲ − لا

− ط لا^۲ − ط^۲ لا

(ط^۲ − ۱) لا + ع

(ط^۲ − ۱) لا + ط^۳ − ط

اسیواسطی ضروری ہی کہ ع = ط^۳ − ط اور ∴ ط^۲ − ۱ = ع/ط اور اسیواسطی بوسیلہ مساوات (۱) کے یہہ حاصل ہوتا ہی لا = ط/۲ ∗ √((ط^۲ − ۴ ع)/۴ ط) اور اب صاف ظاہر ہی کہ بڑی سی بڑی قیمت ع کی

اوسوقت ہوگی جب کہ ط^۳ = ۴ ع = ۴ ط^۳ − ۴ ط ∴ ط^۳ = ۴ ط^۳ − ۴ ط

∴ ۳ ط^۲ = ۴ ط ∴ ۳ ط^۲ = ۴ ∴ ط = ۲/√۳ اور لا = ط/۲ = ۱/√۳ = کسر مطلوبہ کے

۳ ایک گلاس میں پانی بہرا ہوا ہی اور اوسمین ایک جسم مکعبی ایسا رکہا چاہتے ہین کہ پانی اوس گلاس کا نہایت زیادہ گر پڑی ——— فرض کرو کہ

ا ب س گلاس کروی اور اوسکی دہانہ کا قطر = ۲ ص اور عمق

اسی گلاس کا یعنی ہ س = ط اور ن د ی م

جسم مکعبی ہی جسکی رکہنی سے نہایت زیادہ پانی

گر پڑتا ہی اور فرض کرو کہ ف س = لا چونکہ مثلث س ہ ا

اور مثلث س ف ی متشابہ ہین کیونکہ خط ہ ا متوازی ہی ف ی کے تو ہ س : ہ ا :: ف س : ف ی

یا ط : ص :: لا : ف ی ∴ ف ی = ص لا/ط اور د ی = ۲ ص لا/ط ظاہر ہی کہ سطح قاعدہ جسم مکعبی ن ی کے = ۴ ص^۲ لا^۲/ط^۲ اور اگر اسی سطح کو بلندی ہ ف میں ضرب کریں تو حاصل ضرب حصہ جسم کا ہوگا جو پانی کے اندر غرق ہوگا اور اسیقدر پانی گر پڑیگا

یعنی ۴ ص^۲ لا^۲/ط^۲ × ہ ف = (۴ ص^۲ لا^۲/ط^۲) (ط − لا) = نہایت زیادہ پانی کے جو گلاس مین سی گر پڑیگا ممکن

اسی صورت مین ۴ ص^۲/ط^۲ = ایک مقدار مقررہ کی اسیواسطی اوسکو دور کرنیکی بعد لا^۲ (ط − لا) = حد زیادتی کے = ع ∴ لا^۳ − ط لا^۲ + ع = ۰ اب فرض کرو کہ اس مساوات تیسری درجہ کی تین قیمتون مین سے ایک منفی قیمت − س ہی پس اب ضرور ہی کہ یہہ مساوات لا + س پر پوری تقسیم ہوجای اور کچہہ باقی نہ بچی اسیواسطی عمل تقسیم کیا

لا + س) لا^{3} − ط لا^{2} + ع = ۰ (لا^{2} − (س + ط) لا + س^{2} + س ط ..... (۱)

لا^{3} + س لا^{2}

−(ط + س) لا^{2} + ع

−(ط + س) لا^{2} − س (س + ط) لا

س (س + ط) لا + ع

س (س + ط) لا + س (س^{2} + س ط)

اور بعد تقسیم کی لازم آیا کہ ع = س (س^{2} + س ط) ∴ $\frac{ع}{س}$ = س^{2} + س ط اور بوسیلہ مساوات (۱)

لا^{2} − (س + ط) لا = − $\frac{ع}{س}$ اسیواسطی بعد حل کرنے کے

لا = $\frac{ط + س}{۲}$ ± √ $\frac{س (ط + س)^{2} − ۴ ع}{۴ س}$ اب تاکہ ع نہایت زیادہ ہو ضرور ہی کہ

س (ط + س)^{2} = ۴ ع = ۴ س (س^{2} + س ط) = ۴ س^{2} (س + ط) اسواسطے ۴ س + ط = ۴ س

اور س = $\frac{ط}{۳}$ ∴ لا = $\frac{س + ط}{۲}$ = $\frac{۲ ط}{۳}$ اور اسیواسطی ہر ایک ضلع جسم مکعب کا

= $\frac{۲ ص لا}{ط}$ = $\frac{۲ ص × \frac{۲ ط}{۳}}{ط}$ = $\frac{۴ ص}{۳}$ تیسری باب کی مثال عدد ۱۲ کو ایسی دو

حصوں میں تقسیم کرو کہ اگر چھوٹی حصہ کو بڑی حصہ کی مکعب میں ضرب کریں تو حاصل ضرب نہایت زیادہ ہو

فرض کرو لا = بڑی حصہ کی ∴ ۱۲ − لا = چھوٹی حصہ ہے کے اور موافق شرط سوال سے کے

لا^{3} (۱۲ − لا) = نہایت زیادہ کی = ع یعنی لا^{4} − ۱۲ لا^{3} + ع = ۰ فرض کرو کہ حاصل ضرب دو قیمتوں اس

مساوات = لا^{2} − ط لا + ص اسیواسطی اس حاصل ضرب پر اساوات پوری تقسیم ہوجاویگی

لا^{2} − ط لا + ص) لا^{4} − ۱۲ لا^{3} + ع = ۰ (لا^{2} + (ط − ۱۲) لا + ط^{2} − ۱۲ ط − ص = ۰ (۱)

لا^{4} − ط لا^{3} + ص لا^{2}

(ط − ۱۲) لا^{3} − ص لا^{2}

(ط − ۱۲) لا^{3} − ط (ط − ۱۲) لا^{2} + ص (ط − ۱۲) لا

(ط^{2} − ۱۲ ط − ص) لا^{2} − ص (ط − ۱۲) لا + ع

(ط^{2} − ۱۲ ط − ص) لا^{2} − ط (ط^{2} − ۱۲ ط − ص) لا + ص (ط^{2} − ۱۲ ط − ص)

پس لازم آیا کہ دو مساوات حاصل ہوں ایک تو $ع = ص\,(ط^2 - ١٢\,ط - ص)$ ∴

$$\frac{ع}{ص} = ط^2 - ١٢\,ط - ص \quad \ldots\ldots \quad (١)$$

اور دوسری $ص\,(ط - ١٢) = ط\,(ط^2 - ١٢\,ط - ص)$ ∴ $ص\,(٢ط - ١٢) = ط^3 - ١٢\,ط^2$

$$∴\ ص = \frac{ط^3 - ١٢\,ط^2}{٢ط - ١٢} = \frac{ط^2\,(ط - ١٢)}{٢ط - ١٢}$$ ∴ بوسیلہ مساوات (١) کے

$$\frac{ع}{ص} = ط^2 - ١٢\,ط - \frac{ط^2\,(ط - ١٢)}{٢ط - ١٢} = \frac{ط^3 - ٢٤\,ط^2 + ١٤٤\,ط}{٢ط - ١٢}$$

$$= \frac{ط\,(ط - ١٢)^2}{٢ط - ١٢}$$ اور ∴ $ع = ص \times \frac{ط\,(ط - ١٢)^2}{٢ط - ١٢} =$

$$\frac{ط^2\,(ط - ١٢)}{٢ط - ١٢} \times \frac{ط\,(ط - ١٢)^2}{٢ط - ١٢} = \frac{ط^3\,(ط - ١٢)^3}{(٢ط - ١٢)^2}$$ اور اب بوسیلہ (١) کے

$لا^2 + (ط - ١٢)\,لا = -\frac{ع}{ص}$ اور اسکی حل کرنی سے $لا =$

$$-\frac{ط - ١٢}{٢} \pm \sqrt{\frac{ص\,(ط - ١٢)^2 - ٤ع}{٤ص}}$$ پس ع کی حد زیادتی کرنے ضرور ہی کہ

$ص\,(ط - ١٢)^2 = ٤ع$ یا $\frac{ط^2\,(ط - ١٢)}{٢ط - ١٢}\,(ط - ١٢)^2 = \frac{٤\,ط^3\,(ط - ١٢)^3}{(٢ط - ١٢)^2}$ یا

$١ = \frac{٤ط}{٢ط - ١٢}$ ∴ $ط = -٦$ اور $لا = -\frac{ط - ١٢}{٢} = ٩$ = حصہ بڑی کے

اور ∴ ٣ = حصہ چھوٹی کے

چوتھی باب کی مثال کیا قیمت چاہئی لا ، ی ، د کی تا کہ $ط\,لا\,ی^2\,د^3 - لا^2\,ی^2\,د^3 - لا\,ی^3\,د^3 - لا\,ی^2\,د^4$ حد زیادہ ہوے

جاننا چاہیے کہ بہت سے چھوٹوں میں ایک مقدار کو غیر منقطع اور باقی کو منقطع فرض کرکے حل کرتے

ہیں پس اول فرض کیا کہ لا اور ی منقطع ہیں اور د غیر منقطع

∴ ط لاؔ یؔ دؔ ـ لاؔ یؔ دؔ ـ لاؔ یؔ دؔ ـ لاؔ یؔ دؔ = لاؔ یؔ { (ط ـ لا ـ ی) دؔ ـ دؔ } =

حد زیادتی سے اور اسیواسطی (ط ـ لا ـ ی) دؔ ـ دؔ = حد زیادتی سے اور موافق (۱۰) سوال باب

اوسی کتاب کی د = ۴ (ط ـ لا ـ ی) / ۵ یا ۴ لا + ۴ ی + ۵ د = ۴ ط . . . . . . (۱)

اور اب فرض کرو کہ لاؔ اور دؔ منقطع ہیں اور ی غیر منقطع اسیواسطی موافق بیان بالا کی

(ط ـ لا ـ ی) یؔ ـ یؔ = حد زیادتی سے اور اسیواسطی بحکم سابق ی = ۳ (ط ـ لا ـ د) / ۴

∴ ۳ لا + ۴ ی + ۳ د = ۳ ط . . . . (۲)

اب فرض کرو کہ یؔ اور دؔ منقطع ہیں اور لا غیر منقطع اسیواسطی بحکم بیان بالا سے

(ط ـ ی ـ د) لاؔ ـ لاؔ = حد زیادتی سے اور موافق حل سوال (۲) باب دوم اوسی کتاب کے

لا = ۲ (ط ـ ی ـ د) / ۳ اور ∴ ۳ لا + ۲ ی + ۲ د = ۲ ط . . . . (۳)

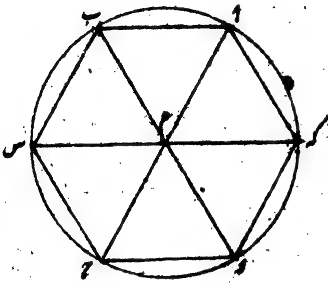
اور اب بوسیلہ مساواتون (۱) اور (۲) اور (۳) کی قیمتین مطلوب لاؔ یؔ دؔ کے سے حاصل

ہوسیتے ہیں لا = ط / ۵ اور ی = ۳ط / ۱۰ اور دؔ = ۲ط / ۵

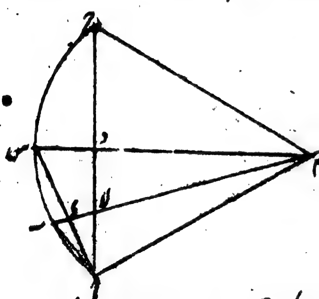
فصل چھٹی مساحت دائرہ اور

اور شکل مجسم کی بیان مین

ا ب س م ع ہ کہ ایک دائرہ ہی اور اسمین ایک شکل چہہ ضلعون کی بنی ہوئی ہی اور ہر ضلع اس شکل کا مساوی



نصف قطر کی ہی کیونکہ قوس ب س چہٹا حصہ دائرہ کا ہی اور اسیواسطے مجموعہ باقی دو زاویون کا ۱۲۰ درجے ہے اور چونکہ بسبب مساوی ہونے ب م اور م س کے یہی دو زاویے اسمین مساوی ہین تو معلوم ہوا کہ ہر زاویہ مثلث ب م س کا ۶۰ درجہ کا ہی اور اسیواسطے مثلث مذکور ایک مثلث مساوی الاضلاع ہے یعنے ب س مساوی نصف قطر کے ہی فرض کرو کہ قوس ا ہ چہٹا حصہ ایک ایسی دائرہ کا ہی کہ اوسکا ایک ہی ا ب



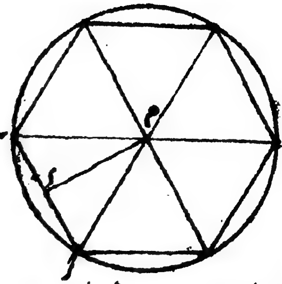
ظاہر ہی کہ چونکہ معلوم ہی ہمین ا ہ یعنے نصف اوسکا ا د اور خط ا م وتر قایمہ کا تو معلوم ہو جائیگا ہمین خط م د اور د س

اور جب معلوم ہوا ہمین خط ا د اور د س تو معلوم ہو جائیگا ہمین وتر قائمہ کا ا س یعنے نصف اوسکا خط ا ء اور معلوم ہوئی خط ا م اور ا ء سے معلوم ہو جائیگا ہمین خط م ء اور ء ب اور بعد ازان خط ا ب جو وتر ہی چوتہے حصہ قوس ا ہ کا یعنے $\frac{1}{24}$ کل دائرہ کا اور اسیطرح سے معلوم ہو سکتی ہین ہمین وتر

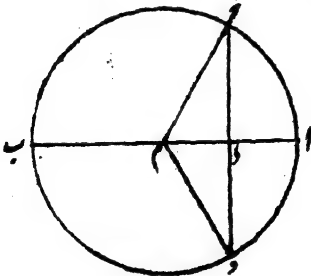
$$\frac{1}{۴۸} \text{ اور } \frac{1}{۹۶} \text{ اور } \frac{1}{۱۹۲} \text{ اور } \frac{1}{۳۸۴} \text{ اور } \frac{1}{۷۶۸} \text{ اور } \frac{1}{۱۵۳۶}$$

دائرہ کا اور اس وتر کو حساب دانون نے بجای قوس کے فرض کیا ہی اور ۱۵۳۶ مین ضرب دیکر دریافت کیا ہی کہ اگر قطر ایک دائرہ کا ۱ ہو تو محیط اوسکا نہایت قریب اسکے ۳ء۱۴۱۵۹۱ ہوتا ہی اس عدد کو ہم تعبیر کرینگے ساتہہ حرف ک کے اب فرض کرو کہ ایک دائرہ ایسا ہی کہ اوسکا قطر = ط کے ہی اور محیط = م تو

۱ : ک :: ط : م یعنے ۱ × م = ک ط ∴ م = ک ط تو اس سے یہہ معلوم ہوا کہ اگر معلوم کیا چاہین ہم محیط کسی دائرہ کا جبکہ جانتے ہون ہم قطر اوسکا تو ضرب دینا چاہیئے ہمین قطر کو ک مین اور حاصل ضرب محیط ہوتا ہی دائرہ مین کہ اوسکا مرکز م ہی بنائی ہے ایک شکل کثیر الاضلاع کہ اوسکی سب ضلعی مساوی ہین اور تقسیم



کیا ہمنی اوسیے مثلثو نمین اور مرکز م سیے گرایا ہمنے عمود م د کا اوپر خط ا ب کے اب فرض کرو کہ تعداد ضلعون اوس کثیر الاضلاع کے = لا اور ایک ضلع = ر اور عمود جو مرکز سیے گرایا جاوےیے اوس ایک ضلع پر = د تو مساحت ایک مثلث کی = $\frac{\text{ر} \times \text{د}}{٢}$ اور کل کثیر الاضلاع کی = $\frac{\text{لا ر}}{٢} \times$ د یعنی نصف حاصل جمع ضلعونکا × عمود مین = مساحت کثیر الاضلاع سیے اب ظاہر ہی کہ جتنا لا کو زیادہ فرض کرینگے اوتنا ہی کم فرق حاصل جمع ضلعون کثیر الاضلاع کا ہی اور محیط دایرہ مین کم فرق رہیگا سیعنی دائرہ مین ایک ایسا کثیر الاضلاع بنایا جاسکتا ہی کہ فرق اوسکی ضلعون سیے مجموعہ اور محیط مین اور عمود د اور نصف قطر مین کم ہووی بہ نسبت کسی مقدار مفروض سے کے اور چونکہ قاعدہ واسطے دریافت کرنی مساحت کثیر الاضلاع کے اس کثیر الاضلاع کی صورت مین بہی جاری ہوسکتا ہی تو معلوم ہوا کہ مساحت دائرہ = نصف قطر × نصف محیط اب فرض کرو کہ دو دائرےیے ا اور ب ہین اور قطر ا کا = ط اور قطر ب کا = ص تو ا = $\frac{\text{ک ط}}{٢} \times \frac{\text{ط}}{٢} = \frac{\text{ک ط}^٢}{٤}$ اور ب = $\frac{\text{ک ص}}{٢} \times \frac{\text{ص}}{٢} = \frac{\text{ک ص}^٢}{٤}$ اور اب ظاہر ہی کہ ا : ب :: $\frac{\text{ک ط}^٢}{٤} : \frac{\text{ک ص}^٢}{٤}$ سیعنی



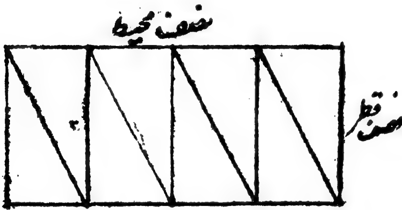
ا : ب :: $\text{ط}^٢ : \text{ص}^٢$ اور اس سیے یہہ معلوم ہوا کہ دائرےیے ایک دوسرےسیے وہ نسبت رکہتی ہین جو مجذور اونکے قطرون سے کے رکہتی ہین خط ا د کو تیر کہتے ہین اور ج د کو وتر قوس کہتے ہین اگر معلوم ہووین وتر اور قطر تو معلوم کرسکتے ہین ہم تیر کو اس طور سیے فرض کرو کہ نصف قطر ج م یا ا م = ط اور نصف وتر د و = ص اور ا و = لا جو مجہول ہی تو $\text{ص}^٢ + (\text{ط} - \text{لا})^٢ = \text{ط}^٢$ یعنی $\text{ص}^٢ + \text{ط}^٢ - ٢\,\text{ط لا} + \text{لا}^٢ = \text{ط}^٢$ سیعنی

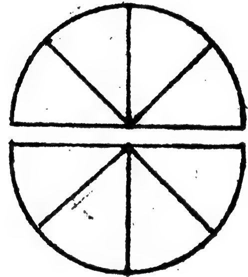
$\text{لا}^٢ - ٢\,\text{ط لا} = - \text{ص}^٢$ اور $\text{لا}^٢ - ٢\,\text{ط لا} + \text{ط}^٢ = \text{ط}^٢ - \text{ص}^٢$ اور

$$\text{لا} - \text{ط} = \pm \sqrt{\text{ط}^٢ - \text{ص}^٢} \quad \text{اور} \quad \text{لا} = \pm \sqrt{\text{ط}^٢ - \text{ص}^٢} + \text{ط}$$

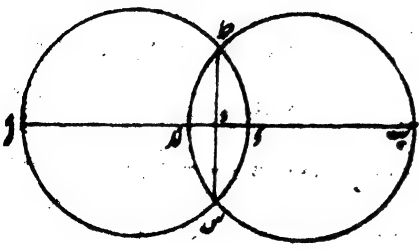
اور معلوم ہوسکتا ہی وتر جب معلوم ہو قطر اور تیر مثلا فرض کرو کہ تیر = ص اور نصف وتر = لا تو $\text{لا}^٢ + (\text{ط} - \text{ص})^٢ = \text{ط}^٢$ سیعنی $\text{لا}^٢ + \text{ط}^٢ - ٢\,\text{ط ص} + \text{ص}^٢ = \text{ط}^٢$

اور $لا^2 = - ص^2 + ۲ط ص$ اور $لا = \pm\sqrt{- ص^2 + ۲ط ص}$ (ل) جسوقت معلوم ہو وتر اور تیر تو معلوم ہوسکتا ہی قطر مثلاً فرض کرو کہ نصف وتر = ص اور تیر = ط اور نصف قطر = لا تو $لا^2 = ص^2 + (لا - ط)^2 = ص^2 + لا^2 - ۲ط لا + ط^2$ یعنی $ص^2 + ط^2 = ۲ط لا$ اور $لا = \frac{ص^2 + ط^2}{۲ط}$ پس معلوم ہوا کہ جب قطر اور وتر اور تیر مین سے دو چیزین معلوم ہوتی ہین تو تیسری معلوم ہوسکتی ہی سطح قطاع ا م $= \frac{قوس ء ج}{۲} \times$ ج م دلیل اسکے واسطی وہی ہی جو واسطی مساحت دائرہ کے ہی سوای مرقومہ بالا کے ایک اور دلیل واسطی مساحت دائرہ کی یہہ ہی تقسیم کرو ہر نصف دائرہ کو مساوی تعداد قطاع مین اور قطر کی سیدہ مین دو نصف دائرون کو جدا کرو اور بعد اسکے قطاع کو پہیلا کر ایک نصف دائرہ کے قطاع کو دوسرے نصف دائرہ کے قطاع کی ساتہہ شامل کرو اور دیکہنی سے معلوم ہوگا کہ مجموعہ ان قطاع کا یعنی سطح دائرہ کے





مساوی ہی سطح نصف محیط کی نصف قطر مین جیسیکہ شکل سی واضح ہی جانتی ہین ہم ایک مربع کہ اوسکا ایک ضلع = ط کی ہی اور دریافت کیا چاہتے ہین ہم ایک ایسا دائرہ کہ اوسکی مساحت مساحت مربع سی مساوی ہو فرض کرو کہ نصف قطر دائرہ مطلوبہ کا = لا کی ہی تو اوسکی مساحت = ہ $لا^2$ کے ہوگی اور بموجب شرط سوال کے کہ ہ $لا^2 = ط^2$ تو $لا = \sqrt{\frac{ط^2}{ہ}}$ اور جسوقت معلوم ہو ہمین قطر دائرہ کا تو دائرہ فوراً معلوم ہوسکتا ہی دو دائرے ایک دوسرے کو تقاطع کرتی ہین



جیسیکہ شکل سی واضح ہی معلوم ہی ہمین قطر دونو دائرون کا اور خط ولا یعنی قطر ب لا = ۲ط اور قطر ا د = ۲ص اور خط

اور (۴) − (۳) = ب + ۷ س + ۳۷ د = ۱۶ .... (۷)

اور (۶) − (۵) = ۲ س + ۱۲ د = ۵ .... (۸)

اور (۷) − (۶) = ۲ س + ۱۸ د = ۷ .... (۹)

اور (۹) − (۸) = ۶ د = ۲ اور د = $\frac{۱}{۳}$ اور مساوات (۸) سے

۲ س + ۴ = ۵ اور س = $\frac{۱}{۲}$ اور مساوات (۵) سی ب + $\frac{۳}{۲}$ + $\frac{۷}{۳}$ = ۴

∴ ب = ۴ − $\frac{۲۳}{۶}$ = $\frac{۱}{۶}$ اور مساوات (۱) سے ا + $\frac{۱}{۶}$ + $\frac{۳}{۶}$ + $\frac{۱}{۳}$ = ۱

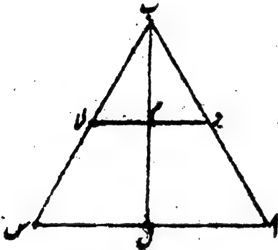
ا + $\frac{۶}{۶}$ = ۱ ∴ ا = ۰ تو معلوم ہوا کہ ۱ + ۴ + ۹ + ۱۶ + وغیرہ =

$$\frac{ن}{۶} + \frac{ن^۲}{۲} + \frac{ن^۳}{۳} = \frac{ن + ۳ن^۲ + ۲ن^۳}{۶} = \frac{ن(ن+۱)(۲ن+۱)}{۶}$$

اب فرض کرو ن = مقدار لا انتہا تو ن + ۱ = ن

$$∴ \frac{ن(ن+۱)(۲ن+۱)}{۶} = \frac{۲ن^۳}{۶} = \frac{ن^۳}{۳}$$

اب ہم کہتے ہین کہ مشابہ مثلث ایک دوسرے سے وہی نسبت رکھتی ہین جو مجذور اونکی ایک ایک ضلع کے کہ محاذی ہون زاویون متساوی کے آپس مین کہتے ہین



فرض کرو کہ اب س اور د لا ب دو مثلث مشابہ ہین اور ایک مثلث کو دوسرے پر پہیلاو جیسا کہ شکل سے واضح ہی اب ظاہر ہی کہ

د لا : ا س :: د لا : ا س

د لا : ا س :: ب م : ب ل

اور حاصل ضرب اس نسبت کا یہ ہی

د لا² : ا س² :: د لا × ب م : ا س × ب ل لیکن مثلث

د ب لا : مثلث ا ب س :: د لا × ب م :: ا س × ب ل تو معلوم ہوا کہ مثلث

د ب لا : مثلث ا ب س :: د لا² : ا س² منشور ایک شکل مجسم ہی ایسی کہ اوسکا قاعدہ ایک شکل مستقیم الاضلاع ہی اور ایسی ہی ایک مقابل اسکے متوازی ہی اور گہری ہوتی ہی سب طرف سی اشکال متوازی الاضلاع سی اگر قاعدہ منشور کا مثلث ہو تو اوسی منشور مثلثی کہتے ہین اور علی ہذا القیاس مخروط مضلع وہ شکل مجسم ہی جسکا قاعدہ ایک شکل مستقیم الاضلاع ہوتا ہی اور جو گہری ہوتی ہی مثلثون سے جو سب ایک نقطہ پر ملتے ہین اور راس

اور (۴) − (۳) = ب + ۵ س + ۳۷ و = ۱۶ .... (۷)

اور (۶) − (۵) = ۲ س + ۱۲ و = ۵ .... (۸)

اور (۷) − (۶) = ۲ س + ۱۸ و = ۷ .... (۹)

اور (۹) − (۸) = ۶ و = ۲ اور و = $\frac{۱}{۳}$ اور مساوات (۸) سے

۲ س + ۴ = ۵ اور س = $\frac{۱}{۲}$ اور مساوات (۵) سی ب + $\frac{۳}{۲}$ + $\frac{۷}{۳}$ = ۴

∴ ب = ۴ − $\frac{۲۳}{۶}$ = $\frac{۱}{۶}$ اور مساوات (۱) سے ا + $\frac{۱}{۶}$ + $\frac{۳}{۶}$ + $\frac{۱}{۳}$ = ۱

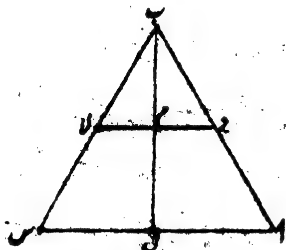
ا + $\frac{۶}{۶}$ = ۱ ∴ ا = ۰ تو معلوم ہوا کہ ۱ + ۴ + ۹ + ۱۶ + وغیرہ =

$$\frac{ن}{۶} + \frac{ن^{۲}}{۲} + \frac{ن^{۳}}{۳} = \frac{ن + ۳ن^{۲} + ۲ن^{۳}}{۶} = \frac{ن(ن+۱)(۲ن+۱)}{۶}.$$

اب فرض کرو ن = مقدار لا انتہا تو ن + ۱ = ن

$$∴ \frac{ن(ن+۱)(۲ن+۱)}{۶} = \frac{۲ن^{۳}}{۶} = \frac{ن^{۳}}{۳}$$

اب ہم کہتے ہیں کہ مشابہ مثلث ایک دوسرے سے وہی نسبت رکھتی ہیں جو مجذور اونکی ایک ایک ضلع کے کہ محاذی ہوں زاویوں متساوی کے آپس میں رکھتے ہیں



فرض کرو کہ ا ب س اور د لا ب دو مثلث مشابہ ہیں اور ایک مثلث کو دوسرے پر پہلا دو جیسا کہ شکل سے واضح ہے اب ظاہر ہے کہ

د لا : ا س :: دلا : ا س

د لا : ا س :: ب م : ب ل

اور حاصل ضرب ان نسبت کا یہ ہے

$دلا^{۲} : اس^{۲}$ :: د لا × ب م : ا س × ب ل لیکن مثلث

د ب لا : مثلث ا ب س :: د لا × ب م : ا س × ب ل تو معلوم ہوا کہ مثلث

د ب لا : مثلث ا ب س :: $دلا^{۲} : اس^{۲}$ منشور ایک شکل مجسم ہے ایسی کہ اوسکا قاعدہ ایک شکل مستقیم الاضلاع ہے اور ایسی ہی ایک مقابل اسکے متوازی ہے اور گھری ہوتی ہے سب طرف سے اشکال متوازی الاضلاع سے اگر قاعدہ منشور کا مثلث ہو تو اوسے منشور مثلثی کہتے ہیں اور علی ہذا القیاس مخروط مضلع وہ شکل مجسم ہے جسکا قاعدہ ایک شکل مستقیم الاضلاع ہوتا ہے اور جو گھری ہوتی ہے مثلثوں سے جو سب ایک نقطہ پر ملتے ہیں اور اس

کو مخروط کی راس کہتے ہین استوانہ وہ شکل مجسم ہی جو پیدا ہوتی ہی گردش ایک مستطیل کی سے
گرد ایک کے اوسکی ضلعون مین سے مخروط مستدیر وہ شکل مجسم ہی جو پیدا ہوتی ہی گردش ایک مثلث
قایم الزاویہ کی سے گرد اوسکی ارتفاع کی یہہ بہی ظاہر ہی کہ ہر منشور مرکب ہوتا ہی منشورون مثلثی
سے اور ہر مخروط مضلع

استوانہ — مخروط مثلثی — منشور — مخروط مضلع

کرہ — منشور مثلثی — مخروط مستدیر

مرکب ہوتا ہی مخروطون مثلثی سے اب ہم کہتی ہین کہ اگر دیکہین ہم ایک مخروط مثلثی کو راس
کی طرف سی تو وہ اس شکل کا معلوم ہوگا تو اس سے یہہ معلوم ہوا کہ مخروط مثلثی مین سب مثلث جو
متوازی قاعدہ سے کے ہوتی ہین وے اسمین متشابہ ہوتی ہین لیکن متشابہ مثلث ایک دوسرے
سے وہی نسبت رکہتی ہین جو مجذور اوسکے
ایک ایک ضلع کی رکہتے ہین فرض کرو
کہ ا ب س ص مخروط مثلثی ہی اور فرض
کرو کہ مثلث ء لا د متوازی ہی مثلث ص س ب سے کہ قاعدہ مخروط کا ہی اور فرض
کرو کہ ا ط ارتفاع مخروط کی ہی اور وہ ملتی ہی
مثلث ء د لا سے نقطہ ر مین اب ظاہر ہی کہ

س ص : ء د :: ا س . ا د
∴ ص س² : ء د² :: ا س² : ا د²
لیکن ا س² : ا د² :: ا ط² : ا ر²

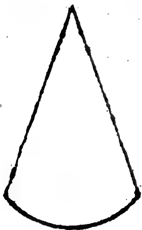
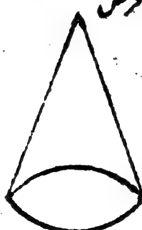
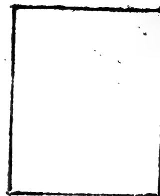
تو مثلث ص ب س : مثلث ر د لا :: ط لا : ا ژ اب فرض کرو کہ مثلث ص ب س = ط اور مثلث ر د لا = لا اور ا ط = ص اور ا ر = و تو ط : لا :: ص^2 : و^2 تو لا = $\frac{ط و^2}{ص^2}$

اب فرض کرو کہ و ہی ایک جزو ان جزون لا انتہا سے جنسی خط ا ط بنا ہوا ہی اور تعبیر کرتے ہین ہم اوس جز کو ساتھہ آ کے تو اب ظاہر ہی کہ تعبیر کر سکتے ہین مجموعہ سب مثلثون یعنے مخروط کو ساتھہ اس سلسلہ کے $\frac{ط آ^2}{ص^2}$ (۱ + ۴ + ۹ + ۱۶ + ۲۵ + وغیرہ لا انتہا کی)

لیکن پہلی ثابت کیا ہی ہمنی کہ ۱ + ۴ + ۱۶ + وغیرہ لا انتہا = $\frac{ن^3}{۳}$ اور اسجاے ن ہی تعداد قسمون کی تو ضرور ہی کہ ن = ا ط اور

$$\frac{ن^3}{۳} = \frac{ا ط^3}{۳} = \frac{ص^3}{۳} \text{ اور مساحت مخروط } = \frac{ط}{ص^2} \times \frac{ص^3}{۳} = ط \times \frac{ص}{۳}$$

تو معلوم ہوا قاعدہ واسطے دریافت کرنی مساحت مخروط کی یہہ ہی ضرب دو ایک تہائی ارتفاع کو مساحت قاعدہ مین اور حاصل ضرب مساحت مخروط ہوتا ہی لیکن منشور کہ جسکا قاعدہ = ط اور ارتفاع = ص مساوی ہوتا ہی ط ص کے تو معلوم ہوا کہ ہر مخروط تہائی ہوتا ہی ایک منشور کا جسکا قاعدہ اور ارتفاع قاعدہ اور ارتفاع مخروط مذکور کی سے مساوی ہی تو یہہ بھی ظاہر ہی کہ ہر شکل تاعدہ یا بی قاعدہ تقسیم ہو سکتی ہی مثلثو مین تو اس سے یہہ معلوم ہوا کہ قاعدہ ہو یا مخروط کا کتنی ہی مثلثو نکا ہو قاعدہ مرقومہ بالا ہمیشہ جاری ہو سکتا ہی تو اس سے یہہ معلوم ہوا کہ استوانہ اور مخروط مستدیر کی مساحت کی واسطے بھی جاری ہو سکتا ہی کیونکہ استوانہ ایک منشور ہی ایسا کہ اوسکی قاعدہ کی ضلعی تعداد مین لا انتہا ہین یعنی اوسکا قاعدہ دائرہ ہی اور اسیطرح سی مخروط مستدیر ایک مخروط مضلع ہی کہ اوسکی قاعدہ کے ضلعے بیشمار ہین سطح مستدیر ایک استوانہ کی حاصل ہوتی ہی ضرب دینی سے محیط قاعدہ کو ارتفاع مین کیونکہ سطح مذکور ایک مستطیل ہی جیسکہ شکل سے واضح ہی اور سطح مستدیر ایک مخروط مستدیر کی حاصل ہوتی ہی ضرب دینی سی تو جیہے خط کو نصف محیط قاعدہ کی مین کیونکہ سطح مذکور ایک قطاع دائرہ کا ہی جیسکہ پہیلانی سے واضح ہوگا اب ہم ثابت کرینگے قاعدہ واسطے دریافت کرنے سطح مستدیر کرہ کی فرض


فرض کرو کہ د ص س ع ایک کرہ ہی اور د ر ایک نہایت چھوٹا مماس اور د و س ع ایک نہایت باریک دہاری سطح مستدیر کرہ کی اور د لا ایک نہایت چھوٹا جز قطر ص ہ کا اب ظاہر ہی کہ بسبب مشابہ ہونی مثلثون د ر د لا اور د ق م کے د ق : د م :: د لا : د ر = (د م × د لا) / د ق

اب فرض کرو کہ د م جو نصف قطر ہی = ط اور د ق = لا

اور د لا = ی تو د ر = (ط × ی) / لا لیکن سطح

د و س ع = د س × ک × د و = ۲ ک لا × (ط × ی) / لا =

۲ ک ط ی اور اسیطور سی یہہ بہی دریافت ہوسکتا ہی کہ سطح

د ا ع بہی = ۲ ک ط ی کے ہی اور مجموعہ ان سب سطحون کا کہ مساوی سطح کرہ کے ہی یہ ہی

= ۲ ک ط (ی + ی + ی + ی ۰۰۰۰۰ لا انتہا) = ۲ ک ط × ۲ ط = ۴ ط² ک

= ۲ ط × ۲ ط ک = محیط × قطر = چو چند سطح ایک دائرہ عظیمہ کی اب ہم ثابت کرینگی قاعدہ واسطے مساحت جسم کرہ کے فرض کرو کہ سطح کرہ کو تقسیم کیا ہمنی لا انتہا مساوی مربعون مین اور ہر ان مربعون پر ایک مخروط مضلع بنائی جاوین ایسی کہ ان سبکی نقطہ راس مرکز کرہ پر ہو اب ظاہر ہی کہ مجموعہ ان سب مخروطون کا مساوی مساحت کرہ کی ہی فرض کرو کہ ایک مربع مذکور = ص تو مجموعہ ان سب مخروطون کا = ص × ط/۳ + ص × ط/۳ + لا انتہا =

ط/۳ (ص + ص + ص + لا انتہا) = ط/۳ × ۴ ط² ک = ۴ ط³ ک / ۳ = ۸ ط³ ک / ۶ اور اگر فرض کرین جسم کرہ

۲ ط = ع تو ۸ ط³ ک / ۶ = ع³ ک / ۶ ایک اور نئی ترکیب سے ثابت کرنی قاعدہ مساحت کرہ

کے یہہ ہی فرض کرو دو دائرے ص لا ط س اور

س ع لا ایک دوسرے کو تقاطع کرتے ہین بیچ خط س لا

کے اور ایک دوسری پر عمود ہین اب فرض کرو

ص ر = لا = ایک نہایت چھوٹی جز قطر کے اور

س ر = ی ∴ س لا = ۲ ی اور قطر ص ط = ط

∴ ر ط = ط − لا اور ر ط × ر ص = لا (ط − لا) = ط لا − لا² = ی² اور مساحت دائرہ

س ع لا = ی² ک = ک (ط لا − لا²) اب ظاہر ہی کہ مقدار ک (ط لا − لا²) بغیر تغیر کی ہی مساحت ایک دائرہ کی جو متوازی ہی دائرہ س ع لا کے اور مجموعہ ان سب دائرون کا مساوی ہی مساحت کرہ کے اور مجموعہ ان سب دائرون کا یہہ ہی

کہ { ط (ل + ۲ ل + ۳ ل + ل انتہا) — (لٓ۲ + ۴ لٓ۲ + ۹ لٓ۲ + ل انتہا) } =

کہ { ط۲ (ط + ۱) ط / ۲ — (ط × ط + ۱ × ۲ ط + ۱) / ۶ } اور چونکہ فرض کیا ہی ابھی

ط کو ل انتہا نسبت لاکی تو ط + ۱ = ط

∴ مساحت کرہ = کہ (ط۳ / ۲ — ط۳ / ۳) = کہ (۳ ط۳ / ۶ — ۲ ط۳ / ۶) = کہ ط۳ / ۶

اب فرض کرو کہ ایک اور کرہ ایسا ہی کہ اوسکا قطر = ص تو بموجب قاعدہ مرقومہ بالا کی اوسکی مساحت
= کہ ص۳ / ۶ اب نہایت ظاہر ہی کہ کہ ط۳ / ۶ : کہ ص۳ / ۶ :: ط۳ : ص۳ اس سے معلوم ہوا کہ کرے
ایک دوسری سے وہی نسبت رکھتے ہین جو کعب اونکی قطرون سے کے آپسمین رکھتے ہین
مرقومہ بالا سی ظاہر ہی کہ مساحت سطح ایک کرہ کی جسکا نصف قطر = ط سے کے ہی مساوی ہوتی ہی ۴ ط۲ کہ
اور اگر ایک اور کرہ ہو جسکا نصف قطر = ص تو اوسکی سطح کی مساحت = ۴ کہ ص۲ تو معلوم ہوا کہ
۴ ط۲ کہ : ۴ ص۲ کہ :: ط۲ : ص۲ اور اس سے یہہ ثابت ہوا کہ سطحین کرون کی آپسمین وہی نسبت رکھتی ہین
جو اونکی قطرون کے مجذور آپسمین رکھتی ہین

فصل ساتوین مقدارون نزولی کے بیانمین

اوس مقدار جبریہ کو جسکے اوپر علامت کسی مرتبے کے نزول کی ہو اور جسکا نزول پورا نہین نکل سکتا ہو اوس مقدار کو مقدار
نزولی کہتی ہین چند مثالین اس قسم کی مقدارون کے صفحہ ۱۳۶ مین ہمنے لکھی ہین اور وہان اونہین کے لکھنے
سے فقط یہہ مطلب تہا کہ اگر اس قسم کے مقدار کسی حساب مین واقع ہو تو طالب علم اوس پر بہی عمل ضروری
جاری کر سکے۔ لیکن ہمین ان سے بہت کام نہین پڑتا ہی جیسے اونکو ابواب گذشتہ مین نہین لکھا کیونکہ ہمارا
مطلب یہہ ہی کہ جو مطالب ضروری اور دلچسپ ہین وہ اول لکھے جاوین اور جو اتنے ضرور نہین ہین وہ بعد ازان لکھے
جائین اب ہم لکھتے ہین قواعد جو درباب مقدارون نزولی کے وضع کئے گئی ہین تبدیل کر سکتے ہین ہم کسی
مقدار کو مقدار نزولی سے اگر لیوین ہم مقدار نزولی کا اوس مرتبہ کا صعود
جسس مرتبہ کا نزول تعبیر کرتی ہی علامت نزول مقدار نزولی مطلوب کی مثلاً اگر ہم چاہین کہ مقدار ط کو بشکل جذر کے
تبدیل کرین تو لازم ہی کہ ہم اوسکا مجذور لین تو ظاہر ہی کہ ط۲ ہوتا ہی اور چونکہ √ط۲ = ط
تو معلوم ہوا کہ مقدار نزولی مطلوبہ یہہ ہی √ط۲ کہ مساوی ہی مقدار مفروضہ کے اسی مقدار کو اور

مقدارون نزولی سے بھی تعبیر کرسکتے ہیں مثلاً $ط = \sqrt[3]{ط^3}$ اور $ط = \sqrt[4]{ط^4}$ اور $ط = \sqrt[5]{ط^5}$ وغیرہ اور $ط + لا = (ط + لا)^{\frac{2}{2}}$ اسیطرح سے شکل کسی مقدار نزولی کی ایک اور شکل سے تبدیل کی جاسکتی ہے مثلاً $(ط + لا)^{\frac{1}{2}} = (ط + لا)^{\frac{2}{4}} = (ط + لا)^{\frac{3}{6}}$

اور علی ہذا القیاس دلیل قاعدہ مذکور کی نہایت ظاہر ہے اور وہ یہہ ہے کہ جس مرتبہ کا صعود لیا جاتا ہے اوسی مرتبہ کا نزول لیا جاتا ہے اور اسیواسطے جو مقدار عمل سے حاصل ہوتی ہے بامفروض مساوی ہوتی ہے مقدار مفروض کی اور اسیواسطے ہم لکھہ سکتے ہیں ایک کو بجای دوسرے کی اگر دو مقدارون نزولی کا ایک ہی نشان قوت ہووے تو حاصل ضرب اونکا دریافت ہوسکتا ہے اگر ضرب کرین ہم اون مقدارون کو جو علامات کے نیچے واقع ہیں اور حاصل ضرب پر لکھین علامت مذکور کو مثلاً

$ط^{\frac{1}{ن}} \times ص^{\frac{1}{ن}} = (ط ص)^{\frac{1}{ن}}$ اور $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ اور

$(ط + ص)^{\frac{1}{2}} \times (ط - ص)^{\frac{1}{2}} = (ط^2 - ص^2)^{\frac{1}{2}}$ اگر مقدار نزولی کی امثال ہی ہوں تو اونکی حاصل ضرب کو پہلے حاصل ضرب مقدارون نزولی کے لانا چاہیئے مثلاً

$ط\sqrt{لا} \times ص\sqrt{د} = ط ص\sqrt{لا د}$ اسجای یہہ بات بیان کرنی چاہیئے کہ حاصل ضرب $\sqrt{ا - ط^2} \times \sqrt{ا - ط^2}$ یعنے مربع $\sqrt{ا - ط^2}$ کا $ا - ط^2$ ہوتا ہے اسواسطے کہ یہہ وہ مقدار ہے جسکا جذر $\sqrt{ا - ط^2}$ ہے یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہے کہ

$$(لا - ط + \sqrt{-ص^2}) \times (لا - ط - \sqrt{-ص^2}) = لا^2 - 2 ط لا + ط^2 + ص^2$$

اگر نشان قوت دو مقدارون نزولی کی مخرج ایک سے ہون تو لازم کہ ان مقدارون نزولی کا اوسنے ہی مرتبہ کا صعود لو جتنے احاد ہون اونکی نشان قوت کے شمار کنندہ مین اور بعد ازان ان مقدارون نزولی کا حاصل ضرب بطریق گذشتہ کی دریافت ہوسکتا ہے

مثال $2^{\frac{3}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = (24)^{\frac{1}{2}}$ اور اسیطرح سے حاصل ہوتا ہے حاصل ضرب آئندہ

$$(ط + ص)^{\frac{1}{2}} \times (ط - ص)^{\frac{3}{2}} = \left((ط + ص) \times (ط - ص)^3\right)^{\frac{1}{2}}$$

اگر نشان قوت مقدارون نزولی کے ایک سے نہون تو ان کو تبدیل کرسکتے ہیں اور مقدار نزولی ایسی سے کہ

اونکی نشان قوت کے نسب نما ایک سے ہون اور بعد ازان اونکا حاصل ضرب بطریق گذشتہ کی معلوم ہوسکتا ہی

مثال $(ط^۲ - لا^۲)^{\frac{۱}{۲}} \times (ط - لا)^{\frac{۱}{۲}} = (ط^۲ - لا^۲)^{\frac{۱}{۲}} \times (ط - لا)^{\frac{۱}{۲}}$ اور اسیواسطی حاصلضرب مطلوبہ

یہہ ہوگا $\left\{ (ط^۲ - لا^۲) \times (ط - لا)^۲ \right\}^{\frac{۱}{۲}}$ اور اسیطورسی حاصل ہوتا ہی حاصل ضرب آئندہ

$\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۳}{۲} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۳}{۶} \times \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۸} \times \frac{۱}{۹} = (۷۲)^{\frac{۱}{۶}}$ اگر دو مقدارین غیرنزولی جو سیجے علامت نزولی کے

واقع ہین ایک سی ہون تو حاصل ضرب انکا دریافت ہوسکتا ہی اگر جمع کرین ہم ان نشانون قوت یا نزولی کو اور بناوین

اس حاصل جمع کو نشان قوت حاصل ضرب کا مثلاً

$ط^{\frac{۱}{ن}} \times ط^{\frac{۱}{م}} = ط^{\frac{م}{م ن}} \times ط^{\frac{ن}{م ن}} = ط^{\frac{م + ن}{م ن}}$ اور یہہ مطابق ہی اوسکی جو ابواب گذشتہ مین بیان کیا گیا ہے

مثال $\sqrt[۳]{۲} \times \sqrt{۸} = ۲ \times ۲^{\frac{۳}{۶}} = ۲^{\frac{۲}{۶} + \frac{۳}{۶}} = ۲^{\frac{۵}{۶}}$ اگر نشان قوت دو مقدارون نزولی کے

مخرج ایک سے ہون اور ایک کو اپنین سیسے دوسرے پر قسمت کیا چاہین تو خارج قسمت انکا معلوم

ہوسکتا ہی اگر لیوین ہم ان دونو مقدارون نزولی کا علیحدہ علیحدہ اوسی مرتبہ کا صعود جتنے احاد

ہین اونکے نشانون قوت کی شمار کنندونین علیحدہ علیحدہ اور بعد ازان قسمت کرین ان حاصل صعودون

کو ایک دوسری پر اور لیوین اسس خارج قسمت کا اوسی مرتبہ کا نزول جتنے احاد ہین مخرج مشترک نشانون

قوت مذکورمین اور دلیل اسکی یہہ ہے $\frac{ط^{\frac{۱}{ن}}}{ص^{\frac{۱}{ن}}} = \left(\frac{ط}{ص}\right)^{\frac{۱}{ن}}$ اور $\frac{ط^{\frac{م}{ن}}}{ص^{\frac{م}{ن}}} = \left(\frac{ط^م}{ص^م}\right)^{\frac{۱}{ن}}$

مثال $۴^{\frac{۱}{۲}} \div ۲^{\frac{۳}{۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۸}} = \left(\frac{۴}{۸}\right)^{\frac{۱}{۲}}$ اور اسیطور سے حاصل ہوتا ہی حاصل ضرب آئندہ

$\left(\frac{ف}{ن}\right)^{\frac{۱}{م}} \div \left(\frac{س}{ر}\right)^{\frac{۲}{م}} = \left(\frac{ف\ س^۲}{ن\ ر^۲}\right)^{\frac{۱}{م}}$

اگر مخرج نشانون قوت کی ایک سے یعنے مساوی نہون تو اس صورت مین لازم ہی کہ ان مخرجون کو

ایک کرین یعنے مقدارون نزدلی مفروض کو ایسی مقدارون سے تبدیل کرین کہ اونکی نشانون قوت سے کے نسب نما ایک سے ہون اور بعد ازان عمل کرین بطریق گذشتہ کی اور اسس عمل سے خارج قسمت مطلوب معلوم ہوجاویگا

مثال $(\text{ط}^{۲}-\text{ل}^{۲})^{\frac{۱}{۲}} \div (\text{ط}^{۳}-\text{ل}^{۳})^{\frac{۱}{۳}} = (\text{ط}^{۲}-\text{ل}^{۲})^{\frac{۳}{۶}} \div (\text{ط}^{۳}-\text{ل}^{۳})^{\frac{۲}{۶}} =$

$$\frac{(\text{ط}^{۲}-\text{ل}^{۲})^{\frac{۳}{۶}}}{(\text{ط}^{۳}-\text{ل}^{۳})^{\frac{۲}{۶}}} = \left(\frac{(\text{ط}^{۲}-\text{ل}^{۲})^{۳}}{(\text{ط}^{۳}-\text{ل}^{۳})^{۲}}\right)^{\frac{۱}{۶}}$$

اگر دو مقدارون نزدلی کے نشانون قوت کی نیچے ایکہی مقدار غیر نزدلی پایی جاے تو خارج قسمت انکا دریافت ہوسکتا ہی اگر تفریق کرین ہم ان نشانون قوت کو ایک دوسرے مین سے اور مقرر کرین اسس حاصل تفریق کو نشان قوت خارج قسمت کا مثلاً اگر تقسیم کرین $\text{ط}^{\frac{۱}{\text{ن}}}$ کو $\text{ط}^{\frac{۱}{\text{م}}}$ پر یا $\text{ط}^{\frac{\text{م}}{\text{ن م}}}$ کو $\text{ط}^{\frac{\text{ن}}{\text{ن م}}}$ پر تو خارج قسمت یعنے

$$\frac{\text{ط}^{\frac{\text{م}}{\text{ن م}}}}{\text{ط}^{\frac{\text{ن}}{\text{م ن}}}} = \text{ط}^{\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م ن}}}$$ اور یہہ بات بہت ظاہر ہی

مثال $۲^{\frac{۱}{۲}} \div ۲^{\frac{۱}{۳}} = ۲^{\frac{۳}{۶}} \div ۲^{\frac{۲}{۶}} = ۲^{\frac{۱}{۶}}$ امثال یعنے سر کسی مقدار نزدلی کو اندر نشان نزدلی سے لا سکتے ہین اگر اول اوسکو بشکل مقدار نزدلی سے کے تبدیل کرین اور بعد ازان عمل ضرب کا کرین جیسیکہ بیان کیا گیا ہے سابق مین مثلاً $\text{ط}\sqrt{\text{ل}} = \sqrt{\text{ط}^{۲}} \times \sqrt{\text{ل}} = \sqrt{\text{ط}^{۲}\text{ل}}$ اور

$\text{ط}^{\frac{۳}{۲}} = (\text{ط}^{۳})^{\frac{۱}{۲}}$ اور $\text{ل}\sqrt{۲\text{ط}-\text{ل}} = \sqrt{۲\text{ط}\text{ل}^{۲}-\text{ل}^{۳}}$ اور

$\text{ط}(\text{ط}-\text{ل})^{\frac{۳}{۲}} = \left\{\text{ط}^{۲}(\text{ط}-\text{ل})^{۳}\right\}^{\frac{۱}{۲}}$ اور اسیطور سے $۲\sqrt{۸} = \sqrt{۲\times۱۶} = \sqrt{۳۲}$

اگر مطلوب ہو ہمین کہ کوئی خاص مقدار امثال کسی مقدار نزدلی مفروض کی ہوجاوے تو لازم ہی کہ لیوین ہم اتنی مرتبہ کا نزدل مقدار نزدلی مفروض کا لیا گیا ہی اور بعد ازان قسمت کرین ہر جز اوسس مقدار کو جو نیچے علامت نزدلی سے کے واقع ہی خاص معلوم مذکور پر اور اسس عمل سے ہمارا مطلب حاصل ہوجائیگا مثلاً

$\sqrt{\text{ط}^{۲}-\text{ط}\text{ل}} = \text{ط}^{\frac{۱}{۲}} \times \sqrt{\text{ط}-\text{ل}}$ اور اسیطور سے $\sqrt{\text{ط}^{۳}-\text{ط}^{۲}\text{ل}} = \text{ط} \times \sqrt{\text{ط}-\text{ل}}$

اور $(ط^2 - لا^2)^{\frac{1}{ن}} = ط^{\frac{2}{ن}} \times \left(1 - \frac{لا^2}{ط^2}\right)^{\frac{1}{ن}}$ اور $\sqrt{60} = \sqrt{4 \times 15} = 2\sqrt{15}$

اور $\left(\frac{1}{ص^2} - \frac{1}{لا^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{ص}\left(1 - \frac{ص^2}{لا^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ اور $\sqrt{لا^3 - لا} = \sqrt{لا} \times \sqrt{لا^2 - 1}$

جبکہ کسی مقدارون نزدلی کی امثال ایک سی ہون یعنے مساوی ہون تو حاصل جمع یا حاصل تفریق انکا دریافت ہو سکتا ہی اگر نکالین ہم حاصل جمع یا حاصل تفریق انکی امثال کا ساتہہ مشترک مقدارون نزدلی کے

مثلاً $ط\sqrt{لا} \pm ص\sqrt{لا} = (ط \pm ص)\sqrt{لا}$ اور

$\sqrt{300} \pm 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3} \pm 5\sqrt{3} = 15\sqrt{3}$ یا $5\sqrt{3}$

جذر کسی مقدار کا نہین ہو سکتا ہی حاصل جمع ایسی دو مقدار دن کا کہ ایک تو ان مین کی مقدار غیر نزدلی اور دوسری مقدار نزدلی دوسرے مرتبہ کی یعنی جذر ہو کیونکہ اگر ایسا ممکن ہو تو فرض کرو کہ $\sqrt{ن} = ط + \sqrt{م}$

اب اگر لو مجذور دونو طرفون اس مساوات کا تو حاصل ہو گی یہہ مساوات

$ن = ط^2 + 2ط\sqrt{م} + م$ اور $2ط\sqrt{م} = ن - ط^2 - م$ اور اسیواسطے

$\sqrt{م} = \frac{ن - ط^2 - م}{2ط}$ اور یہہ ایک مقدار غیر نزدلی ہی پس لازم آیا خلاف فرض کیونکہ $\sqrt{م}$ کو

ہمنے ایک مقدار نزدلی مانا تہا اور وہ اب ثابت ہوئی مقدار غیر نزدلی اگر کوی ایسی مساوات ہو کہ ایک طرف اوسکے حاصل جمع ہو کسی مقدار غیر نزدلی اور کسی مقدار نزدلی کا اور دوسری طرف اوسکی حاصل جمع ہو کسی اور مقدار غیر نزدلی اور کسی اور مقدار نزدلی کا اور دونون طرف مقدارین نزدلی فقط دوسری مرتبہ کی ہون تو ہم کہسکتے ہین کہ مقدار غیر نزدلی اول طرف کی مساوی ہوگی مقدار غیر نزدلی دوسری طرف کی اور اسیطور سے مقدار نزدلی اول طرف کی مساوی ہوگی مقدار نزدلی دوسرے طرف کی مثلاً اگر ہووے یہہ مساوات $لا + \sqrt{ى} = ط + \sqrt{ص}$ تو ضرور ہی کہ $لا = ط$ اور $\sqrt{ى} = \sqrt{ص}$ اگر لا نہین مساوی ہو ط کی تو فرض کرو کہ $لا = ط + م$ اور اسیواسطے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $ط + م + \sqrt{ى} = ط + \sqrt{ص}$ اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $م + \sqrt{ى} = \sqrt{ص}$ یعنے $\sqrt{ص}$ حاصل جمع ہی دو مقدارون ایسی کا کہ ایک اونمین مقدار نزدلی اور دوسری مقدار غیر نزدلی دوسرے مرتبہ کی ہی اور یہہ محال ہی موافق اوسکے کہ ابہی ثابت کیا گیا ہی پس معلوم ہوا $لا = ط$ اور اسیواسطے $\sqrt{ى} = \sqrt{ص}$ اگر دو مقدار نزدلی دوسرے مرتبہ کی مثل $\sqrt{لا}$ اور $\sqrt{ى}$ کے ایسی ہون کہ وہ نہین تحویل ہو سکتی ہون طرف اورون کے جنمین جز نزدلی ایک ہو تو حاصل ضرب ایسی مقدارون نزدلی کا نزدلی ہوتا ہی اگر ایسا نہو یعنی حاصل ضرب مذکور مساوی ایک مقدار غیر نزدلی

سے کے ہو تو فرض کرو کہ $\sqrt{\text{لا}}$ و = رلا اور اسجای ر یا تو ایک عدد صحیح یا ایک کسر کو تعبیر کرتا ہے اب ظاہر ہے کہ جسوقت لیوین گے ہم مجذور دونو طرفون اس مساوات کا تو حاصل ہوگی یہہ مساوات لا و = ر^2 لا^2 اور و = ر^2 لا اور اسیواسطے $\sqrt{\text{و}}$ = ر $\sqrt{\text{لا}}$ اور یہان سی یہہ بات ثابت ہوتی ہے کہ $\sqrt{\text{لا}}$ اور $\sqrt{\text{و}}$ ایسی مقدارین نزولی ہین کہ تحویل کی جاسکتی ہین طرف ایسی دو مقدارون نزولی سے کے جنمین جز ضربی نزولی ایک ہو یعنی وہی دونو مین پایا جاوے اور یہہ خلاف فرض کی ہے ایک مقدار نزولی دوسرے مرتبہ کی مثل $\sqrt{\text{لا}}$ کی نہین ہوسکتی ہے حاصل جمع دو اور ایسی ہی مقدارون نزولی مثل $\sqrt{\text{م}}$ اور $\sqrt{\text{ن}}$ کی اگر انمین ایکہی جز ضربی نزولی نہین پایا جاسے اگر ایسا ہوسکتا ہے تو فرض کرو کہ $\sqrt{\text{لا}} = \sqrt{\text{م}} + \sqrt{\text{ن}}$ اور جسوقت مجذور کرتے ہین دونو طرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہے یہہ مساوات لا = م + ن + ۲ $\sqrt{\text{م ن}}$ اور لا − م − ن = ۲ $\sqrt{\text{م ن}}$ اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہے کہ ایک مقدار غیر نزولی مساوی ہوتی ہے ایک مقدار نزولی سے کے اور یہہ بات محال ہے اگر ہووی یہہ مساوات $(\text{ط} + \text{ص})^{\frac{1}{\text{س}}} = \text{لا} + \sqrt{\text{و}}$ اور اسجای س ہووی کوئی عدد جفت اور ط ایک مقدار غیر نزولی اور ص ایک مقدار نزولی دوسرے مرتبہ کی اور لا اور و مین سے یا تو ایک یا دونون مقدارین نزولی دوسرے مرتبہ کی ہون تو ہم دعوی کرتے ہین کہ ہوگی یہہ مساوات $(\text{ط} - \text{ص})^{\frac{1}{\text{س}}} = \text{لا} - \sqrt{\text{و}}$ اب اگر لیا جاسے دونون طرفون اس مساوات کا س مرتبہ کا صعود تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$\text{ط} + \text{ص} = \text{لا}^{\text{س}} + \text{س}\,\text{لا}^{\text{س}-1}\sqrt{\text{و}} + \text{س}\frac{\text{س}-1}{2}\text{لا}^{\text{س}-2}\sqrt{\text{و}}^{\,2} + \text{س}\frac{\text{س}-1}{2}\cdot\frac{\text{س}-2}{3}\text{لا}^{\text{س}-3}\sqrt{\text{و}}^{\,3}$$

+ وغیرہ اور چونکہ س ایک عدد جفت ہے تو ضرور ہے کہ طاق اجزا اس سلسلہ کی مقدارین نزولی ہون اور جفت اجزا غیر نزولی اور یہان سے معلوم ہوا کہ $\text{ط} = \text{لا}^{\text{س}} + \text{س}\frac{\text{س}-1}{2}\text{لا}^{\text{س}-2}\sqrt{\text{و}}^{\,2}$ + وغیرہ اور

$$\text{ص} = \text{س}\,\text{لا}^{\text{س}-1}\sqrt{\text{و}} + \text{س}\frac{\text{س}-1}{2}\cdot\frac{\text{س}-2}{3}\text{لا}^{\text{س}-3}\sqrt{\text{و}}^{\,3} + \text{وغیرہ}$$

اور اسیواسطے اگر تفریق کرین ہم مساوات دوم کو مساوات اول مین سے تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$\text{ط} - \text{ص} = \text{لا}^{\text{س}} - \text{س}\,\text{لا}^{\text{س}-1}\sqrt{\text{و}} + \text{س}\frac{\text{س}-1}{2}\text{لا}^{\text{س}-2}\sqrt{\text{و}}^{\,2} - \text{س}\frac{\text{س}-1}{2}\cdot\frac{\text{س}-2}{3}\text{لا}^{\text{س}-3}\sqrt{\text{و}}^{\,3}$$

+ وغیرہ اور یہان سے معلوم ہوا کہ $(\text{ط} - \text{ص})^{\frac{1}{\text{س}}} = \text{لا} - \sqrt{\text{و}}$ اگر س ہووی ایک طاق عدد اور ط اور ص یا تو ایک یا دونون مقدارین نزولی دوسرے مرتبہ کی ہون اور لا اور و مین پائی جائین وے مقدارین

نزولی جو ط اور ص مین پائی جاتی ہین علیحدہ علیحدہ اور بموجب یہہ مساوات $(ط+ص)^{\frac{1}{س}} = لا + د$
تو ہم کہتے ہین کہ $(ط - ص)^{\frac{1}{س}} = لا - د$ ۔ اب اگر جاری کرین ہم عمل صعود کا دونو طرفون اس مساوات
$(ط+ص)^{\frac{1}{س}} = لا + د$ پر اور مرتبہ صعود کا بقدر احاد س کے مقرر کرین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$ط+ص = لا^{س} + س\, لا^{س-1} د + س\frac{س-1}{2} لا^{س-2} د^{2} + س\frac{س-1}{2}\frac{س-2}{3} لا^{س-3} د^{3}$$

+ وغیرہ اور اس مساوات مین ضرور ہی کہ اجزاء طاق مین وہی مقدار نزولی پائی جاوے جو لا مین پائی جاتی ہی
اسواسطی کہ س ایک عدد طاق ہی اور یہہ بہی ضرور ہی کہ اجزاء جفت مین وہی مقدار نزولی جو د مین پائی
جاتی ہی اور چونکہ کوئی جزء ط نہین مرکب ہوسکتا ہی د سے یا کسی جزء اوسکی سے جیسکہ پہلی ثابت ہوا ہی

تو ضرور ہی کہ $ط = لا^{س} + س\frac{س-1}{2} لا^{س-2} د^{2}$ + وغیرہ اور اسیواسطی

$ص = س\, لا^{س-1} د + س\frac{س-1}{2}\frac{س-2}{3} لا^{س-3} د^{3}$ + وغیرہ

اور جسوقت تفریق کرینگے ہم مساوات اول مین سے مساوات دویم کو تو اسوقت حاصل ہوگی یہہ مساوات

$ط - ص = لا^{س} - س\, لا^{س-1} د + س\frac{س-1}{2} لا^{س-2} د^{2}$ + وغیرہ اور اسیواسطی معلوم ہوا کہ
$(ط-ص)^{\frac{1}{س}} = لا - د$ جذر ایک ایسی مجموعہ دو جزو نکا کہ جسکا ایک جزء تو مقدار نزولی دوسرے مرتبہ کی
ہو اور دوسرا جزء ایک مقدار غیر نزولی ہو بعض اوقات بغیر ہو سکتا ہی ایک ایسی مجموعہ دو جزون کی سے
کہ ایک یا دونون اینمین مقدارین نزولی دوسرے مرتبہ کی ہون فرض کرو کہ $ط + \sqrt{ص}$ مجموعہ مفروض ہو جذر نکا
ہی اور یہہ بہی فرض کرو کہ $\sqrt{ط + \sqrt{ص}} = لا + د$ (1) اور اسیجای لا یا دونو لا اور د مقدار نزولی
دوسرے مرتبہ کی ہین۔ پس اب موافق اوسکے جو سابق مین ثابت کیا گیا ہی یہہ بات ظاہر ہی کہ
$\sqrt{ط - \sqrt{ص}} = لا - د$ اور جسوقت ضرب کرین ہم اس مساوات کو مساوات گذشتہ مین تو حاصل ہوگی
یہہ مساوات $\sqrt{ط^{2} - ص} = لا^{2} - د^{2}$ اور اب اگر مجذور کرین دونو طرفون اول مساوات کو تو حاصل ہوینگے
یہہ مساوات $ط + \sqrt{ص} = لا^{2} + 2 لا د + د^{2}$ اور چونکہ ضرور ہی کہ اس صورت مین

$ط = لا^{2} + د^{2}$ تو جسوقت جمع کرینگی ہم مساوات $\sqrt{ط^{2} - ص} = لا^{2} - د^{2}$ پر مساوات

ط + $\sqrt{\text{ص}}$ = لا^{۲} + ۲ لا ى + ى^{۲} کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

ط + $\sqrt{\text{ص}}$ + $\sqrt{\text{ط}^{۲} - \text{ص}}$ = ۲ لا^{۲} + ۲ لا ى لیکن $\sqrt{\text{ص}}$ = ۲ لا ى تو معلوم ہوا کہ

ط + $\sqrt{\text{ط}^{۲} - \text{ص}}$ = ۲ لا^{۲} اگر بجای جمع کرنی کے تفریق کرین ہم ایک کو مساواتون مذکورین مین سے دوسری

سے تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ط − $\sqrt{\text{ط}^{۲} - \text{ص}}$ = ۲ ى^{۲}

$$\text{اور لا} = \sqrt{\frac{\text{ط} + \sqrt{\text{ط}^{۲} - \text{ص}}}{۲}} \quad \text{اور ى} = \sqrt{\frac{\text{ط} - \sqrt{\text{ط}^{۲} - \text{ص}}}{۲}}$$

اور اسیواسطی جذر مطلوب یہہ ہوگا

$$\text{لا} + \text{ى} = \sqrt{\frac{\text{ط} + \sqrt{\text{ط}^{۲} - \text{ص}}}{۲}} + \sqrt{\frac{\text{ط} - \sqrt{\text{ط}^{۲} - \text{ص}}}{۲}}$$

اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ جذر ط + $\sqrt{\text{ص}}$ کا اوس وقت ایک مجموعہ دو جزون مثل لا + ى کی
کہ انمین سے ایک یا دونو مقدارین نزدلی دوسری مرتبہ کی ہین تعبیر ہوسکتا ہی جبکہ ط^{۲} − ص ایک مجذور کامل ہو

مثال (۱) چاہتے ہین ہم دریافت کرنا جذر ۳ + ۲$\sqrt{۲}$ کا اس صورت مین ظاہر ہی کہ ط = ۳
اور $\sqrt{\text{ص}}$ = ۲$\sqrt{۲}$ اور ط^{۲} − ص = ۹ − ۸ = ۱ = کامل مجذور پس معلوم ہوا کہ

$$\text{لا} = \sqrt{\frac{۳+۱}{۲}} = \sqrt{۲} \quad \text{اور ى} = \sqrt{\frac{۳-۱}{۲}} = ۱ \quad \text{اور اسیواسطے}$$

$$\text{لا} + \text{ى} = \sqrt{۲} + ۱$$

مثال (۲) چاہتے ہین ہم دریافت کرنا جذر ۷ − ۲$\sqrt{۱۰}$ کا اس صورت مین ظاہر ہی کہ
ط = ۷ اور $\sqrt{\text{ص}}$ = ۲$\sqrt{۱۰}$ اور ط^{۲} − ص = ۹ = کامل مربع کی اور یہان سے معلوم ہوا کہ

$$\text{لا} = \sqrt{\frac{۷+۳}{۲}} = \sqrt{۵} \quad \text{اور ى} = \sqrt{\frac{۷-۳}{۲}} = \sqrt{۲} \quad \text{اور اسیواسطی}$$

$$\text{لا} - \text{ى} = \sqrt{۵} - \sqrt{۲} \quad \text{اور یہی ہی جذر مطلوبہ}$$

مثال (۳) چاہتے ہین ہم دریافت کرنا جذر ۴$\sqrt{-۵}$ − ۱ کا اسجای ظاہر ہی
کہ ط = −۱ اور $\sqrt{\text{ص}}$ = ۴$\sqrt{-۵}$ اور ط^{۲} − ص = ۸۱ جو ایک مجذور پورا ہی تو معلوم ہوا کہ

$$\text{لا} = \sqrt{\frac{-۱+۹}{۲}} = ۲ \quad \text{اور ى} = \sqrt{\frac{-۱۰}{۲}} = \sqrt{-۵}$$

پس معلوم ہوا کہ جذر مطلوبہ یہہ ہی ۲ + $\sqrt{-۵}$ بعضی اوقات سن کتنا نزول کسی مجموعہ دو جزو کا کہ جسکی
ایک یا دونون اجزا دوم مرتبہ کی مقدارین نزولی ہین تعبیر ہوسکتا ہی ایک مجموعہ دو جزون سے کسی ایسی کہ ایک

یا دونون اینمین سے بہی دوم مرتبہ کی مقدارین نزولی ہون یہہ بات اسطرح سے ثابت ہوسکتی ہی فرض کرو کہ ا + ب ہی مجموعہ مفروض جسمین دو نوجز ممکن ہین یعنی اینمین کوئی مقدار غیر ممکن نہین پائی جاتی ہی اور جتنی مقدارین کہ نیچے علامت نزولی کے واقع ہین تو یہ سب اعداد صحیح ہین اور ا زیادہ ہی بہ نسبت ب سے اور یہہ بہی فرض کرو کہ $\sqrt[س]{(ا + \sqrt{ب}) ق} = لا + \sqrt{د}$ تب موافق اوسکی جو کہ سابق مین ثابت ہوا ہی یہہ بات ظاہر ہی کہ $\sqrt[س]{(ا - \sqrt{ب}) ق} = لا - \sqrt{د}$ اور جسوقت ضرب کرین ہم ان دونو مساواتون کو آپسمین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $\sqrt[س]{(ا^{٢} - ب) ق} = لا^{٢} - د$ اب فرض کرو واسطے ق کے کوئی ایسا عدد کہ مقدار $(ا^{٢} - ب)$ ق ایک کامل س مرتبہ کا صعود ہوجائے یعنی پیدا ہوجائے ایک مساوات مثل اسکے $(ا^{٢} - ب) ق = ن^{س}$ پس اب حاصل ہوگی یہہ مساوات $لا^{٢} - د = ن$ اب مجدد کرو دونون مساواتون گذشتہ کو تو حاصل ہونگی یہ دو مساواتین

$$\sqrt[س]{(ا + \sqrt{ب})^{٢} \times ق} = لا^{٢} + ٢ لا \sqrt{د} + د$$

$$\sqrt[س]{(ا - \sqrt{ب})^{٢} \times ق} = لا^{٢} - ٢ لا \sqrt{د} + د$$ اور یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ

$$\sqrt[س]{(ا + \sqrt{ب})^{٢} \times ق} + \sqrt[س]{(ا - \sqrt{ب})^{٢} \times ق} = ٢ لا^{٢} + ٢ د$$

اور یہہ عدد ہمیشہ صحیح ہوتا ہی جبکہ مقدار نزولی دوسرے مرتبہ کی ہوتی ہی اب فرض کرو کہ ج اور د نہایت قریب قیمتین اعداد صحیح مقدارون $\sqrt[س]{(ا + \sqrt{ب})^{٢} \times ق}$ اور $\sqrt[س]{(ا - \sqrt{ب})^{٢} \times ق}$ کی ہین اور ایک اینمین قیمت اصلی سے زیادہ ہی اور دوسرے کم اب چونکہ حاصل جمع ان مقدارون نزولی کا مساوی ایک عدد صحیح کی ہوتا ہی تو ضرور ہی کہ جو کسور ہر واحد مین اینمین سے پائی جاتی ہون وہ زائل ہوجائینگی جب قیمت اونکی جمع کرینگی اور اسی واسطی لازم آتا ہی یہہ کہ ہووی یہہ مساوات $٢ لا^{٢} + ٢ د = ج + د$ بالکل درست اوسوقت جسوقت کہ س وین مرتبہ کا نزول مقدار نزولی مفروض کا دریافت ہوسکتا ہی پس اب حاصل ہوتی ہین ہمین یہ دو مساواتین $لا^{٢} - د = ن$ اور $لا^{٢} + د = \frac{ج + د}{٢}$ اور اسی واسطے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $٢ لا^{٢} = ن + \frac{ج + د}{٢} = \frac{٢ن + ج + د}{٢}$ اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ $لا^{٢} = \frac{٢ن + ج + د}{٤}$ اور اسی واسطی حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت لا کی

$$لا = \frac{\sqrt{٢ن + ج + د}}{٢}$$ تفریق کرنی سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

$$٢ د = \frac{ج + د - ٢ن}{٢}$$ اور اسی واسطی حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت د کی

$$\sqrt{د} = \frac{\sqrt{ج + د - ٢ن}}{٢}$$ پس یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اگر قیمت

$\sqrt[س]{(ا + \sqrt{ب}) \times \sqrt{ق}}$ کی ہووی اس شکل $لا + \sqrt{د}$ کی تو ضرور ہی کہ ہووی وہ یہہ

اور اسیواسطی س مرتبہ کا نزول ا + ب کا یہہ ہی س√(ر + د + ح√(ر + د − ۲ن) + ۲ن) ÷ ۲

س√(ح + ر + د + ح√(ر + د − ۲ن) + ۲ن) ÷ ۲س√ق۲

مثال (۱) چاہتے ہیں دریافت کرنا کعب ۱۰ + √۱۰۸ کا اس صورت مین ظاہر ہی کہ ا = √۱۰۸

اور ب = ۱۰ اور اسیو ا۲ − ب۲ = ۸ اور (ا۲ − ب۲) ق = ۸ ق = ق۳

پس اگر فرض کیا جاوے ق = ۱ تو ن = ۲ اب ظاہر ہی کہ ۳√(ا + ب)۲ = ۴ + ف اور

۳√(ا − ب)۲ = ۱ − ف اور اسجگہ ف تعبیر کرتا ہی ایک کسر کو جو کم ہی عدد ایک کی سے پس معلوم ہوا کہ

ح = ۷ اور د = ۱ اور اسیواسطی حاصل یہہ مساوات ہوئی

لا + ی = (√۱۲ + ۲) ÷ ۲ = √۳ + ۱ اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اگر کعب ۱۰ + √۱۰۸ کا

تعبیر ہوسکے بیچ شکل مطلوب کی تو ضرور ہی کہ وہ شکل √۳ + ۱ ہو اور امتحان کرنی سے بہی معلوم ہوتا ہے

کہ کعب مذکور کی شکل یہی √۳ + ۱ ہی

مثال (۲) چاہتے ہین دریافت کرنا کعب ۳√۳ + √۷ اس صورت مین ظاہر ہی کہ

ا = ۲√۷ اور ب = ۳√۳ اور ا۲ − ب۲ = ۱ اور یہان سے معلوم ہوتا ہی یہہ

ق = ۱ اور ن = ۱ اور یہہ ظاہر کہ ۳√(ا + ب)۲ = ۴ + ف اور ۳√(ا − ب)۲ = ۱ − ف

اور یہان سے معلوم ہوا کہ ح = ۴ اور د = ۱ اور اسیواسطی لا + ی = (√۷ + √۳) ÷ ۲ اور یہہ مقدار امتحان کرنی

سے صحیح نکلتی ہی بطور مرقومہ بالا کی س مرتبہ کا نزول ا − ب کا دریافت ہوسکتا ہی اور وہ یہہ ہی

س√(ح + د + ۲ن − ح√(ح + د − ۲ن)) ÷ ۲س√ق۲ اور اس صورت جبریہ مین ظاہر ہی کہ جسوقت

ا ہی کم بہ نسبت ب کی تو ن نفی ہوگا اسواسطی کہ حاصل تفریق لا − ی منفی یعنی − (لا − ی) ہوجائیگا

اور حاصل ضرب لا۲ − ی۲ بہی نفی ہوجائیگا اور اسکا مساوی لہ بہی جو ن ہی منفی ہوجائیگا معلوم ہو قومہ بالا

مین یہہ بات مطلوب ہوتی ہی کہ کوئی ایسا عدد جیسا کہ ق ہی کے دریافت کیا جاوی کہ اگر اوسکو (ا۲ − ب۲)

مین ضرب کرین تو حاصل ضرب ایک کامل س مرتبہ کا صعود ہو یعنی (ا۲ − ب۲) × ق ہو دیے

ایک کامل س مرتبہ کا صعود ظاہر ہی کہ یہہ بات حاصل ہو سکتی ہو اگر فرض کرین ق کو مساوی $(\text{ا}^{\text{ل}} - \text{ب}^{\text{م}})^{\text{س}-1}$ کے کیونکہ اس صورت مین

$$(\text{ا}^{\text{ل}} - \text{ب}^{\text{م}}) \times \text{ق} = (\text{ا}^{\text{ل}} - \text{ب}^{\text{م}}) \times (\text{ا}^{\text{ل}} - \text{ب}^{\text{م}})^{\text{س}-1} = (\text{ا}^{\text{ل}} - \text{ب}^{\text{م}})^{\text{س}}$$

لیکن اگر اس سے ایک کم عدد کو دریافت کیا چاہین ایسا کہ اوس سے بہی شرط مطلوب پوری ہوتی ہو تو فرض کرو کہ $\text{ا}^{\text{ل}} - \text{ب}^{\text{م}}$ قسمت ہو سکتا ہی متواتر کئی بار یعنے م بار ط پر اور ن بار ص پر اور ر بار د پر اور علی ہذا القیاس پس فرض کرو $\text{ا}^{\text{ل}} - \text{ب}^{\text{م}} = \text{ط}^{\text{م}}\ \text{ص}^{\text{ن}}\ \text{د}^{\text{ر}}$ وغیرہ اور اب فرض کرو کہ $\text{ق} = \text{ط}^{\text{ل}}\ \text{ص}^{\text{ی}}\ \text{د}^{\text{ع}}$ وغیرہ اور اس صورت مین ظاہر ہی کہ

$(\text{ا}^{\text{ل}} - \text{ب}^{\text{م}})\,\text{ق} = \text{ط}^{\text{م}+\text{ل}} \times \text{ص}^{\text{ن}+\text{ی}}$ وغیرہ اور یہہ مقدار ایک کامل حاصل صعود س مرتبہ کا ہی بشرطیکہ ل اور ی اور ع اسطرح سی فرض کیے جائین کہ ل + م اور ن + ی اور ر + ع علیحدہ علیحدہ مساوی ہوں س کے یا کسی ضعف اسکی کے مثلاً اگر دریافت کیا چاہین کوئی ایسا عدد کہ اگر اوسی ۸۰ مین ضرب کرین تو حاصل ضرب ایک کامل مکعب ہوئی پس اس صورت مین لازم ہی کہ قسمت کرین ہم اس عدد کو جہانتک ممکن ہو اعداد ۲ ۳ ۵ وغیرہ پر اور یہان سے یہہ ظاہر ہوتا ہی کہ $۸۰ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۵$ پس اب اگر ضرب کرین اسے $۲ \times ۲ \times ۵ \times ۵$ سے تو حاصل ضرب ہوتا ہی $۲^{۳} \times ۲^{۳} \times ۵^{۳}$ یعنے $(۲ \times ۲ \times ۵)^{۳}$ جو ایک کامل مکعب ہی بیان تمام کرتے ہین اس فصل کو گو اسمین بہی مطالب باقی رہتے ہین لیکن یہہ توقع ہی کہ جو کچھہ لکھا گیا ہی وہ کفایت کریگا

فصل اٹھوین سلسلون کے بیان مین

پہلا قاعدہ فرق کے بیان مین

اگر ایک سلسلہ مقدارون مثل ا اور ب اور ج اور د اور س وغیرہ کا ہو اور ہر واحد ان مقدارون مین سے مقدار مابعد اپنی کی سے تفریق کی جاے تو ظاہر ہی کہ ایک نیا سلسلہ حاصل تفریقون کا پیدا ہوگا اور یہہ جز اس سلسلہ کو فرق اول مرتبہ کا کہتے ہین اور اگر تفریق کرین ہم ہر جز اس سلسلہ کو اوسکے پہلی جز مین سے تو پیدا ہوگا ایک تیسرا سلسلہ حاصل تفریقونکا اور ہر جز اس سلسلہ کا فرق مرتبہ دویم کا کہلاتا ہی اور علی ہذا القیاس مثلاً اگر جاری کرین ہم عمل مذکور تو حاصل ہونگی یہ سے مساواتین

فرق اول ب − ا اور ج − ب اور د − ج وغیرہ

فرق دویم ج − ۲ب + ا اور د − ۲ج + ب وغیرہ

فرق سویم د − ۳ج + ۳ب − ا اور س − ۳د + ۳ج − ب وغیرہ

فرق چہارم س − ۴د + ۶ج − ۴ب + ا وغیرہ

فرق پنجم ص − ۵س + ۱۰د − ۱۰ج + ۵ب − ا وغیرہ

وغیرہ وغیرہ وغیرہ

یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ امثال یعنے سر مقدارون ا اور ب ج د وغیرہ کے اول جز سلسلہ ن کے کتنے مرتبہ کے ویسی ہی ہین جیسیکہ ہوتے ہین ضابطہ نیوتن صاحب کے مین اور ان مقدارون کے علامتین پی در پے مثبت اور منفی ہوتی ہین پس جسوقت کہ ن ایک عدد جفت ہووی اوسوقت اول جز مذکور یہہ ہوگا

$$ا - ن ب + \frac{ن(ن-۱)}{۲} ج - \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۲\times۳} د + وغیرہ$$

اور جسوقت ن ایک عدد طاق ہوگا اوسوقت جز مذکور اس شکل کا ہوگا

$$-ا + ن ب - \frac{ن(ن-۱)}{۲} ج + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۲\times۳} د - وغیرہ$$

فرض کرو کہ علامتین ف۱ اور ف۲ اور ف۳ وغیرہ کی تعبیر کرتی ہین اول جزون سلسلون اول اور دویم اور سویم وغیرہ فرقون کو پس اب حاصل ہونگی یہہ مساواتین

ف۱ = ب − ا

ف۲ = ج − ۲ب + ا

ف۳ = د − ۳ج + ۳ب − ا

ف۴ = س − ۴د + ۶ج − ۴ب + ا

وغیرہ = وغیرہ وغیرہ

اور اب اگر بدلین ہم علامتین تو پیدا ہونگی یہہ مساواتین

ب = ا + ف۱

ج = ۲ب − ا + ف۲ = ا + ۲ف۱ + ف۲

د = ۳ج − ۳ب + ا + ف۳ = ا + ۳ف۱ + ۳ف۲ + ف۳

$$\text{س} = ۴\,\text{د} - ۶\,\text{ج} + ۴\,\text{ب} - \text{ا} + \text{ف}^{۴}$$

$$= \text{ا} + ۴\,\text{ف} + ۶\,\text{ف}^{۲} + ۴\,\text{ف}^{۳} + \text{ف}^{۴}$$

وغیرہ = وغیرہ

اب اگر نظر کرین ہم ان مساواتون پر تو ہم دریافت کرینگے ایک عام قاعدہ مثل قاعدہ نیوٹن صاحب کے اور اس قاعدہ سی یہہ بات معلوم ہو جاویگی کہ $\overline{\text{ن} + ۱}$ وان جز سلسلہ

ا + ب + ج + د + س + وغیرہ کا یہہ ہوگا

$$\text{ا} + \text{ن}\,\text{ف} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲}\,\text{ف}^{۲} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{۲\times۳}\,\text{ف}^{۳} + \text{وغیرہ}$$

اور یہان سے یہہ بھی معلوم ہوتا ہی کہ $\overline{\text{ن}}$ وان جز سلسلہ مذکور کا یہہ ہوگا

$$\text{ا} + (\text{ن}-۱)\,\text{ف} + \frac{(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{۲}\,\text{ف}^{۲} + \frac{(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)(\text{ن}-۳)}{۲\times۳}\,\text{ف}^{۳} + \text{وغیرہ} \quad (۱)$$

مثال

چاہتے ہین ہم دریافت کرنا $\overline{\text{ن}}$ وان جز اس سلسلہ کا $\overline{۱}$ $\overline{۳}$ $\overline{۵}$ وغیرہ

۱ ۳ ۵ ۷

۲ ۲ ۲

پس اسسے معلوم ہوا کہ ا = ۱ اور ف = ۲ اور $\text{ف}^{۲}$ = ۰ پس $\overline{\text{ن}}$ وان جز مطلوبہ

یہہ ہوگا ۱ + (ن − ۱) ۲ = ۲ ن − ۱

اگر فرق آخر کو مساوی صفر کی ہو جاوین تو $\overline{\text{ن}}$ وین جز کی قیمت حقیقی معلوم ہو سکتی ہی لیکن اگر فرق مذکور صفر کے مساوی نہین ہون تو جیسے فرق مذکور نسبت پہلی فرقون سے کے اور نسبت $\overline{\text{ن}}$ کی کم ہوتی جاوینگے ادنی قیمت جز مذکور کی قریب مساوی ہونی سے کے قیمت حقیقی سے کے آتی جاویگی واضح ہو کہ سلسلہ (۱) ہی قیمت $\overline{\text{ن}}$ وین جز سلسلہ ا + ب + ج + د + وغیرہ کی اور اسیواسطی (ن − ۱) وین جز سلسلہ مذکور کی قیمت یہہ ہوگی

$$\text{ا} + (\text{ن}-۲)\,\text{ف} + \frac{(\text{ن}-۲)(\text{ن}-۳)}{۲}\,\text{ف}^{۲} + \frac{(\text{ن}-۲)(\text{ن}-۳)(\text{ن}-۴)}{۲\times۳}\,\text{ف}^{۳} + \text{وغیرہ}$$

اور اسی قیاس پر اور جزون کی قیمتین دریافت ہو سکتی ہین اب فرض کرو کہ ہی ایک ایسا سلسلہ کہ اوسکی اجزا بتدریج زیادہ ہوتی جاتے ہین مثل اسکے یعنی اجزای مذکور سے ہین ا اور ا + ب اور ا + ب + ج وغیرہ

پس موافق مرقومہ گذشتہ کی یہہ بات ظاہر ہی کہ حاصل تفرق اجزای کی اب سین سے ہونگی

ا اور ب اور ج اور د وغیرہ

فرق اول — ب − ا اور ج − ب اور د − ج وغیرہ

فرق دوم — ج − ٢ب + ا اور د − ٢ج + ب وغیرہ

فرق سوم — د − ٣ج + ٣ب − ا وغیرہ

اور ظاہر ہی کہ اب حاصل ہونگی یہ مساواتیں

ف = ب − ا

ف٢ = ج − ٢ب + ا

ف٣ = د − ٣ج + ٣ب − ا

ف٤ = س − ٤د + ٦ج − ٤ب + ا

وغیرہ = وغیرہ

اور ان مساواتوں سے حاصل ہوتی ہیں یہ مساواتیں

ب = ا + ف

ج = ٢ب − ا + ف٢ = ا + ٢ف + ف٢

د = ا + ٣ف + ٣ف٢ + ف٣

وغیرہ = وغیرہ وغیرہ

اور ان مساواتوں سی حاصل ہوتی ہیں یہ مساواتیں

ا + ب = ٢ا + ف

ا + ب + ج = ٣ا + ٣ف + ف٢

ا + ب + ج + د = ٤ا + ٦ف + ٤ف٢ + ف٣

ا + ب + ج + د + س = ٥ا + ١٠ف + ١٠ف٢ + ٥ف٣ + ف٤

وغیرہ = وغیرہ

پس معلوم ہوا کہ ن دان جز سلسلہ مفروض کا تعبیر ہوتا ہی اس سلسلہ سے

ن ا + ن(ن − ١)/٢ ف + ن(ن − ١)(ن − ٢)/(٢ × ٣) ف٢ + وغیرہ

یہان سیسے یہہ قاعدہ نکلا کہ اگر ہوری کوئی سلسلہ مثل اسکی
ا + ب + ج + د + س + وغیرہ ن جزون تک اور فرق مختلف اس سلسلہ کی تعبیر کی جائین
ف اور ف۲ وغیرہ تو حاصل جمع اس سلسلہ کا یہہ ہوگا

ن ا + ن(ن-۱)/۲ ف + ن(ن-۱)(ن-۲)/۲×۳ ف۲ + وغیرہ

مثال چاہتے ہین ہم دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ کا کہ اوسمین ن کتنے اجزای ہین
۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ + ۱۳ + وغیرہ

۱ ۳ ۵ ۷

۲ ۲ ۲

اس صورت مین ظاہر ہی کہ ا = ۱ اور ف = ۲ اور ف۲ = ۰ پس اسیواسطی حاصل جمع مطلوب یہہ
ہی ن + ن(ن - ۱) = ن۲

۲ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ کا کہ اوسمین ن اجزای ہین
۱۲ + ۲۲ + ۳۲ + ۴۲ + ۵۲ + ۶۲ + ۷۲ + وغیرہ

۱ ۴ ۹ ۱۶

۳ ۵ ۷

۲

۰

پس معلوم ہوا کہ اس صورت مین ا = ۱ اور ف = ۳ اور ف۲ = ۲ اور ف۳ = ۰ پس معلوم ہوا
کہ حاصل جمع مطلوبہ

= ن + ۳ × ن(ن - ۱)/۲ + ۲ × ن(ن - ۱)(ن - ۲)/۲×۳

= ن(۲ن۲ + ۳ن + ۱)/۱×۲×۳ = ن(ن + ۱)(۲ن + ۱)/۱×۲×۳

مثال ۳ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ مکعبونکا کہ اوسمین ن اجزای ہین

$١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + ٤^٣ + ٥^٣ + ٦^٣ +$ وغیرہ

١	٨	٢٧	٦٤	١٢٥
٧	١٩	٣٧	٦١	
١٢	١٨	٢٤		
٦	٦			
٠				

پس اسجای ظاہر ہی کہ ا = ١ اور $ف_١ = ٧$ اور $ف_٢ = ١٢$ اور $ف_٣ = ٦$ اور $ف_٤ = ٠$

پس حاصل جمع مطلوبہ یہہ ہوگا

$$ن + ٧ \times \frac{ن(ن-١)}{٢} + ١٢ \times \frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{٢ \times ٣} +$$

$$٦ \times \frac{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)}{٢ \times ٣ \times ٤} = \frac{ن^٤ + ٢ن^٣ + ن^٢}{٤} = \left(\frac{ن(ن+١)}{٢}\right)^٢$$

بعض اوقات حاصل جمع سلسلونکا بسہولت معلوم ہوسکتا ہی اگر شروع کرین یعنے ابتدا کرین سلسلہ کی ایک یا زیادہ صفر ہی مثلاً واسطی دریافت کرنی حاصل جمع سلسلہ $١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ +$ وغیرہ کے ہم فرض کرتے ہین کہ اس سلسلہ مین $\overline{ن + ١}$ اجزای ہین اور وہ اس شکل کا ہی

$٠ + ١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + ٤^٣ + ٥^٣$ وغیرہ اور اسیواسطی

٠	١	٨	٢٧	٦٤
١	٧	١٩	٣٧	
٦	١٢	١٨		
٦	٦			
٠				

پس اسجا ظاہر ہی کہ ا = ٠ اور $ف_١ = ١$ اور $ف_٢ = ٦$ اور $ف_٣ = ٦$ اور $ف_٤ = ٠$ بس حاصل جمع

$$= \frac{(ن+١)ن}{٢} + ٦ \times \frac{(ن+١)ن(ن-١)}{١ \times ٢ \times ٣} + ٦ \times \frac{(ن+١)ن(ن-١)(ن-٢)}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤}$$

= [(ن+۱) × ۲ن + (ن+۱) ن (ن−۱) × ۴ + (ن+۱) ن (ن−۱) (ن−۲)] / ۴

= [(ن+۱) ن (۲ + ۴ن − ۴ + ن² − ۳ن + ۲)] / ۴

= [(ن+۱) ن (ن² + ن)] / ۴ = (ن (ن+۱) / ۲)²

واضح ہو کہ قاعدہ فرق کا بہت مفید ہی دریافت کرنی مین مسافت سطحون خطوط منحنی کے

فصل نوین قاعدہ زیادتیونکی بیانمین

کسی مقدار غیر مقررہ کو مقدار کلی کہتے ہین اور اوس مقدار کو جسقدر وہ کسی موقع پر زیادہ ہو وسے زیادتی مقدار کلی کی کہتے ہین مثلا مقدار ۱ + ۲ + ۳ .... + م = م (م+۱) / ۲ کو مقدار کلی کہتے ہین اور وہ مقدار جسقدر یہہ مقدار زیادہ ہوتی ہی م + ۱ ہی اور اسیواسطی م + ۱ ہی زیادتی سلسلہ مذکور کی جسوقت مقدار کلی بجائی زیادہ ہونیکی کم ہو وسے تو اوس صورت مین زیادتی منفی ہوتی ہی اگر دو مقدارین زیادہ ہونی شروع ہون اور انکی زیادتین آپسمین ہمیشہ ایکہی نسبت رکہین تو مقدارین کلی بہی یعنے وہی مقدارین جو اسیطرح سے زیادہ ہونی سے پیدا ہونگی آپسمین وہی نسبت رکہین گے فرض کرو کہ زیادتین متواتر آ اور بَ اور جَ وغیرہ اور ا اور ب اور ج وغیرہ ہین اور فرض کرو کہ

آ : ا :: بَ : ب :: جَ : ج وغیرہ :: م : ن اسیواسطی

آ + بَ + جَ + وغیرہ : ا + ب + ج + وغیرہ سی :: م : ن اور یہہ بات ثابت ہی اوس فصل مین جسمین نسبتون مقادیر کا بیان ہی اسی بیان سے یہہ بہی معلوم ہوتا ہی کہ جسوقت م = ن یعنے جسوقت زیادتین مساوی ہون تو اوسوقت مقدارین کلی بہی مساوی ہوتی ہین اگر ایک مقدار کلی تعبیر کیجای حاصل ضرب ایسی مقدارون کے سے کہ وسے اجزای ہون ایک سلسلہ جمع کی یعنے مثل اسکے ہو وسے

م (م + د) (م + ۲د) (م + ۳د) .... م + (ن − ۱) د

اور اس جگہ د کوئی مقدار مقررہ ہی اور م زیادہ ہوتا ہی متواتر بقدر د کی تو ہم دعوی کرتے ہین کہ زیادتی اس مقدار کلی کے یہہ ہوگی

ن ى × (م + ى) (م + ٢ ى) (م + ٣ ى) .... م + (ن − ١) ى

کسو اسکی کی قیمت اصلی مقدار کلی کی یہہ ہی

م (م + ى) (م + ٢ ى) (م + ٣ ى) .... م + (ن − ١) ى

اور یہہ اسکی قیمت اوسی مقدار کلی کی یہہ ہی

(م + ى) (م + ٢ ى) (م + ٣ ى) .... م + ن ى

اور اسیواسطی حاصل تفریق ان دو قیمتوں کا یہہ ہوگا

(م + ى) (م + ٢ ى) (م + ٣ ى) (م + ٤ ى) .... م + ن ى

م (م + ى) (م + ٢ ى) (م + ٣ ى) .... م + (ن − ١) ى

= (م + ن ى − م) {(م + ى) (م + ٢ ى) (م + ٣ ى) .... م + (ن − ١) ى}

= ن ى × (م + ى) (م + ٢ ى) (م + ٣ ى) .... م + (ن − ١) ى

بیان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ چونکہ مقدار مقررہ کوئی زیادتی نہیں حاصل ہوتی ہی تو زیادتی

م (م + ى) (م + ٢ ى) (م + ٣ ى) .... م + (ن − ١) ى ± ق

(اسکی جاے ق ایک مقدار مقررہ ہی) کی یہہ ہوگی

ن ى (م + ى) (م + ٢ ى) .... م + (ن − ١) ى

بیان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اگر زیادتی کسی مقدار کلی کی بتعبیر کیجاے اس صورت سے

ن ى × (م + ى) (م + ٢ ى) (م + ٣ ى) .... م + (ن − ١) ى

تو مقدار کلی اسکی بالضرور یہہ ہوگی

م (م + ى) (م + ٢ ى) (م + ٣ ى) .... م + (ن − ١) ى ± ق

اور اسجاے مقدار مقررہ ق دریافت کیجاتی ہی بوسیلہ شرایط اوس سوال کے جسکو ہم حل کرتے ہوں

بیان سے یہہ بہی معلوم ہوتا ہی کہ اگر زیادتی یہہ ہووے

١ × (م + ى) (م + ٢ ى) (م + ٣ ى) .... م + (ن − ١) ى

اور اسجاے آ ایک مقدار مقررہ ہو تو مقدار کلی اس زیادتی کی یہہ ہوگے

١ / ن ى × (م + ى) (م + ٢ ى) (م + ٣ ى) .... م + (ن − ١) ى

اگر زیادتی ایک مقدار متوونہ مثل آ کی ہو دیسے اور وہ م دفعہ کی جاوے تو مقدار کلی یہہ ہوگی ا ± م ق مرقومہ بالاسی یہہ عام قاعدہ نکلتا ہی اگر دریافت کیا چاہین ہم مقدار کلی کسی زیادتی کو تو لازم ہی کہ زیادتی مذکور کو تحویل کرین طرف ایک ایسی صورت کی کہ وہ مرکب ہو اجزای ضربی سلسلہ جمع کی سیے اور اینین فرق وہ مقدار ہو جسقدر مقدار غیر مقررہ زیادہ ہوتی ہی لیکن مقدار کلی زیادتی کی حاصل ہو جائیگی اگر ضرب کرین ہم تحویل کی ہوئی زیادتی کو اوس جز سی پہلے جو سلسلہ کی ہی اور بعد ازان قسمت کرین اس حاصل ضرب کو دو مقدار ون پر ایک تو تعداد اجزای سلسلہ پر اور دوم فرق عام مذکور پر مقدار مقررہ سلسلون کی معلوم ہوتی ہی بوسیلہ شرائط اوس سوال کی جسکو ہم حل کرتے ہون جسوقت کہ مقدار کلی لا ہو دیسے ط اوسوقت یہہ بات معلوم ہو کہ مقدار کلی کا مل ص ہی تو ظاہر ہی کہ ط + ق = ص اور ∴ ق = ص − ط اور اسیواسطے لا + ق = لا + ص − ط

مثال ۱ چاہتے ہم دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ کا

۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + وغیرہ ن جزون تک چونکہ اس مثال مین ن وان جز سلسلہ کا ن ہی تو معلوم ہوا کہ زیادتی اس جز ن کی یہہ ہوگی ن + ۱ اور اسیواسطے موافق مرقوم الصدر کے حاصل جمع مطلوب یہہ ہوگا $\frac{ن(ن+۱)}{۲}$

مثال ۲ کیا ہی ن وان جز اس سلسلہ اعدادی کا کہ اسمین ن کتنے اجزا ہین

۵ + ۹ + ۱۶ + ۲۶ + ۳۹ + وغیرہ

پس اب اگر لیوین ہم متواتر حاصل تفریق اجزای اس سلسلہ کے تو حاصل ہوگا یہہ

۵ ۹ ۱۶ ۲۶ ۳۹

۴ ۷ ۱۰ ۱۳

۳ ۳ ۳

. . .

.

اور اب یہہ بات ظاہر ہی کہ ن وان جز کسی مرتبہ کی حاصل تفریقون یا فرقون کا مساوی ہوتا ہی زیادتی ن وین جز اوس سے پہلی مرتبہ کی حاصل تفریقون سے پس معلوم ہوا کہ ۳ ہی زیادتی ن وین جز اول مرتبہ کی حاصل تفریقون کے

اور اسیواسطے ۳ن + ق ہی ن وان جز اور جسوقت ن = ۱ اوسوقت

۳ + ق = ۴ اور ∴ ق = ۱ پس معلوم ہوا کہ ۳ن + ۱ ہی ن وان جز اول مرتبہ کی حاصل تفریق کا اور اسیواسطے یہہ ہی زیادتی ن وین جز سلسلہ اصلی مفروض کی اور اسیواسطے موافق قاعدہ گذشتہ کے

یہہ بات ظاہر ہی کہ نؔ وان جزء سلسلہ اصلی کا $\frac{۳(ن-۱)ن}{۲}+ن+ق$ اب فرض کرو
کہ ن = ۱ اور اسیواسطے حاصل ہوگا یہہ ۱ + ق = ۵ اور ∴ ق = ۴ پس معلوم
ہوا کہ نؔ وان جزء سلسلہ اصلی مفروض کا $\frac{۳(ن-۱)ن}{۲}+ن+۴$ ہی

مثال ۳ چاہتے ہین دریافت کرنا حاصل جمع سلسلہ آئندہ کا کہ مرکب ہی مجذوروں اعداد کی سے $۱^۲+۲^۲+۳^۲+۴^۲+۵^۲+۶^۲+۷^۲+۸^۲+۹^۲+$ وغیرہ نؔ جزؤں تک ظاہر ہی کہ زیادتی اس حاصل جمع کی $(ن+۱)^۲$ ہی اور یہہ مساوی ہی
$ن(ن+۱)+ن+۱$ اور اسیواسطے حاصل جمع مطلوبہ یہہ ہی

$$\frac{(ن-۱)ن(ن+۱)}{۳}+\frac{ن(ن+۱)}{۲}=\frac{(۲ن+۱)ن(ن+۱)}{۶}$$

اور ظاہر ہی کہ اسپر کوئی مقدار مقررہ کا زیادہ کرنا ضرور نہین ہی

مثال ۴ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ کا کہ مرکب ہی مجذوروں عددوں ۲ کی فرق سے $۱^۲+۳^۲+۵^۲+۷^۲+۹^۲+۱۱^۲+۱۳^۲+۱۵^۲$ وغیرہ نؔ جزؤں تک
ظاہر ہی کہ زیادتی اس سلسلہ کی حاصل جمع کی یہہ ہی $(۲ن+۱)^۲$ اور یہہ مساوی ہی اسکے
$۴ن^۲+۴ن+۱=۴ن(ن+۱)+۱$ اور اسیواسطے حاصل جمع مطلوبہ یہہ ہی
$\frac{۴(ن-۱)ن(ن+۱)}{۳}+ن$ اور ظاہر ہی کہ اسپر کوئی مقدار مقررہ زیادہ کرنی ضرور نہین ہی

مثال ۵ چاہتے ہین دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ کا کہ مرکب ہی مکعبون اعداد کی سے
$۱^۳+۲^۳+۳^۳+۴^۳+۵^۳+۶^۳+۷^۳+$ وغیرہ نؔ جزؤن تک ظاہر ہی کہ زیادتی
حاصل جمع اس سلسلہ کی $(ن+۱)^۳$ اور یہہ مساوی ہی اسکے
$$ن^۳+۳ن^۲+۳ن+۱=ن(ن+۱)(ن+۲)+ن+۱$$
اور اسیواسطے حاصل جمع اس سلسلہ کا موافق قاعدہ گذشتہ یہہ ہی

$$\frac{(ن-۱)ن(ن+۱)(ن+۲)}{۴}+\frac{ن(ن+۱)}{۲}=\left(\frac{ن(ن+۱)}{۲}\right)^۲$$

اور ظاہر ہی کہ اس حاصل جمع پر کوئی مقدار مقررہ زیادہ کرنا ضرور نہین ہی سلسلے آئندہ اسطرح سے
بنتے ہین نؔ وان جزء کسی کا اون مین سے مساوی ہی حاصل جمع نؔ کتنون جزؤن اوس سلسلہ کی جو واقع

جو واقع ہیں مابین ادسکی واضح ہو کہ ان سلسلون کے اجزای کو اعداد شکلی کہتے ہین اول سلسلہ کی اعداد کو اعداد شکلی اول مرتبہ کی کہتے ہین اور دوم سلسلہ کی اعداد کو دوم مرتبہ کی اعداد شکلی کہتے ہین وعلی ہذا القیاس

اول مرتبہ کی اعداد شکلی		۱	۱	۱	۱	۱	۱	وغیرہ
دوم	ایضاً	۱	۲	۳	۴	۵	۶	وغیرہ
سوم	ایضاً	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱	وغیرہ
چہارم	ایضاً	۱	۴	۱۰	۲۰	۳۵	۵۶	وغیرہ
پنجم	ایضاً	۱	۵	۱۵	۳۵	۷۰	۱۲۶	وغیرہ

مثال ۶ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا حاصل جمع ن جزون م وین مرتبہ کی اعداد شکلی کا

ظاہر ہی کہ اول مرتبہ کی اعداد شکلی کے ن جزون کا حاصل جمع ن ہی اور اسیواسطی زیادتی دوم مرتبہ کی اعداد شکلی کے حاصل جمع کی (ن + ۱) ہی اور اسیواسطی حاصل جمع دوسرے مرتبہ کی اعداد شکلی کے ن جزون کا $\frac{ن(ن+۱)}{۲}$ ہی اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ $\frac{(ن+۱)(ن+۲)}{۲}$ ہی زیادتی سوم مرتبہ کی اعداد شکلی کی حاصل جمع کی اور اسیواسطی $\frac{ن(ن+۱)(ن+۲)}{۳×۲}$ ہی حاصل جمع ن جزون سوم مرتبہ کی اعداد شکلی کا اور ظاہر ہی کہ اسی طرح سے چہارم اور پنجم وغیرہ مرتبہ کی ن جزون اعداد شکلی کا حاصل جمع معلوم ہو سکتا ہی پس ظاہر ہی کہ م وین مرتبہ کی اعداد شکلی کے ن جزون کا حاصل جمع یہہ ہوگا

$$\frac{ن(ن+۱)(ن+۲)\cdots\cdots(ن+م-۲)(ن+م-۱)}{۱×۲×۳×۴\cdots\cdots(م-۱)م}$$

مثال ۷ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا حاصل جمع ن جزون اس سلسلہ کا

$۱×۲ + ۲×۳ + ۳×۴ + ۴×۵ + ۵×۶ +$ وغیرہ ن جزون تک ظاہر ہی کہ (ن+۱) وان جز اس سلسلہ کا یعنے زیادتی حاصل جمع اس سلسلہ کی یہہ ہی (ن + ۱)(ن + ۲) اور اسیواسطی مقدار کلی یعنے حاصل جمع مطلوبہ یہہ ہوگا $\frac{ن(ن+۱)(ن+۲)}{۳}$ اور ظاہر ہی کہ اسپر کوئی مقدار مقررہ زیادہ کرنی ضرور نہین ہی

مثال ۸ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا حاصل جمع ن جزون ایک ایسی سلسلہ کا جسکا ن وان جز یہہ ہی $ط ن^{۳} + ص ن^{۲} + ع ن + ف$ اور اسیجا ط اور ص اور ع اور ف مقدار معروض ہین فرض کرو کہ $ا ن(ن+۱)(ن+۲) + ب ن(ن+۱) + ج ن + س$

$= ط(ن+۱)^{۳} + ص(ن+۱)^{۲} + ع(ن+۱) + ف$ یا

$$\left.\begin{matrix} ط ن^۳ + ۳ ط ن^۲ + ۳ ط ن + ط \\ + ص ن^۲ + ۲ ص ن + ص \\ + ع ن + ع \\ + ف \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} ا ن^۳ + ۳ ا ن^۲ + ۲ ا ن + س \\ + ب ن^۲ + ب ن \\ + ج ن \end{matrix}\right.$$

پس معلوم ہوا کہ ا = ط اور ۳ ا + ب = ۳ ط + ص اور ∴ ب = ص اور
۲ ا + ب + ج = ۳ ط + ۲ ص + ع اور اسیواسطی
۲ ط + ص + ج = ۳ ط + ۲ ص + ع اور یہان سے یہہ معلوم ہوا کہ
ج = ط + ص + ع اور س = ط + ص + ع + ف پس معلوم ہوا کہ
زیادتی حاصل جمع مطلوبہ کی یہہ ہے

ط ن (ن + ۱) (ن + ۲) + ص ن (ن + ۱) + (ط + ص + ع) ن +
ط + ص + ع + ف اور اسیواسطی مقدار کلی یعنے حاصل جمع مطلوبہ یہہ ہے

$$\frac{ط (ن - ۱) ن (ن + ۱) (ن + ۲)}{۴} + \frac{ص (ن - ۱) ن (ن + ۱)}{۳}$$

$$+ \frac{(ط + ص + ع) (ن - ۱) ن}{۲} + (ط + ص + ع + ف) ن$$ اور ظاہر ہی کہ

اسپر کوئی مقدار مقررہ زیادہ کرنی ضرور نہین ہی سوای قواعد مذکورہ بالا کے اور یہی قواعد خاص دربابِ سلسلون کے مہندسون نے نکالی ہین اور اونسے بعضی اوقات بہت سہولت سی عمل ہوتا ہے جیسے کہ مثال آئندہ سے واضح ہوگا

مثال ۹ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا جزون سلسلۂ آئندہ کا حاصل جمع
۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + وغیرہ
فرض کرو کہ حاصل جمع مطلوب مساوی اس سلسلہ کی ہی
ا ن + ب ن^۲ + ج ن^۳ + د ن^۴ + س ن^۵ + وغیرہ
اب ظاہر ہی کہ زیادتی اس سلسلہ کی یہہ ہوگی
ا (ن + ۱) + ب (ن + ۱)^۲ + وغیرہ − ا ن − ب ن^۲ − وغیرہ
یعنے یہہ زیادتی ہوگی ا + ۲ ب ن + ب + ۳ ج ن^۲ + ۳ ج ن + ج + وغیرہ

لیکن زیادتی سلسلہ مفروض کی یہہ ہی $\overline{ن + ۵}$ پس معلوم ہوا کہ

$ا + ۲ ب ن + ب + ۳ ج ن^{۲} +$ وغیرہ $= ن + ۵$ پس معلوم ہوا کہ $۲ ب = ۱$ اور

اسیواسطی $ب = \frac{۱}{۲}$ اور $ج = ۰$ اور $ا + ب = ۵ \therefore ا = ۵ - \frac{۱}{۲} = \frac{۹}{۲}$

اور یہان سیسے معلوم ہوا کہ حاصل جمع مطلوبہ یہہ ہی $\frac{۹ن}{۲} + \frac{ن^{۲}}{۲} = \frac{۹ ن + ن^{۲}}{۲}$

اس مثال سیکے ملاحظہ کرنی سیسے طالب اس فن کو ایک بہت خوب قاعدہ واسطے دریافت کرنی حاصل جمع سلسلون سیکے معلوم ہو جائیگا اور وہ قاعدہ یہہ ہی جسوقت کسی سلسلہ کا حاصل جمع مطلوب ہو اوسوقت سیے حاصل جمع مطلوب کی فرض کرو ایک ایسا سلسلہ کہ اوسمین قوای ن سیکے پای جائین اور امثال ان قوتون سیکے مقدار غیر منقطع مثل $\bar{ا}$ اور $\bar{ب}$ وغیرہ کی ہون بعد ازان اس سلسلہ کی زیادتی کو لکہو مساوی زیادتی اوس سلسلہ کی جسکا حاصل جمع مطلوب ہی اور اس مساوات سی معلوم ہو جائنگی ہمین قیمتین مقدارون غیر منقطع کی اور بعد ازان حاصل جمع مطلوب بہی معلوم ہو جائیگا

مثال ۱۰ فرض کرو کہ ایک ڈہیر گولیون کا اسطرحسے لگا ہوا ہی کہ اوسی ڈہیر کی شکل مخروط مضلع کی ہی اور اسکا قاعدہ ایک مربعہ ہی اور اس مربعہ کی ایک ضلع مین ن گولی ہین بتاو کتنی گولی ہین سارے ڈہیر یعنے مخروط مضلع مذکور مین اب چونکہ موافق فرض سیے ایک ضلع قاعدہ مخروط کی مین ن گولی ہین تو ساری قاعدہ یعنی کل مربعہ مین $ن^{۲}$ گولی ہونگی اب چونکہ اس مربعہ کی جو مربعہ اوپر ہوگا اوسکی ایک ضلع مین $(ن - ۱)$ گولی ہونگی تو ظاہر ہی کہ دوسرے مربع مین $(ن - ۱)^{۲}$ گولی ہونگی اور اسیطرح سی تیسرے مربعہ مین $(ن - ۲)^{۲}$ گولی ہونگی اور علی ہذا القیاس پس معلوم ہوا کہ ساری گولی کل مخروط مین مساوی ہونگے اس سلسلہ مجذورون سیکے $ن^{۲} + (ن - ۱)^{۲} + (ن - ۲)^{۲} + (ن - ۳)^{۲} + (ن - ۴)^{۲} +$ وغیرہ یا اس سلسلہ کی $۱ + ۲^{۲} + ۳^{۲} + ۴^{۲} + \ldots\ldots\ldots + ن^{۲}$

اب ظاہر ہی کہ حاصل جمع اس سلسلہ کا دریافت ہو سکتا ہی بوسیلہ قاعدہ زیادتون سیکے لیکن ہم اسجای اسکا حاصل جمع اوس طریقہ سی دریافت کرینگے جس سیسے دریافت کیا ہی ہمنے حاصل جمع جو مطلوب تہا مثال (۹) مین واسطے اس مطلب کی فرض کرو کہ $ا ن + ب ن^{۲} + ج ن^{۳}$ حاصل جمع مطلوبہ ہی لہذا اسیواسطے زیادتی اس صورت کی یہہ ہوگی

$ا (ن + ۱) + ب (ن + ۱)^{۲} + ج (ن + ۱)^{۳} - ا ن - ب ن^{۲} - ج ن^{۳}$ لیکن زیادتی اوس سلسلہ کی جسکا حاصل جمع مطلوب ہی یہہ ہی

$(ن + ۱)^{۲}$ یا $ن^{۲} + ۲ ن + ۱$ پس اب حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$\left.\begin{array}{l} ۳ ج ن^۲ + ۳ ج ن + ج \\ + ۲ ب ن + ب \\ + ۱ \end{array}\right\} = ن^۲ + ۲ ن + ۱$$

اور اسیواسطی حاصل ہوگئی سے مساواتین ۳ ج = ۱ اور ∴ ج = $\frac{۱}{۳}$ اور
۳ ج + ۲ ب = ۲ یا ۱ + ۲ ب = ۲ ∴ ب = $\frac{۱}{۲}$ لیکن ۱ + ب + ج = ۱
∴ $\frac{۱}{۳}$ + $\frac{۱}{۲}$ + ۱ = ۱ اسس معلوم ہوا کہ ۱ = $\frac{۱}{۶}$ اور بیان سے معلوم ہوا کہ حاصل
جمع مطلوب یہہ ہی $\frac{ن}{۶}$ + $\frac{ن^۲}{۲}$ + $\frac{ن^۳}{۳}$ اور اسپر کوی مقدار مقررہ زیادہ کرنی ضرور نہین
ہی اگر سـ لکھتے ہم واسطی حاصل جمع مطلوب کی یہہ سلسلہ ا ن + ب ن^۲ + ج ن^۳ + د ن^۴ + وغیرہ تو
دریافت ہوتا یہہ کہ د = ۰ اور س = ۰ اور علی ہذالقیاس

اب تک ہمنی بیان کیا ہی وہ قاعدہ زیادتیون کا جسکی وسیلہ سی فقط وہی سلسلے جنکی اجزای اعداد صحیح ہین جمع ہوسکتی ہین اب ہم لکھینگے وہ قاعدہ زیادتیون کا جسکی وسیلہ سی حاصل جمع اون سلسلون کا ہی جنمین اجزای کسری ہون معلوم ہوجاتا ہی قاعدہ مذکور یہہ ہی

اگر سـ $\frac{۱}{م (م + د) (م + ۲ د) \cdots م + (ن - ۱) د}$ ہووی کوئی مقدار کلی اور اسمین

تو ہووی کوئی مقدار مقررہ کہ اسی قدر م متواتر زیادہ ہوتا ہی تو زیادتی اسس مقدار کلی کی یہہ ہوگی

$$\frac{- ن د}{م (م + د) (م + ۲ د) \cdots\cdots\cdots (م + ن د)}.$$

اسیواسطی جسوقت ن ہوجاتا ہی ن + ۱ اوسوقت قیمت مقدار کلی کی یہہ ہوتی ہی

$$\frac{۱}{(م + د) (م + ۲ د) (م + ۳ د) \cdots\cdots\cdots (م + ن د)}$$

اور اگر اسمین سے تفریق کرین ہم قیمت اصلی مقدار کلی تو حاصل تفریق یہہ ہوتا ہی

$$\frac{م - (م + ن د)}{م (م + د) (م + ۲ د) \cdots (م + ن د)} = \frac{- ن د}{م (م + د) (م + ۲ د) \cdots (م + ن د)}$$

اور یہی ہی زیادتی مرقومہ بالا بیان سے یہہ بہی معلوم ہوتا ہی کہ اگر ہووے

$$\frac{}{\text{م (م + د) (م + ۲ د) .... (م + ن د)}} \quad - \text{ن د}$$

کوئی زیادتی تو مقدار کلی اسکی یہہ ہوگی

$$\frac{۱}{\text{م (م + د) (م + ۲ د) (م + ۳ د) .... م + (ن − ۱) د}}$$

اور یہہ بھی معلوم ہوتا ہی کہ اگر ہووے

$$\frac{۱}{\text{م (م + د) (م + ۲ د) .... (م + ن د)}}$$

کوئی زیادتی تو مقدار کلی اوسکی یہہ ہوگی

$$\frac{۱}{\text{م (م + د) (م + ۲ د) .... م + (ن − ۱) د}} \quad \frac{-۱}{\text{ن د}}$$

یعنے یہان سے یہہ قاعدہ نکلتا ہی اگر کوئی زیادتی اس

$$\frac{۱}{\text{م (م + د) (م + ۲ د) .... (م + ن د)}}$$

شکل کی ہو تو اوسکی مقدار کلی دریافت ہوسکتی ہی اگر دور کرین ہم اخیر جز ضربی اوسکی نسب نما کو اور بعد ازان قسمت کرین باقی کو متواترات اون تعداد اجزای پر جو باقی رہی ہین اور فرق عام پر اور جو کچھہ حاصل ہوا اوسے تفریق کرین یہہ قاعدہ خوب واضح ہوجایگا مثالون ائندہ سے

مثال ۱ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا ن جزون اس سلسلہ کا

$$\frac{۱}{\text{۱ × ۲ × ۳}} + \frac{۱}{\text{۲ × ۳ × ۴}} + \frac{۱}{\text{۳ × ۴ × ۵}} + \text{وغیرہ ن جزون تک}$$

اس سے ظاہر ہی کہ ن وان جز اس سلسلہ کا $\frac{۱}{\text{ن (ن + ۱) (ن + ۲)}}$ ہی

پس معلوم ہوا کہ (ن + ۱) وان جز اس سلسلہ کا یعنی زیادتی حاصل جمع اس سلسلہ کی یہہ ہی

$$\frac{۱}{\text{(ن + ۱) (ن + ۲) (ن + ۳)}} \quad \text{اور اس کی مقدار کلی یہہ ہے} \quad \frac{-۱}{\text{۲ (ن + ۱) (ن + ۲)}} + \text{ق}$$

اور جسوقت ن = ۱ اوسوقت ظاہر ہی کہ

$$\frac{-۱}{\text{۲ × ۲ × ۳}} + \text{ق} = \frac{۱}{\text{۱ × ۲ × ۳}} \quad \text{اور} \therefore \text{ق} = \frac{۱}{\text{۱ × ۲ × ۳}} + \frac{۱}{\text{۲ × ۲ × ۳}}$$

$= \frac{۳}{۱۲\times۱} = \frac{۱}{۴}$ اور یہان سی معلوم ہوا کہ حاصل جمع مطلوبہ یہہ ہی

$$\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۲(ن+۱)(ن+۲)}$$

مثال ۲ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ کا

$$\frac{۵}{۱\times۲\times۳\times۴} + \frac{۷}{۲\times۳\times۴\times۵} + \frac{۹}{۳\times۴\times۵\times۶} +$$ وغیرہ ن جزون تک

اسجای ظاہر ہی کہ (ن+۱) وان جز اس سلسلہ کا یعنے زیادتی اسکی یہہ ہی

$$\frac{۲ن+۵}{(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)(ن+۴)} = \frac{۲(ن+۱)+۳}{(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)(ن+۴)}$$

$$= \frac{۲}{(ن+۲)(ن+۳)(ن+۴)} + \frac{۳}{(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)(ن+۴)}$$

اور ظاہر ہی کہ مقدار کلی یعنے حاصل جمع مطلوب

$$= \frac{-۱}{(ن+۲)(ن+۳)} - \frac{۱}{(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)} + ق$$

اور جسوقت ن = ۱ اوسوقت ظاہر ہی کہ حاصل جمع مطلوب

$= \frac{۵}{۱\times۲\times۳\times۴}$ اور: $- \frac{۱}{۳\times۴} - \frac{۱}{۲\times۳\times۴} + ق =$

$\frac{۵}{۱\times۲\times۳\times۴}$ یا ق $= \frac{۵+۲+۱}{۱\times۲\times۳\times۴} = \frac{۱}{۳}$ اور اسیواسطی حاصل

جمع کامل یہہ ہی $\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{(ن+۲)(ن+۳)} - \frac{۱}{(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)}$

$$= \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{(ن+۱)(ن+۳)}$$

مثال ۳ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ کا موافق قاعدہ زیادتیون کے

$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{4\times6}+$ وغیره ن جزون تک ظاهر هی

که زیادتی حاصل جمع اس سلسله کی یهه هی

$$\frac{1}{(\text{ن}+1)(\text{ن}+3)}=\frac{\text{ن}+2}{(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)(\text{ن}+3)}=\frac{\text{ن}+1+1}{(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)(\text{ن}+3)}$$

$=\frac{1}{(\text{ن}+2)(\text{ن}+3)}+\frac{1}{(\text{ن}+1)(\text{ن}+\ )(\text{ن}+3)}$ پس معلوم هوا که مقدار کلی یعنے

حاصل جمع مطلوبه یهه هی $-\frac{1}{\text{ن}+2}-\frac{1}{2(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)}+\text{ت}$ اب فرض کرو

که ن = ۱ تو $-\frac{1}{3}-\frac{1}{2\times2\times3}+\text{ت}=\frac{1}{1\times3}$

اور .˙. $\text{ت}=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ پس معلوم هوا که حاصل جمع مذکور

یهه هی $\frac{3}{4}-\frac{1}{\text{ن}+2}-\frac{1}{2(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)}$

مثال ۴ چاهتے هین هم دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسله کے ن جزون کا

$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\frac{1}{7\times9}+$ وغیره ن جزون تک اسکا جو ظاهر هی

که زیادتی حاصل جمع اس سلسله کی یهه هی $\frac{1}{(2\text{ن}+1)(2\text{ن}+3)}$ فرض کرو که

۲ د = ۲ ن + ۱ اور اسی فرض کے موافق یهه بات ظاهر هی که د زیاده هوگا اوسیقدر

جسقدر ن زیاده هوتا هی یعنے د زیاده هوتا هی متواتر بقدر ا کے اور

.˙. $\frac{1}{(2\text{ن}+1)(2\text{ن}+3)}=\frac{1}{2\text{د}(2\text{د}+2)}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{\text{د}(\text{د}+1)}$

اور اسکے مقدار کلی یهه هی $-\frac{1}{4\text{د}}+\text{ت}=-\frac{1}{4\text{ن}+2}+\text{ت}$

اور جسوقت ن = ∞ اوسوقت ∴ $\frac{۱}{۴}$ + ق = $\frac{۱}{۳}$ اور ∴ ق = $\frac{۱}{۲}$

پس معلوم ہوا کہ حاصل جمع مطلوبہ یہہ ہی $\frac{۱}{۲}$ − $\frac{۱}{۴ن + ۲}$

بہت مثالین اور قواعد واسطی دریافت کرنیکی حاصل جمع سلسلون متناہی اور غیر متناہی کے اوپر بیان کیگئی ہین وہی کافی ہونگی اور امید ہی کہ طالب علم اونکی پڑہنے سی ایسی استعداد حاصل کریگا کہ اگر کوئی اور قسم کا بہی سلسلہ اوسکی آگے آویگا اوسکو بہی وہ جمع کرسکیگا بسبب سکی کہ بہت سی اور دلچسپ اور مفید مطالب جبر و مقابلہ مین باقی ہین تو مین کچہہ اور زیادہ درباب سلسلون کے اسجاے نہین لکہہ سکتا ہون چونکہ یہہ بات سلسلون کے بیان ہی تو مین اسمین مندرج کرتا ہون ایک دوسری فصل کو جسمین بیان ہوگا معکوس کرنی سلسلونکا اور سلسلہ متواتر کا

فصل دسوین بیچ بیان معکوس کرنی سلسلونکے

اگر ہووی ایک مساوات اس شکل کے

د = ط لا + ص لا^{۲} + ع لا^{۳} + ف لا^{۴} + وغیرہ .... (۱)

اور چاہتے ہون ہم دریافت کرنا ایک ایسا سلسلہ

لا = ا د + ب د^{۲} + س د^{۳} + د د^{۴} + وغیرہ .... (۲)

تو اس عمل کو معکوس کرنا سلسلہ کا کہتے ہین کسواسطی کہ اول مساوات مین د مساوی ہی ایک سلسلہ کے جسمین لا کی قوای بتدریج زیادہ ہوتی جاتی ہین اور اون قوای کے سر خاص مقدارین مثل ط اور ص وغیرہ کی ہین برخلاف اسکے سلسلی دوسری مین لا ہی مساوی ایک سلسلہ کی جسمین د کی قوای بتدریج زیادہ ہوتی جاتی ہین اور اونکی امثال خاص مقدارین مثل ا اور ب وغیرہ کی ہین پس لازم ہی ہمین دریافت کرنی قیمتین ا اور ب وغیرہ کی نسبت ط اور ص وغیرہ کے اور واسطے اس مطلب کے دریافت کرو قیمتون مختلف قوای د کو بوسیلہ سلسلہ اول کے

∴ د^{۲} = ط^{۲} لا^{۲} + ۲ ط ص لا^{۳} + { ص^{۲} + ۲ ط ع } لا^{۴} + { ۲ ص ع + ۲ ط ف } لا^{۵} + وغیرہ

د^{۳} = ط^{۳} لا^{۳} + ۳ ط^{۲} ص لا^{۴} + ۳ ط ص^{۲} لا^{۵} + وغیرہ

د^{۴} = ط^{۴} لا^{۴} + ۴ ط^{۳} ص لا^{۵} + وغیرہ

د^{۵} = ط^{۵} لا^{۵} وغیرہ

پس جسوقت لکھین ہم ان قیمتون کو سلسلہ (۲) مین اور ثبت کرین قوای لا کو علی الترتیب تو

	لا	لا^{2}	لا^{3}	لا^{4}
۰ = ا ط	+ ا ص	+ ا ع	+ ا ف	+ وغیرہ
− ۱	$+ \text{ب ط}^{2}$	+ ۲ ب ط ص	$+ \text{ب ص}^{2}$	
		$+ \text{س ط}^{3}$	+ ۲ ب ط ع	
			$+ ۳ \text{س ط}^{2} \text{ص}$	
			$+ \text{د ط}^{4}$	

اب جسوقت لکھین ہم ہر واحد سر قوای لا کو مساوی صفر کی تو حاصل ہونگی یے مساواتین

$\text{ا ط} - ۱ = ۰$ اور $\text{ا ص} + \text{ب ط}^{2} = ۰$ اور $\text{ا ع} + ۲\,\text{ب ط ص} + \text{س ط}^{3} = ۰$

اور $\text{ا ف} + \text{ب ص}^{2} + ۲\,\text{ب ط ع} + ۳\,\text{س ط}^{2}\text{ص} + \text{د ط}^{4} = ۰$ وغیرہ

اور ان مساواتون سے حاصل ہوتی ہین یے قیمتین آ اور بَ وغیرہ کی

$\text{ا} = \frac{۱}{\text{ط}}$ اور $\text{ب} = -\frac{\text{ا ص}}{\text{ط}^{2}} = -\frac{\text{ص}}{\text{ط}^{3}}$ اور اسیطرح سی دریافت ہوسکتا ہی کہ

$$\text{س} = \frac{\text{ط ع} - ۲\,\text{ص}^{2}}{\text{ط}^{5}} \quad \text{اور} \quad \text{د} = -\frac{\text{ط}^{2}\text{ف} - ۵\,\text{ط ص ع} + ۵\,\text{ص}^{3}}{\text{ط}^{7}}$$

پس جسوقت لکھین ہم یے قیمتین آ اور بَ وغیرہ کی سلسلہ (۲) مین تو حاصل ہوگا سلسلہ مطلوبہ یہہ

$$\text{لا} = \frac{۱}{\text{ط}}\text{ی} - \frac{\text{ص}}{\text{ط}^{3}}\text{ی}^{2} - \frac{\text{ط ع} - ۲\,\text{ص}^{2}}{\text{ط}^{5}}\text{ی}^{3} - \frac{\text{ط}^{2}\text{ف} - ۵\,\text{ط ص ع} + ۵\,\text{ص}^{3}}{\text{ط}^{7}}\text{ی}^{4} - \text{وغیرہ}$$

اگر سلسلہ مفروض مین کوئی مقدار منقطع بھی ہوتی تو وہ سلسلہ اس شکل کا ہوتا

$\text{ی} = \text{طَ} + \text{ط لا} + \text{ص لا}^{2} + \text{ع لا}^{3} + \text{ف لا}^{4} +$ وغیرہ اب فرض کرو کہ $\text{ی} - \text{طَ} = \text{یَ}$

اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات $\text{یَ} = \text{ط لا} + \text{ص لا}^{2} + \text{ع لا}^{3} + \text{ف لا}^{4} +$ وغیرہ

اب موافق گذشتہ کی فرض کرو کہ ہی یہہ سلسلہ واسطی قیمت لا کے نسبت یَ کے

$\text{لا} = \text{ا یَ} + \text{ب یَ}^{2} + \text{س یَ}^{3} + \text{د یَ}^{4} +$ وغیرہ پس موافق گذشتہ کی حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$\text{لا} = \frac{۱}{\text{ط}}\text{یَ} - \frac{\text{ص}}{\text{ط}^{3}}\text{یَ}^{2} - \frac{\text{ط ع} - ۲\,\text{ص}^{2}}{\text{ط}^{5}}\text{یَ}^{3} - \frac{\text{ط}^{2}\text{ف} - ۵\,\text{ط ص ع} + ۵\,\text{ص}^{3}}{\text{ط}^{7}}\text{یَ}^{4}\ \text{وغیرہ}$$

اور جسوقت لکھین گے ہم بجای ی کی اوسکی قیمت ی − ط' تو اوسوقت حاصل ہوگی یہہ مساوات یا سلسلہ

$$لا = \frac{۱}{ط}(ی - ط') - \frac{ص}{ط^{۳}}(ی - ط')^{۲} - \frac{طع - ۲ص^{۲}}{ط^{۵}}(ی - ط')^{۳}$$

$$- \frac{ط^{۲}ف - ۵طصع + ۵ص^{۳}}{ط^{۷}}(ی - ط')^{۴}$$ — وغیرہ جسوقت سلسلہ مفروض بین

قوای طاق ہی لا کی ہون اوسوقت فرض کرو واسطی لا کے ایک ایسا سلسلہ کہ اوسین بہی قوای ی کے فقط طاق ہی ہون مثلاً فرض کرو کہ ہی یہہ مساوات

$$ی = طلا + ص لا^{۳} + ع لا^{۵} + ف لا^{۷} +$$ وغیرہ پس اب فرض کرو کہ

$$لا = ا ی + ب ی^{۳} + س ی^{۵} + د ی^{۷} +$$ وغیرہ اب اگر عمل کرین ہم بطور سابق کے کہ اوسوقت سلسلہ مفروض مین قوای لا کی طاق اور جفت دونو طرح کی ہین تو حاصل ہونگی یے مساواتین

$$ا = \frac{۱}{ط}$$ اور $$ب = -\frac{ص}{ط^{۴}}$$ اور $$س = -\frac{طع - ۳ص^{۲}}{ط^{۷}}$$

اور $$د = -\frac{ط^{۲}ف - ۸طصع + ۱۲ص^{۳}}{ط^{۱۰}}$$ اور علی ہذا القیاس

پس اگر لکھین ہم ان قیمتون کو قیمت لا کی مین کہ ایک سلسلہ ہی تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$لا = \frac{۱}{ط}ی - \frac{ص}{ط^{۴}}ی^{۳} - \frac{طع - ۳ص^{۲}}{ط^{۷}}ی^{۵} -$$

$$\frac{ط^{۲}ف - ۸طصع + ۱۲ص^{۳}}{ط^{۱۰}}ی^{۷} -$$ وغیرہ اب ہم لکھتی ہین چند مثالین معکوس کرنے سلسلون کی تا کہ طالب علم کو مشق ہو جاوے

مثال ۱ فرض کرو کہ ہی یہہ سلسلہ $ی = ۱ + لا + \frac{۱}{۲}لا^{۲} + \frac{۱}{۳ \times ۲}لا^{۳} +$ وغیرہ اور چاہتے ہین ہم دریافت کرنی قیمت لا کی بوسیلہ ایک سلسلہ کی کہ اوسمین قوای ی کی علی الترتیب لکہی ہوئی ہون اسے صاف ظاہر ہی کہ ط' = ۱ اور ط = ۱ اور ص = $\frac{۱}{۲}$

اور ع = $\frac{۱}{۳ \times ۲}$ اور ف = $\frac{۱}{۴ \times ۳ \times ۲}$ وغیرہ اور اسیواسطی قیمتین ا اور ب اور س وغیرہ کی یے ہین

$$ا = \frac{1}{ط} = \frac{1}{1} = ا \text{ اور } ب = \frac{ص}{۲ط} = \frac{1}{۲}$$

$$\text{اور } س = \frac{طع - ۲ ص^2}{ط^5} = \frac{1}{۳ \times ۲} + \frac{1}{۲} = \frac{1}{۳}$$

اور اسیطرح سے معلوم ہوسکتا ہی کہ ف = $-\frac{1}{۴}$ اور سیطرح علے ہذا القیاس پس حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$لا = \frac{ی - 1}{1} - \frac{(ی-1)^2}{۲} + \frac{(ی-1)^3}{۳} - \frac{(ی-1)^4}{۴} + \text{ وغیرہ}$$

مثال ۲ فرض کرو کہ ہی یہہ سلسلہ ی = لا − $لا^2$ + $لا^3$ − وغیرہ اور چاہتے ہیں ہم دریافت کرینے قیمت لا کی نسبت ی کے بوسیلہ ایک سلسلہ کے

جواب $لا = ی + ی^2 + ی^3 + ی^4 + ی^5 + \text{ وغیرہ}$

مثال ۳ فرض کرو کہ ہی یہہ سلسلہ ی = لا − $\frac{1}{۲}$ $لا^2$ + $\frac{1}{۳}$ $لا^3$ − $\frac{1}{۴}$ $لا^4$ + وغیرہ چاہتے ہیں دریافت کرنی قیمت لا کی نسبت ی کے بوسیلہ ایک سلسلہ کی

جواب $لا = ی + \frac{1}{۲} ی^2 + \frac{1}{۳ \times ۲} ی^3 + \frac{1}{۴ \times ۳ \times ۲} ی^4 + \text{ وغیرہ}$

مثال ۴ فرض کرو کہ ہی یہہ سلسلہ ی = لا − $\frac{1}{۳ \times ۲} لا^3 + \frac{1}{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲} لا^5$

$$- \frac{1}{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲} لا^7 - \text{ وغیرہ}$$

اور چاہتے ہیں ہم دریافت کرنی قیمت لا کی نسبت ی کے بوسیلہ ایک سلسلہ کے

$$\text{جواب } لا = ی + \frac{1}{۳ \times ۲} ی^3 + \frac{۳}{۵ \times ۴ \times ۲} ی^5 + \frac{۵ \times ۳}{۷ \times ۶ \times ۴ \times ۲} ی^7$$

$$+ \frac{۷ \times ۵ \times ۳}{۹ \times ۸ \times ۶ \times ۴ \times ۲} ی^9 + \text{ وغیرہ}$$

مثال ۵ فرض کرو کہ ہی یہہ سلسلہ یا مساوات متسلسل

$$لا + ط لا^2 + ص لا^3 + ع لا^4 + \text{ وغیرہ} = کہ ی + طَ ی^2 + صَ ی^3 + عَ ی^4 + \text{ وغیرہ}$$

اور چاہتے ہیں ہم دریافت کرنی قیمت ی کی نسبت لا کے

جواب ی = ــ لا/ک + (ط ک۲ - ط) لا۲/ک۳ + (ص ک۲ - ص ک - ۲ ط) (ط ک۲ - ط) لا۳/ک۵ + وغیرہ

واضح ہو کہ سلسلہ کا معکوس کرنا بہت مفید ہی مثلاً اگر معلوم کرلین ہم بوسیلہ ایک سلسلہ کی قیمت جس لا یا جم لا وغیرہ کی اور اس سلسلہ مین قوای لا کی پای جاتی ہون تو معلوم ہوسکتا ہی ہمین ایک ایسا سلسلہ جو مساوی ہو لا کے اور اوسمین پائی جائین قوای جس لا یا جم لا وغیرہ کی اور ظاہر ہی کہ اس سے معلوم ہوسکتا ہی ہمین محیط ایک دایرہ کا

فصل یازدہم بیچ بیان قاعدہ کے سلسلون متواتر

اگر ایک سلسلہ مین اجزای بیدر پی گھٹتے جاتے ہون اور ہر واحد ان اجزای مین کا اپنی ما قبل کے کئی جزو نکے حاصل جمع سے کوئی خاص نسبت رکھتا ہو تو ایسی سلسلہ کو سلسلہ متواتر کہتے ہین ایسی سلسلو نکا حاصل جمع ہمیشہ معلوم ہوسکتا ہی اور طریقہ دریافت کرنی حاصل جمع مذکور کا یہہ ہی فرض کرو کہ

ط + ص لا + ع لا۲ + وغیرہ سلسلہ مفروضہ ہی اور تعبیر کرو جزون اسکی کو حروف ا اور ب اور س اور د اور ی وغیرہ سے اور یہہ بھی فرض کرو کہ س = ف لا ب + ک لا۲ ا اور د = ف لا س + ک لا۲ ب وغیرہ اور اسیطرح مقدار ف + ک کو میزان نسبت کی کہتے ہین کیونکہ اجزای متواتر کی ایک نسبت اس مقدار پر موقوف ہی پس اب حاصل ہونگی یہ مساواتین

ا = ا

ب = ب

س = ف لا ب + ک لا۲ ا

د = ف لا س + ک لا۲ ب

ی = ف لا د + ک لا۲ س

وغیرہ = وغیرہ

اور اگر ا + ب + س + د + ی + وغیرہ لا نہایت = ج

تو حاصل ہوگی ہمین یہہ مساوات ج = ا + ب + ف لا (ج - ا) + ک لا۲ × ج

یا ج - ف لا ج - ک لا۲ ج = ا + ب - ف لا ا اور اسیوا سطے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

ج = (ا + ب - ف لا ا)/(ا - ف لا - ک لا۲)

اور اگر ہووی میزان نسبت کی مرکب دو سی زیادہ جزون سیے یعنی ہو ویسے وہ یہہ ف + کہ + ھہ + وغیرہ ن جزون تک تو بطور گذشتہ کی یہہ ثابت ہو سکتا ہی کہ حاصل جمع سلسلہ مفروض کا یہہ ہوگا

۱ + ب + س ..... ن جزون تک – ف لا (۱ + ب ..... ن – ۱ تک) – کہ لا۲ (۱ + ... ن – ۲ تک) وغیرہ

۱ – ف لا – کہ لا۲ – ھہ لا۳ .... ن + ۱ جزون تک

مثال ۱ چاہتیے ہین ہم دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ لانہایت کا

۱ + ۳ لا + ۹ لا۲ + ۲۷ لا۳ + وغیرہ لانہایت کہ اسمین لا کم ہی بہ نسبت ⅓ سیے اس صورت مین

ظاہر ہی کہ ف = ۳ پس حاصل جمع مطلوبہ = ۱ ÷ (۱ – ۳ لا)

مثال ۲ چاہتے ہین دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ لانہایت کا

۱ + ۲ لا + ۳ لا۲ + ۴ لا۳ + وغیرہ اور اسمین لا کم ہی بہ نسبت عدد ایک کے اسجای ظاہر ہی کہ ف = ۲

اور کہ = –۱ اور حاصل جمع مطلوبہ

= (۱ + ۲ لا – ۲ لا) ÷ (۱ – ۲ لا + لا۲) = ۱ ÷ (۱ – لا)۲ اگر لا ہو ویسے مساوی ۱ سیکے تو ظاہر ہی کہ سلسلہ

لانہایت ہو جاویگا حاصل جمع ن کتے جزون سلسلہ گذشتہ کا اسطرح سیے معلوم ہوتا ہی ظاہر ہی

کہ بعد ن کتنے جزون کے یہہ سلسلہ ہوگا (ن + ۱) لان + (ن + ۲) لان+۱ + (ن + ۳) لان+۲ + وغیرہ

اور چونکہ اس سلسلہ مین بیچ میزان نسبت کی ۲ – ۱ ہی تو موافق گذشتہ کی حاصل جمع اس سلسلہ کا یہہ ہوگا

= ((ن + ۱) لان + (ن + ۲) لان+۱ – ۲ (ن + ۱) لان+۱) ÷ (۱ – ۲ لا + لا۲)

((ن + ۱) لان – ن لان+۱) ÷ (۱ – لا)۲ پس معلوم ہوا کہ حاصل جمع اس سلسلہ کا

۱ + ۲ لا + ۳ لا۲ + ۴ لا۳ + وغیرہ کا =

۱ ÷ (۱ – لا)۲ – ((ن + ۱) لان – ن لان+۱) ÷ (۱ – لا)۲ = (۱ – (ن + ۱) لان + ن لان+۱) ÷ (۱ – لا)۲

اگر علامت لا کی بتدیل ہو جاوے تو ظاہر ہی کہ حاصل ہوگا یہہ سلسلہ

۱ – ۲ لا + ۳ لا۲ – ۴ لا۳ + ۵ لا۴ – وغیرہ اور حاصل جمع ن کتنے جزون اس سلسلہ کا بطور

گذشتہ کے یہہ حاصل ہوگا

± 1 $\frac{(ن+1) لا^{ن} \mp ن لا^{ن+1}}{(1+لا)^{2}}$ اور اس صورت مین علامت فوقانی کا استعمال کرنا چاہیئے

جسوقت ن ایک عدد جفت ہو اور علامت تحتانی کا جسوقت ایک عدد طاق ہو

مثال ۳ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ کا

۱ + ۳ لا + ۵ لا^۲ + ۷ لا^۳ + ۹ لا^۴ + وغیرہ فرض کرو کہ ف + ک ہی میزان نسبت سے کے پس اب حاصل ہو نگی سے دو مساواتین ۳ ف + ک = ۵ اور ۵ ف + ۳ ک = ۷ اور انسے حاصل ہوتی ہین سے قیمتین ف = ۲ اور ک = -۱ اور یہان سے معلوم ہوا کہ

$ح = \frac{1 + 3لا - 2لا}{1 - 2لا + لا^{2}} = \frac{1 + لا}{(1-لا)^{2}}$ ظاہر ہی کہ بعد ن جزون سے یہہ سلسلہ اس شکل کا ہو جائیگا

$(2ن+1) لا^{ن} + (2ن+3) لا^{ن+1} + (2ن+5) لا^{ن+2} +$ وغیرہ اور حاصل جمع اس کا یہہ ہوگا

$$\frac{(2ن+1) لا^{ن} + (2ن+3) لا^{ن+1} - 2(2ن+1) لا^{ن+1}}{1 - 2لا + لا^{2}} = \frac{(2ن+1) لا^{ن} - (2ن-1) لا^{ن+1}}{(1-لا)^{2}}$$

پس معلوم ہوا کہ حاصل جمع ن سے کتنے جزون اس سلسلہ کا ۱ + ۳ لا + ۵ لا^۲ + ۷ لا^۳ + وغیرہ

یہہ ہی $\frac{1 + لا - (2ن+1) لا^{ن} + (2ن-1) لا^{ن+1}}{(1-لا)^{2}}$

مثال ۴ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ کا جسوقت کہ یہہ مایل ہو اختتام کیطرف

۱ + ۲ لا + ۳ لا^۲ + ۵ لا^۳ + ۸ لا^۴ + وغیرہ لانہایت ان صورت مین میزان اس نسبت کی یہہ ہی ۱ + ۱

اور اسیواسطے حاصل جمع سلسلہ مفروض کا یہہ ہی

$\frac{1 + 2لا - لا}{1 - لا - لا^{2}} = \frac{1 + لا}{1 - لا - لا^{2}}$ اور اگر لا ہووے منفی تو

تو $1 - 2لا + 3لا^{2} - 5لا^{3} +$ وغیرہ $= \frac{1 - لا}{1 + لا - لا^{2}}$

مثال ۵ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ لانہایت کا

$(ن-1) لا + (ن-2) لا^{2} + (ن-3) لا^{3} +$ وغیرہ

اس صورت مین ظاہر ہی کہ میزان نسبت کی ۲ - ۱ ہی تو حاصل جمع سلسلہ لانہایت مفروض کا یہہ ہوگا

(ن - ۱) لا + (ن - ۲) لا^۲ - ۲ (ن - ۱) لا^۲ ÷ (۱ - لا)^۲ = (ن - ۱) لا - ن لا^۲ ÷ (۱ - لا)^۲

ظاہر ہی کہ بعد ن جزون کے سلسلہ مفروض اس شکل کا ہوجاتا ہی

- لا^(ن + ۱) - ۲ لا^(ن + ۲) - وغیرہ اور اسکا حاصل جمع اسطرح سے دریافت ہوتا ہی یہہ ہی

- لا^(ن + ۱) ÷ (۱ - لا)^۲ پس معلوم ہوا کہ ن کے کتنے جزون سلسلہ

(ن - ۱) لا + (ن - ۲) لا^۲ + (ن - ۳) لا^۳ + وغیرہ کا حاصل جمع یہہ ہی

(ن - ۱) لا - ن لا^۲ + لا^(ن + ۱) ÷ (۱ - لا)^۲

یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ حاصل جمع ن جزون اس سلسلہ کا

(ن - ۱) لا ÷ ن + (ن - ۲) لا^۲ ÷ ن + وغیرہ = (ن - ۱) لا - ن لا^۲ + لا^(ن + ۱) ÷ ن (۱ - لا)^۲

مثال ۶ ۱^۲ + ۲^۲ لا + ۳^۲ لا^۲ + ۴^۲ لا^۳ + ۵^۲ لا^۴ + وغیرہ ن جزون تک کیا ہی

فرض کرو کہ میزان نسبت کی یہہ ہی ف + ک + ھ پس اب حاصل ہونگی یہ مساواتین

۹ ف + ۴ ک + ھ = ۱۶

۱۶ ف + ۹ ک + ۴ ھ = ۲۵

۲۵ ف + ۱۶ ک + ۹ ھ = ۳۶

اور ان مساواتون سے حاصل ہوتی ہین یہ قیمتین ف = ۳ اور ک = - ۳ اور ھ = ۱

پس جسوقت لکہین ہم ان قیمتون کو متواتر سلسلہ مفروض مین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

۱ + ۴ لا + ۹ لا^۲ - ۳ لا - ۱۲ لا^۲ + ۳ لا^۲ ÷ ۱ - ۳ لا + ۳ لا^۲ - لا^۳ = ۱ + لا ÷ (۱ - لا)^۳

اور یہی حاصل جمع سلسلہ غیر نہایت مفروض کا جسوقت لا ہی کم ۱ سے بعد ن جزون کے سلسلہ مفروض اس شکل کا ہوجائیگا

$(\text{ن}+۱)^{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}} + (\text{ن}+۲)^{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}+۱} + (\text{ن}+۳)^{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}+۲} +$ وغیرہ اور حاصل جمع اس سلسلہ کا یہہ ہوگا

$$\frac{(\text{ن}+۱)^{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}} + (\text{ن}+۲)^{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}+۱} + (\text{ن}+۳)^{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}+۲} - ۳\,(\text{ن}+۱)^{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}+۱}}{۱ - ۳\,\text{لا} + ۳\,\text{لا}^{۲} - \text{لا}^{۳}}$$

$$\frac{-۳(\text{ن}+۲)^{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}+۲} + ۳(\text{ن}+۱)^{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}+۲}}{۱ - ۳\,\text{لا} + ۳\,\text{لا}^{۲} - \text{لا}^{۳}}$$

$$= \frac{(\text{ن}+۱)^{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}} - (۲\text{ن}^{۲} + ۲\text{ن} - ۱)\,\text{لا}^{\text{ن}+۱} + \text{ن}^{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}+۲}}{(۱-\text{لا})^{۳}}$$

اور یہان سے معلوم ہوا کہ مجموع ن جزون تک

$$\frac{۱ + \text{لا} - (\text{ن}+۱)^{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}} + (۲\text{ن}^{۲} + ۲\text{ن} - ۱)\,\text{لا}^{\text{ن}+۱} - \text{ن}^{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}+۲}}{(۱-\text{لا})^{۳}}$$

ضابطہ کثیر الاجزا کا

یہہ ضابطہ واسطے دریافت کرنی صورت مفصلہ مجموعہ دو سے زیادہ اجزاؤ کی کسی قوت کے کام مین اتا ہی ظاہر ہی کہ بذریعہ ضابطہ نیوٹن کے صورت مفصلہ کثیر الاجزاؤ کی مجموعہ کی کسی قوت کی دریافت ہو سکتی ہی جسطور سے کہ صورت تین جزون کی مین سے پہلے مقامون بیان کیا ہی اسواسطے کہ صورت مفصلہ $(۱ + \text{ب} + \text{ج} + \text{س} +$ وغیرہ$)^{\text{م}}$ کی بطور صورت مفصلہ ضابطہ نیوٹن سے کے دریافت ہو سکتی ہے اگر ہمیں اجزاء اسکو ایک جز فرض کرین اور باقی اجزاء سے کے مجموعہ کو دوسرا جز لیکن ایک عام قاعدہ وہ ہی جسمین کہ جز عام صورت مفصلہ کا دریافت کر سکتے ہین اور اس جز عام سے ساری صورت مفصلہ نکل سکتی ہی اور اسکی ترکیب آگی لکھی جاتی ہی

دریافت کیا چاہیے ہم جز عام صورت مفصلہ $(۱ + \text{ب} + \text{ج} +$ وغیرہ$)^{\text{م}}$ کا

فرض کرو کہ $\text{ب} + \text{ج} +$ وغیرہ $= \text{د}$ $\therefore (۱ + \text{ب} + \text{ج} +$ وغیرہ$)^{\text{م}} = (۱ + \text{د})^{\text{م}}$

اور اسکا جز عام کہ تعبیر کیا جاوے $\overline{\text{ط}+۱}$ وین جز سے یہہ ہوگا

$$\frac{\text{م}\,(\text{م}-۱)\,\cdots\cdots\,(\text{م}-\text{ط}+۱)}{۱\times۲\times۳\times\cdots\cdots\,\text{ط}}\;۱^{\text{ف}}\,\text{د}^{\text{ط}}$$ اور اسجا ف + ط = م

یا یہہ ہوگا $\dfrac{\text{م}\,(\text{م}-۱)\cdots\cdots(\text{ت}+۱)}{}\;۱^{\text{ف}}\;\dfrac{\text{د}^{\text{ط}}}{\lfloor\text{ط}}$ اور اس جا ط ایک عدد صحیح اور مثبت ہی

اب فرض کرو کہ ج + س + وغیرہ = ر ∴ ڈ = (ا + ب)^ط اور اسکا جزعام کہ بتغیر کیا جاوے

ق + ا وین جز سے یہہ ہوگا $\frac{ط(ط-1)\cdots(ط-ق+1)}{1 \times 2 \times 3 \cdots ق}$ ب^ق ر^ص اور اس جاسے

ق + ص = ط یعنے ف + ق + ص = م یا یہہ ہے

$$\frac{ط(ط-1)\cdots(ص+1)ص(ص-1)\cdots 1\times2\times3\cdots}{1\times2\times3\cdots ق\times1\times2\times3\cdots ص}$$ ب^ق ر^ص (کیونکہ ص ایک عدد

صحیح اور مثبت ہے) یا $|ط \cdot \frac{ب^ق}{|ق} \cdot \frac{ر^ص}{|ص}$ پس اس صورت مین جزعام صورت کثیر الاجزا کا اس

صورت کا ہوجاویگا م (م-1)....(ف+1) · اَ^ف · $\frac{ب^ق}{|ق} \cdot \frac{ر^ص}{|ص}$ اب فرض کرو کہ

س + وغیرہ = لا ∴ ر^ص = (لا + ح)^ص اور جزعام کہ بتغیر کیا جاوے ک + ا سے یہہ ہوگا

$$\frac{ص(ص-1)\cdots(ص-ک+1)}{1\times2\times3\times\cdots ک}$$ س^ک لا^ع (اور اس جا ک + ع = ص)

یا ف + ق + ک + ع = م) یا یہہ ہوگا

$$\frac{ص(ص-1)\cdots(ع+1)ع(ع-1)\cdots 1\times2\times3}{1\times2\times3\cdots ک\times1\times2\times3\cdots ع}$$ س^ک لا^ع (اس جا ع

ایک عدد صحیح اور مثبت ہی) یا یہہ ہی |ص · $\frac{ح^ک}{|ک} \cdot \frac{لا^ع}{|ع}$ پس اس صورت مین صورت

مقصد جزعام صورت مقصد کثیر الاجزا کا یہہ ہوگا

م (م-1)....(ف+1) اَ^ف · $\frac{ب^ق}{|ق} \cdot \frac{ح^ک}{|ک} \cdot \frac{لا^ع}{|ع}$ اور اگر اسیطرح سے

عمل کرین جائین جب تک تمام اجزا تمام ہوجائین تو جزعام مسطور یہہ ہوگا

م (م-1)....(ف+1) · اَ^ف · $\frac{ب^ق}{|ق} \cdot \frac{ح^ک}{|ک} \cdot \frac{س^ل}{|ل}$ وغیرہ اور اس جاسے

ف + ق + ک + ل + وغیرہ = م اور واضح ہو کہ ف کسر یا منفی ہوتا ہی جبکہ م ایک کسر یا منفی

ہوتا ہی لیکن ق اور ک اور ل وغیرہ ہمیشہ مثبت اور صحیح اعداد ہوتے ہین

حکم اگر م ہووے ایک عدد صحیح اور مثبت صورت جزعام کی اسطور پر لکھی جاسکتی ہین

م (م-1)....(ف+1) ف (ف-1)........ 3 × 2 × 1 × $\frac{اَ^ف}{|ف} \cdot \frac{ب^ق}{|ق}$ وغیرہ

یا لا ا۔ $\frac{\text{ا}^{\text{ف}}}{\text{ا ف}}$ ۔ $\frac{\text{ب}^{\text{ق}}}{\text{ا ق}}$ ۔ $\frac{\text{ح}^{\text{ک}}}{\text{ا ک}}$ وغیرہ یہہ صورت ثابت ہوسکتی ہی

ایک اور طریق سے جسوقت کہ فرض کرین نشان قوت کو ایک عدد صحیح اور مثبت دریافت کیا جاسکتے ہین ہم صورت مفصلہ (ا + ب + ح + س + وغیرہ)$^{\text{م}}$ سے جسوقت کہ م ہو وے ایک عدد صحیح اور مثبت

ظاہر ہی کہ ی$^{(\text{ا}+\text{ب}+\text{ح}+\text{وغیرہ})\text{لا}}$ = ی$^{\text{ا لا}}$ ۔ ی$^{\text{ب لا}}$ ۔ ی$^{\text{ح لا}}$ ۔ ی$^{\text{س لا}}$ وغیرہ اور یہان ظاہر ہی کہ ی = ۲٫۷۱۸۲۸۱۸ پس اگر دریافت کرین ہم صورت مفصلہ بذریعہ ضابطہ نشان قوت غیر مقررہ کی تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$\text{ا} + (\text{ا}+\text{ب}+\text{ح}+\text{وغیرہ})\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + (\text{ا}+\text{ب}+\text{ح وغیرہ})^{2}\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}|^{2}} + \cdots\cdots$$

$$+ (\text{ا}+\text{ب}+\text{ح}+\text{وغیرہ})^{\text{م}}\frac{\text{لا}^{\text{م}}}{\text{ا}|^{\text{م}}} + \text{وغیرہ} =$$

$$(\text{ا} + \text{ا لا} + \frac{\text{ا}^{2}\text{لا}^{2}}{\text{ا}|^{2}} + \frac{\text{ا}^{3}\text{لا}^{3}}{\text{ا}|^{3}} \cdots + \frac{\text{ا}^{\text{م}}\text{لا}^{\text{م}}}{\text{ا}|^{\text{م}}} + \text{وغیرہ}$$

$$\times (\text{ا} + \text{ب لا} + \frac{\text{ب}^{2}\text{لا}^{2}}{\text{ا}|^{2}} + \frac{\text{ب}^{3}\text{لا}^{3}}{\text{ا}|^{3}} + \cdots \frac{\text{ب}^{\text{م}}\text{لا}^{\text{م}}}{\text{ا}|^{\text{م}}} + \text{وغیرہ}) \times \text{وغیرہ}$$

اب چونکہ بذریعہ عمل مذکورہ بالا کے ایک ہی مقدار کی دو صورتین مفصلہ ایک ضابطہ کی موافق نکالی گئی ہین تو ظاہر ہی کہ ان دو صورتون مفصلہ کے دسے اجزای جنمین قوای متماثلہ لا کی پائی جاوین وہ آپسمین مساوی ہون پس معلوم ہوا کہ جسوقت ہم لکھین مسر لا$^{\text{م}}$ کو ایک صورت پایا جاوے مساوی مسر لا$^{\text{م}}$ کی کہ دوسری صورت مین پایا جاوے اور اس بات کا بھی لحاظ رکھین کہ دوسری طرف مساوات مین مسر لا$^{\text{م}}$ کا حاصلضرب اتنی اجزای کا ہوگا جتنی سلسلون کو آپسمین ضرب دیا ہی اور اس حاصلضرب کا ایک ایک جز ان سلسلون مین سے علیحدہ علیحدہ لیا جایگا اوسوقت حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$\frac{(\text{ا}+\text{ب}+\text{ح} \quad \text{وغیرہ})^{\text{م}}}{\text{ا}|^{\text{م}}} = \frac{\text{ا}^{\text{ف}}\text{لا}^{\text{ف}}}{\text{ا}|^{\text{ف}}} \cdot \frac{\text{ب}^{\text{ق}}\text{لا}^{\text{ق}}}{\text{ا}|^{\text{ق}}} \cdot \frac{\text{ح}^{\text{ک}}\text{لا}^{\text{ک}}}{\text{ا}|^{\text{ک}}} \text{ وغیرہ}$$

$$= \frac{\text{ا}^{\text{ف}}\ \text{ب}^{\text{ق}}\ \text{ح}^{\text{ک}}\ \text{وغیرہ}}{\text{ا}|^{\text{ف}}\ \text{ا}|^{\text{ق}}\ \text{ا}|^{\text{ک}}\ \text{وغیرہ}}\ \text{لا}^{\text{ف}+\text{ق}+\text{ک}+\text{وغیرہ}}$$

= مج $\frac{ا^{ف} . ب^{ق} . ج^{ک} \text{ وغیرہ}}{\lfloor ف \lfloor ق \lfloor ک \text{ وغیرہ}}$ اور اسجای ف + ق + ک + وغیرہ = م

اور نشان مج تعبیر کرتا ہی اس عبارت کو مجموعہ اس شکل کی مقدار و نکا ∴ حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

$$(ا + ب + ج + \text{وغیرہ})^م = مج \frac{\lfloor م}{\lfloor ف \lfloor ق \lfloor ک \text{ وغیرہ}} ا^{ف} . ب^{ق} . ج^{ک} \text{ وغیرہ}$$

اسی جا یہہ بات واضح ہو کہ م ایک عدد صحیح اور مثبت فرض کیا گیا تہا اور اسیواسطی صورت گذشتہ صورت عام ہنین ہی کہ اوسمین م صحیح ہو خواہ کسر مثبت ہو خواہ منفی

حکم ۱ اگر ق + ک + ل + وغیرہ = ع تو ف = م − ع اور اسیواسطی جزعام مذکورہ بالا اسس صورت کا ہوجایگا

$\frac{م(م-۱) . . . . (م-ک+۱)}{۱×۲ . . . ق × ۱ × ۲ . . . ک \text{ وغیرہ}} ا^{م-ع} ب^{ق} ج^{ک}$ وغیرہ اسس صورت کی ذریعہ سے بعض اوقات عملون کے کرنی مین سہولت ہوتی ہی

حکم ۲ اگر صورت مفصلہ $(ا + ا_۱ لا + ا_۲ لا^۲ + ا_۳ لا^۳ + \text{وغیرہ})^م$ کی لیوین تو جزعام اسکا بذریعہ جزعام صورت مفصلہ $(ا + ب + ج + \text{وغیرہ})^م$ کی دریافت ہوسکتا ہی جسوقت کہ لکہین ہم ا ، $ا_۱ لا$ ، $ا_۲ لا^۲$ ، $ا_۳ لا^۳$ وغیرہ بجای ا . ب ج وغیرہ کی علیحدہ علیحدہ چنانچہ اس صورت مین جزعام مطلوب یہہ ہوگا $\frac{\lfloor م}{\lfloor ف . \lfloor ق \lfloor ک \text{ وغیرہ}} ا^{ف} ا_۱^{ق} ا_۲^{ک} \text{ وغیرہ} × لا^{ق+۲ک+۳ل+\text{وغیرہ}}$

اور اسس جزعام کی وسیلہ سی تمام اجزا صورت مفصلہ کے معلوم ہوسکتی ہین جبکہ ہم سبہی جبکہ فرض کرین ہم مختلف قیمتین واسطی ف ق ک وغیرہ کے ایسی اور ایسی شرط مساوات ف + ق + ک + وغیرہ = م کی پوری ہو وسے بذریعہ اسی جزعام کی ہم کوئی سا ایسا جز صورت مفصلہ کا کہ جسمین کوئی خاص قوت لا کی مثل $لا^ن$ کی پای جاوی دریافت کرسکتے ہین جبکہ فرض کرین تمام ایسی قیمتین واسطی ف ق ک وغیرہ کی جلسی شرایط دو مساواتون ف + ق + ک + وغیرہ = م اور ق + ۲ک + ۳ل + وغیرہ = ن کی پوری ہو وین۔

حکم ۳ جسوقت مان لین ہم ضابطہ موافق نشان قوت صحیح اور مثبت کے اوسوقت ہم ثابت کرینگے اوسکی موافق ایسے نشان قوت کی کہ کسر او منفی ہو اور اوسکا طریق یہہ ہی فرض کرو کہ ب + ج + وغیرہ = لا اور ∴ $(ا + ب + ج + س + \text{وغیرہ})^م = (ا + لا)^م$

اور اسکا جزعام ط + ۱ وان جز یہہ ہوگا $\frac{م(م-۱)\cdots(ف+۱)}{۱\times۲\times\cdots\cdots ط}$ ا^ف لا^ط

اور اس جای ف + ط = م اور چونکہ ط ایک عدد صحیح اور مثبت ہی تو موافق اوسکے جو پہلے ثابت ہو چکا ہی ظاہر ہی کہ جز عام لاَ کا یعنے (ب + ج + س + وغیرہ)^م کا یہہ ہوگا

لا^ط ۰ $\frac{ب^ق}{۱.۲\cdots ق}$ ۰ $\frac{ج^ک}{۱.۲\cdots ک}$ ۰ وغیرہ ۰۰ جزعام مطلوبہ = م (م - ۱) ۰۰۰ (ف + ۱) ا^ف ۰ $\frac{ب^ق}{۱.۲\cdots ق}$ ۰ $\frac{ج^ک}{۱.۲\cdots ک}$ وغیرہ

مثال ۱ صورت مفصلہ (ا - ب - ج)^۷ کا وہ جز دریافت کیا چاہتے ہین کہ اوسمین ا^۲ ب^۳ ج^۲ پایا جاوی اس جای م = ۷ اور م - ع = ۲ اور ق = ۳ اور ک = ۲

۰۰ جز مطلوب = $\frac{۳\times۴\times۵\times۶\times۷}{۲\times۱\times۳\times۲\times۱}$ ۰ ا^۲ ۰ (-ب)^۳ ۰ (-ج)^۲

= - ۲۱۰ ا^۲ ب^۳ ج^۲

مثال ۲ دریافت کیا چاہتے ہین ہم وہ جز صورت مفصلہ

(۱ + ب لا + ج لا^۲ + س لا^۳)^۴ کا جسمین لا^۸ کی قوت پایا جاوے اس جای ظاہر ہی کہ ف + ق + ک + ل = ۴ اور ق + ۲ک + ۳ل = ۸ اور یہہ بات باقی ہی کہ دریافت کرین ہم تمام قیمتین واسطے ف ق ک وغیرہ کے ایسی کہ اونسے شرایط دو مساواتون گذشتہ کی پوری ہو جائین اس مطلب کے لیئے یہہ مناسب معلوم ہوتا ہی کہ شروع قیمت ل کا کسی کم یا زیادہ سے زیادہ واسطے ق ک وغیرہ کے کرین ایسی کہ اونسے مساوات دوم پوری ہووے اور تمام اون قیمتون کو خارج کرین جو مساوات اول کی موافق نہون مثلاً ہم پاتے ہین کہ ق نہین زیادہ ہو سکتا ہی ۴ سے چنانچہ جب آزماتی ہین تو اس سے شرایط پوری نہین ہوتی ہین اب فرض کرو کہ ق = ۳ اس سے بہی شرایط پوری نہین ہوتی اب فرض کرو ق = ۲ اسکے موافق شرایط پوری ہوتی ہین جبکہ ف = ۰ اور ک = ۰ اور ل = ۲ اب فرض کرو کہ ق = ۱ اور یہہ بہی درست ہی جب ف = ۰ اور ک = ۲ اور ل = ۱ اب ق = ۰ یہہ بہی درست ہی جبکہ ف = ۱ اور ک = ۱ اور ل = ۲ اب فرض کرو کہ ک = ۴ یہہ مناسب ہی جبکہ ف = ۰ اور ق = ۰ اور ل = ۰ اور ف = ۳ درست نہین ہی اور مساواتین ک = ۲ اور ک = ۱ اور ک = ۰ سوای اون صورتون کے جو پہلے بیان ہو چکی ہین اور صورتوین درست نہین ہین اب امتحان کرو ل = ۴ یا ۳ یا ۰ پایا گو ترتیب وار اور اس صورت مین دریافت ہوگا کہ سوای قیمتون مرقومہ بالا کی اور قیمتون سے کام

انہین نکلتا ہی اور فہرست قیمتون مختلف ف اور ق اور ک اور ل کی یہہ ہوگی

ف	ق	ک	ل
۰	۴	۰	۲
۰	۱	۲	۱
۱	۰	۱	۲
۰	۰	۴	۰

اسس فہرست مین قیمتین حرف ف ق وغیرہ کی مطابق ایک دوسرے کی داہنی طرف سی بائین طرف کو لکھی ہوئی ہین اسیواسطی جز مطلوبہ یہہ ہی

$$ل^{۴} \times \left\{ \frac{ب^{۲} س^{۲}}{ل^{۲} \times ل^{۲}} + \frac{ب ح س}{ل^{۲}} + \frac{۱ ح س^{۲}}{ل^{۲}} + \frac{ح^{۲}}{ل^{۴}} \right\} لا^{۸}$$

$$= (۶ ب^{۲} س^{۲} + ۱۲ ب ح س + ۱۲ ا ح س^{۲} + ح^{۲}) لا^{۸}$$

مثال ۳ دریافت کیا چاہتے ہین ہم وہ صورت مفصلہ $(ا لا - ب لا^{۲} + ح لا^{۵} - وغیرہ)^{۱۰}$ جسمین $لا^{۱۴}$ پایا جاوے اسس جای ظاہر ہی کہ

$$(ا لا - ب لا^{۲} + ح لا^{۵} - وغیرہ)^{۱۰} = لا^{۱۰} (ا - لا^{۲} + ح لا^{۴} - وغیرہ)^{۱۰}$$

اور اسیواسطے اس صورت مین فقط اتنا دریافت کرنا ضرور ہوگا کہ وہ جز کونسا ہی جسمین $لا^{۴}$ پائی جاے

اور ∴ یہہ مساواتین ہونگی

ف + ق + ک + وغیرہ = ۱۰

اور ۲ ق + ۴ ک + وغیرہ = ۴

اور انکی شرایط یہہ ہونگی

ف	ق	ک
۸	۲	۰
۹	۰	۱

$$∴ جز مطلوبہ = ل^{۱۰} \left\{ \frac{ا^{۸} ب^{۲}}{ل^{۸} . ل^{۲}} + \frac{ا^{۹} ح}{ل^{۹}} \right\} لا^{۱۴} = ۴۵ ا^{۸} ب^{۲} + ۱۰ ا^{۹} ح لا^{۱۴}$$

مثال ۴ دریافت کیا چاہتے ہین ہم سر $لا^{۴}$ کا اسمین

$$(۹ + ب لا + ح لا^{۲} + س لا^{۳})^{\frac{۱}{۲}}$$ سے

اس جای ف + ق + ک + ل = ۱/۲ اور ق + ۲ک + ۳ل = ۳ مساواتیں شرطی ہیں ؛

ف	ق	ک	ل
$-\frac{۵}{۲}$	۳	۰	۰
$-\frac{۳}{۲}$	۱	۱	۰
$-\frac{۱}{۲}$	۰	۰	۱

$$\therefore \text{سر مطلوب} = \frac{۱}{۲}\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)\left(۲-\frac{۱}{۲}\right)\frac{۳^{-\frac{۵}{۲}}۹}{۳ل} + \frac{۱}{۲}\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)۱^{-\frac{۳}{۲}}۲$$

$$+ \frac{۱}{۲}۹^{-\frac{۱}{۲}}س = \frac{س}{۱۶\,۹^{\frac{۵}{۲}}} + \frac{۲}{۱۴\,۹^{\frac{۳}{۲}}} + \frac{س}{۱۲\,۹^{\frac{۱}{۲}}}$$

فصل بارہوین احتمالات کے بیانمین

اگر ایک بات ن مختلف طریقوں سے ہو سکتی ہو اور احتمال واسطے واقع ہونی اوسکی کی ہر طریقہ سے مساوی ہو تو ظاہر ہی کہ یہہ احتمال کہ بات مذکور کسی ایک خاص طریقہ سی واقع ہو گی تعبیر کیا جایگا اس کسر سے $\frac{۱}{ن}$ اور اسجای عدد ۱ کا تعبیر کرتا ہی یقین کو یعنے مرقومہ بالا سی یہہ مراد ہی کہ اگر عدد ۱ کا تعبیر کریے یقین کو تو ضرور ہی کہ قیمت اوس توقع کی کہ بات مذکور ایک خاص طریقہ سی واقع ہو گی $\frac{۱}{ن}$ ہوتی ہی دلیل اسکی یہہ ہی کہ حاصل جمع تمام احتمالوں کا یقین ہوتا ہی جو عبارت ہی اس سے کہ اگر کوئی بات سو طرحسی ہو سکتی ہو تو یہہ بات تحقیق ہی کہ وہ بات کسی نہ کسی ان سو طریقوں میں سے ہو گی اور چونکہ احتمال واقع ہونی اس بات کا کسی خاص طریقہ سے مساوی ہی تو بالضرور یہہ احتمال کہ بات مذکور کسی ایک طریقہ سی ہو گی یہہ ہے $\frac{۱}{ن}$ مرقومہ بالا سے یہہ بہی معلوم ہوتا ہی کہ اگر یقین تعبیر کیا جاوے ط سے تو قیمت ایک خاص احتمال کی یعنے توقع کی کہ بات مذکور کسی خاص طریقہ سے واقع ہو گی تعبیر کی جائیگی اس کسر سی $\frac{ط}{ن}$ لیکن واضح ہو کہ جو کچہہ آگے لکہا جاتا ہی اوسمیں ہم یقین کو فقط عدد ایک سے تعبیر کرینگے اگر ایک بات ط مختلف طریقوں سی واقع ہوتی ہی و ص طریقوں سے نہیں اور احتمال ہونی ہر واحد ان طریقوں کا مساوی ہی تو ہم کہتے ہیں کہ احتمال اس بات کی واقع ہونیکا تعبیر کیا جایگا $\frac{ط}{ط+ص}$ سے اور احتمال اوسکی نہ واقع ہونیکا تعبیر کیا جایگا $\frac{ص}{ط+ص}$ سے دلیل اسکی یہہ ہی موافق فرض کے یہہ بات ظاہر ہی کہ احتمال واقع ہونی بات مذکور کا احتمال اوسکے نہ واقع ہونی سے وہی نسبت رکہتا ہی جو ط رکہتا ہی ص سے پس معلوم ہوا کہ احتمال اوسکی واقع ہونے

کا وہی نسبت رکھتا ہی احتمال اوسکی واقع ہونی اور نہ واقع ہونے سے جو ط رکھتا ہی ط + ص سے لیکن احتمال واقع ہونی اور نہ واقع ہونی کے ملکر مساوی یقین کے ہوتی ہین تو معلوم ہوا کہ احتمال واقع ہونیکا : یقین : : ط : ط + ص لیکن موافق فرض کے یقین = ۱ تو معلوم ہوا کہ احتمال واقع ہونے کا : ۱ : : ط : ط + ص اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات احتمال واقع ہونے کا = ط/(ط + ص) اگر اس احتمال کو یقین مین سے نکالین تو باقی رہیگا احتمال نہ واقع ہونیکا تو معلوم ہوا کہ احتمال نہ واقع ہونیکا = ۱ − ط/(ط + ص) = ص/(ط + ص)

مثال ۱ واضح ہو کہ ایک پانسی کی چھہ طرفین یا سطحین ہوتی ہین اور ان طرفون کی مختلف نام ہوتے ہین مثلاً ہم اونکا نام ا ب ج د س ص رکھہ سکتی ہین اب اگر کوئی اگر سوال کرے کہ کیا احتمال ہی کہ ایک دفعہ پانسی کے پھینکنے مین طرف ب اوسکی اوپر آوی تو جواب اس سوال کا اسطرح سے نکالنا چاہیئے ظاہر ہی کہ یہہ بات تحقیق ہی کہ چھہ طرفونمین سے ایک نہ ایک اوپر واقع ہوگی اور احتمال ہر ایک کے اوپر واقع ہونیکا مساوی ہی پس معلوم ہوا کہ احتمال کسی خاص طرف ب کی اوپر واقع ہونیکا ۱/۶ ہی اور احتمال اسکی نہ واقع ہونیکا = ۱ − ۱/۶ = ۵/۶ اگر یہہ سوال ہووے کہ کیا ہی احتمال ا یا ب کے اوپر ہونیکا تو اس صورت مین ظاہر ہی کہ یہہ احتمال بہ نسبت پہلی کے دوگنا ہی کیونکہ دو صورتین اوسکی پورے ہونی کی ہین ایک تو واقع ہونا ا کا اوپر کی طرف اور دوسرا ب کا واقع ہونا اوپر کیطرف پس معلوم ہوا کہ اس صورت مین احتمال = ۲/۶ اور اسیطرح سے یہہ بھی ثابت ہوسکتا ہی کہ احتمال ا یا ب یا ج کے اوپر واقع ہونیکا مساوی ہی ۳/۶ اور علی ہذا القیاس اور صورتونمین

مثال ۲ اگر ایک تھیلی مین ن گنتی گولیان مثل ا اور ب اور ج اور د وغیرہ کی ڈالین اور ایک شخص بغیر دیکھنے کے تھیلی مین سے ایک گولی نکالی تو ہم سوال کرتے ہین کہ کیا ہی قیمت اس احتمال کی کہ گولی نکالی گئے ا ہوگی یہہ سوال بہت ہی سہل ہی اور طریقہ حل کرنے اوسکی کا مرقومہ الصدر سے عیان ہی یہہ بات تحقیق ہی کہ ایک نہ ایک گولیونمین سے نکلی گی اور احتمال ہر واحد کی نکلنی کا مساوی ہی تو ضرور ہی کہ احتمال ا کے نکلنی کا = ۱/ن اور احتمال ا یا ب کے نکلنی کا = ۲/ن اور علی ہذا القیاس

مثال ۳ اگر ان گولیونمین سے جنکا ذکر مثال گذشتہ مین ہی دو گولیان ایکہی وقت نکالی جائین تو احتمال اس بات کا کہ یے دو گولیان ا اور ب ہونگی بتعبیر کیا جائیگا ۲/(ن(ن − ۱)) کیونکہ یہہ بات مسئلہ ترتیب اور اجتماع سی ظاہر ہی کہ اگر ن گولیونمین سے دو دو کو اکٹھا کرین اسطرح سی کہ ہر اجتماع مین دو گولیان مختلف ہوان یعنے جو دو گولیان ایک اجتماع مین ہوون وہی دونون گولیان دوسرے اجتماع مین ہونی

تو تعداد کل اجتماعونکی تعبیر کی جاتی ہی $\frac{ن(ن-۱)}{۲}$ اور احتمال واسطی نکل آنی تھیلی سیے کسی ایک کا ان اجتماعون دو دو گولیون سیے کے سی مساوی ہی تو معلوم ہوا کہ احتمال واسطی نکلنی گولیون آ اور بآ کے ایکہی وقت بتعبیر کیا جائیگا $\frac{۱}{\frac{ن(ن-۱)}{۲}} = \frac{۲}{ن(ن-۱)}$ اور یہی بات ثابت کرنی تہی

مثال ۴ اگر چھہ سفید گولیان اور پانچ کالی گولیان ایک ہتیلی مین ڈالکر ملائی جائین اور کوئی شخص ایک گولی انمین سیے ایک وقت نکالی تو ہم پوچھتے ہین کہ کیا ہی قیمت اس احتمال کی کہ گولی نکالی گئی سیاہ ہوگی اور کیا ہی قیمت اس احتمال کہ گولی مذکور سفید ہوگی یہہ بات اسطرح تحقیق ہی کہ گولی نکالی گئی یا تو کالی یا سفید ہوگی اور چونکہ گولیان سفید تو چھہ اور کالی پانچ ہین تو اوس سے جو پہلی لکھا گیا ہی یہہ بہت ظاہر ہی کہ احتمال سفید گولی نکلنے کا ہوگا $\frac{۶}{۱۱}$ اور احتمال کالی گولی نکلنے کا $\frac{۵}{۱۱}$ ہوگا مطابق مختلف موتکی فہرستون مُردون کی سیے ایسی فہرستین یا نقشی تیار کئے گئے ہین کہ اونسی یہہ بات معلوم ہوجاتی ہی کہ کتنے شخص اپنے پیدا ہونیمین سیے بعد گذرنی ہر سال کی زندگی کے انتہای کو پہونچتے ہین ان فہرستون کے وسیلہ سی قیمت احتمال اس بات کی کہ فلانا شخص فلانی عمر تک زندہ رہیگا معلوم ہوجاتی ہی

مثال ۵ چاہتے ہین ہم دریافت کرنی قیمت احتمال اس بات کی کہ کوئی شخص کسی عمر مفروض کا ایک برس اور جئیگا فرض کرو کہ فہرست مذکورہ بالا مین آ ہی تعداد اون آدمیون کی جنکی عمر مساوی عمر مفروض کے ہی اور بآ تعداد اون آدمیون کے جو بعد ایک سال کی باقی رہتے ہین پس اس صورت مین ظاہر ہی کہ احتمال اس بات کا کہ شخص مذکور ایک سال تک جئیگا تعبیر کیا جائیگا $\frac{ب}{ا}$ سے اور احتمال اس بات کا کہ اس سال مین مر جائیگا تعبیر کیا جائیگا $\frac{ا-ب}{ا}$ سیے مثلاً فہرست ڈاکٹر ہیلی صاحب کے سی واضح ہوتا ہی کہ ۵۸۶ ادمیون ۲۲ برس کے عمر کی مین ۵۷۹ ادمی ۲۳ برس کی عمر حاصل کرتے ہین اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ احتمال اس بات کا کہ کوئی شخص ۲۲ برس کی عمر کا ایک سال تک جیتا رہیگا تعبیر کیا جائیگا $\frac{۵۷۹}{۵۸۶}$ سے یعنی قریب قریب اس $\frac{۸۳}{۸۴}$ سیے اور احتمال اسبات کا کہ یہی شخص اسی سال مین مر جایگا تعبیر کیا جائیگا $\frac{۷}{۵۸۶}$ سیے یعنی قریب قریب اس $\frac{۱}{۸۴}$ سے ظاہر ہی کہ یہہ مثال بہت دلچسپ ہی اور اسی قبیل کی مثالون سیے بہت فائدہ ہی منظور ہی

مثال ۶ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا احتمال اس بات کا کہ کوئی شخص کسی عمر مفروض کا جئیے گا اتنی برسون مفروض تک فرض کرو کہ فہرستون مین تعداد ادمیون عمر مفروض کی آ ہی اور بآ تعداد اونکی جو بعد ایک سال کی باقی رہتے ہین جآ اونکی جو بعد دو سال کے باقی رہتے ہین اونکی جو بعد تین سال کے

اور علی ہذا القیاس ل ہی تعداد اون آدمیون کی جو باقی رہتے ہین بعد ل سال کے اس صورت مین ظاہر ہی کہ
احتمال اسبات کا کہ شخص مذکور ایک برس جئیگا بتعبیر کیا جائیگا $\frac{ب}{ا}$ سے اور احتمال اسکا کہ وہی شخص
۲ برس تک جیتا رہیگا بتعبیر کیا جائیگا $\frac{ج}{ا}$ سے اور احتمال اسکا کہ وہی شخص ۳ سال تک جیتا رہیگا
بتعبیر کیا جائیگا $\frac{د}{ا}$ سے اور احتمال اسکا کہ وہی آدمی ل برس تک جئیگا بتعبیر کیا جائیگا $\frac{ل}{ا}$ سے
اور علی ہذا القیاس یہان سے یہہ بہی خوب واضح ہی کہ احتمال اسبات کا کہ شخص مذکور ایک سال مین مرجائیگا
بتعبیر کیا جائیگا $\frac{ا-ب}{ا}$ سے اور ۲ سال مین مرجائیگا $\frac{ا-ج}{ا}$ ہوگا اور ۳ سال مین مرجائیگا $\frac{ا-د}{ا}$
ہوگا اور ل سال مین مرجائیگا $\frac{ا-ل}{ا}$ ہوگا اور علی ہذا القیاس واضح ہو کہ ایسے مثالین ساہوکارون
اور روپیہ قرض دینے والون کو اور بہت سی کارخانی والون کو کہ جو ولایتون فرنگ مین کثرت سے
پائی جاتی ہین بہت مفید ہوتے ہین اگر دو باتین ایک دوسرے سے کچہہ تعلق نہین رکہتے ہون اور احتمال
ایک کے واقع ہونیکا $\frac{١}{م}$ ہو اور دوسرے کی واقع ہونیکا $\frac{١}{ن}$ ہو تو ہم کہتے ہین کہ احتمال اسبات کا
کہ یہ دونون باتین اکہٹی واقع ہونگی بتعبیر کیا جائیگا $\frac{١}{م ن}$ سے کسواسطے کہ ہر واحد کو م طریقون مین
سے کہ جنمین اول بات واقع ہوتی ہی یا نہین واقع ہوتی ہی ملاتی سے ن طریقون سے کہ جنمین دوسری
بات واقع ہوتی ہی یا نہین واقع ہوتی ہی حاصل ہونگی ن م اجتماع اور چونکہ فقط ایک ایسا اجتماع ہی کہ اوسمین
دونون باتون کے واقع ہونیکا احتمال ہی تو ضرور ہی کہ احتمال مذکور مساوی ہو
$\frac{١}{م ن}$ کے مرقومہ بالا سی ظاہر ہی کہ احتمال اس کا کہ دونون باتین مذکور اکہٹی نہین واقع ہونگی

یہہ ہوگا $١ - \frac{١}{م ن}$ یا $\frac{م ن - ١}{م ن}$ اسواسطی کہ احتمال اسبات کا کہ یے دونون

باتین واقع ہونگی اور احتمال اسکا کہ یے دونون نہین واقع ہونگی مساوی ہین یقین کے کہ بتعبیر کیا جاتا ہی
عدد ١ سے سو معلوم ہوا کہ جسوقت تفریق کرینگی ہم عدد ایک مین سے احتمال دونونکی واقع ہونیکو
تو حاصل تفریق ہوگا مساوی احتمال دونو باتون مذکورہ بالا کی نہ واقع ہونیکا ایکہی وقت مین مرقومہ بالا سے
یہہ بہی واضح ہوگا کہ احتمال اسکا کہ دونو باتین مذکورہ بالا علیحدہ علیحدہ واقع نہونگی بتعبیر کیا جائیگا اس سے

$\frac{(م - ١)(ن - ١)}{م ن}$ کسواسطی کہ احتمال اس بات کا کہ اول بات نہین واقع ہوگی مساوی

ہی $\frac{م-١}{م}$ کے اور احتمال اسبات کا کہ دوسری نہین واقع ہوگی مساوی ہی $\frac{ن-١}{ن}$ کے پس معلوم
ہوا کہ احتمال اسبات کا کہ دونو باتین مذکور علیحدہ علیحدہ واقع نہین ہونگی مساوی ہوگا اسکے

$$\frac{م-۱}{م} \times \frac{ن-۱}{ن} = \frac{(م-۱)(ن-۱)}{م ن}$$

مرقومہ بالا سی یہہ بہی ظاہر ہوتا ہی کہ احتمال اسکا کہ فقط ایک مذکور میں سے باتون واقع ہوگی اور دوسری نہین واقع ہوگی بتعبیر کیا جائیگا اس سے $\frac{م+ن-۲}{م ن}$ کسواسطی کہ احتمال اس بات کا کہ اول بات واقع ہوگی اور دوسری نہین واقع ہوگی بتعبیر کیا جاتا ہی $\frac{۱}{م} \times \frac{ن-۱}{ن}$ اور احتمال اسبات کا کہ اول بات نہین واقع ہوگی اور دوسری واقع ہوگی بتعبیر کیا جائیگا $\frac{م-۱}{م} \times \frac{۱}{ن}$ سی پس حاصل جمع ان دو احتمالونکا ہوتا ہی $\frac{م+ن-۲}{م ن}$ جو مساوی ہی احتمال فقط ایک کی واقع ہونیکی مرقومہ بالا سے یہہ بہی واضح ہی کہ اگر کئی باتین ایسی ہون کہ دے ایک دوسری سے تعلق نہ رکہتی ہون اور احتمال انکے علیحدہ علیحدہ واقع ہونیکا بتعبیر کیا جاے علیحدہ علیحدہ $\frac{۱}{م}$ $\frac{۱}{ن}$ $\frac{۱}{د}$ وغیرہ سی تو ہم کہتے ہین کہ احتمال اس بات کا کہ یے سب باتین اکہٹی دفع واقع ہونگی بتعبیر کیا جائیگا اس سے $\frac{۱}{م ن د وغیرہ}$ اسواسطی کہ یہہ بات پہلی ثابت ہو چکی ہی کہ احتمال اول دو باتونکی اکہٹے واقع ہونیکا مساوی ہی $\frac{۱}{م \times ن}$ سے کے اور اسیواسطی احتمال اسکا کہ یے دونون باتین اور تیسری بات اکہٹی واقع ہون یہہ ہوگا $\frac{۱}{م ن د}$ اور یہی دلیل ہی واسطی زیادہ باتون کے جسوقت م = ن = د وغیرہ اور ف تعبیر کرتا ہو تعداد باتون کو تو ظاہر ہی کہ احتمال ان سبونکی اکہٹے یعنے متواتر واقع ہونیکا بتعبیر کیا جائیگا اس $\frac{۱}{م^{ف}}$ سے

مثال ۱ ایک پانسی کے چہہ ضلعون پر حروف ا اور ب اور ج اور د اور س اور ص نقش کیے ہوئے ہین چاہتے ہین ہم دریافت کرنا احتمال اسبات کا کہ اگر پانسی مذکور ایک دفع پہینکے تو ا اوپر واقع ہو اور دوسری بار پہینکین تو ب اوپر واقع ہو ظاہر ہی کہ احتمال اسبات کا کہ ا اوپر واقع ہوگا مساوی ہی $\frac{۱}{۶}$ سے کے اور احتمال اس بات کا کہ دوسری بار پہینکنے سے ب اوپر واقع ہوگا مساوی ہی $\frac{۱}{۶}$ سے کے تو موافق اوسکی جو پہلی ثابت ہوا ہی یہہ بات عیان ہی کہ احتمال دونو ا اور ب سے اوپر واقع ہونیکا مساوی ہوگا $\frac{۱}{۶ \times ۶} = \frac{۱}{۳۶}$

مثال ۲ فرض کرو کہ ایک تہیلی میں چہہ تو سفید گولیان اور پانچ سیاہ گولیان ڈالکر اونہین خوب ملادین اور ایک شخص اس تہیلی مین سے اول تو ایک گولی نکالتا ہی اور دوسری بار ایک اور گولی بغیر دیکہی کے پس اب ہم سوال کرتے ہین کہ کیا ہی احتمال اسبات کا کہ اول بار تو ایک سفید گولی نکلی گی اور دوسری بار ایک سیاہ گولی نکلی گی ظاہر ہی کہ احتمال اس کا کہ اول دفع ایک سفید گولی نکلی مساوی ہی $\frac{۶}{۱۱}$ اور احتمال اسکا کہ دوسری بار ایک کالی گولی نکلی گی مساوی ہی $\frac{۵}{۱۰}$ کی (کیونکہ اس صورت مین کل تعداد گولیون کی فقط ۱۰ رہیگی یعنے $\frac{۱}{۲}$ کے

پس معلوم ہوا کہ احتمال مطلوبہ مساوی ہوگا $\frac{6}{11} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{11}$

مثال ۳ اگر فرض کیجئے وہی سب باتین جو مثال گذشتہ مین مانی گئی تہین تو چاہتے ہین ہم دریافت کرنا احتمال اس بات کہ اول بار تو ایک سفید گولی نکلی اور دوسری بار ایک کالی گولی اور تیسری بار ایک کالی گولی نکلی مثال گذشتہ سی یہہ بات عیان ہی کہ احتمال اس بات کا کہ اول بار ایک سفید گولی نکلی اور دوسری بار ایک کالی گولی نکلی مساوی ہی $\frac{3}{11}$ کے لیکن بعد نکلنے ان دونو گولیون کے ۵ سفید اور ۴ کالی گولیان باقی رہینگی اور اسیواسطی احتمال اس بات کا کہ تیسری بار ایک کالی گولی نکلے گی مساوی ہوگا $\frac{4}{9}$ پس ہوا کہ احتمال مطلوبہ مساوی ہوگا $\frac{3}{11} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{33}$

مثال ۴ چاہتے ہین دریافت کرنا احتمال اس بات کا کہ اگر پانسی مذکور بالصدر کو دو دفع متواتر پہینکین تو متواتر دو نو دفع مین کم سے کم ایک بار حرف آ کا اوپر واقع ہو ظاہر ہی کہ احتمال اس بات کا کہ اول بار آ اوپر واقع نہین ہوگا مساوی ہی $\frac{5}{6}$ کے اور اسیطور سی احتمال اس بات کا کہ دوسری بار بہی آ اوپر واقع نہین ہوگا مساوی ہی $\frac{5}{6}$ کے پس احتمال اس بات کا کہ آ دونو بار متواتر اوپر واقع نہین ہوگا مساوی ہوگا $\frac{25}{36}$ اور اسیواسطی احتمال اسبات کا کہ کسی نہ کسی دونو بار مین سے آ اوپر واقع ہوگا مساوی ہی $1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$

مثال ۵ دو شخص برابر کی شرط بدتی ہین اسطرح پر کہ ایک تو آ کی اوپر واقع ہونی سے جیت تا ہے اور دوسرا اوپر واقع نہونی سے جیت تا ہی پس اب ہم سوال کرتے ہین کہ کتنی بار پانسی کو پہینکنا چاہیئے تا کہ دونو شخصون کو جو کہون مساوی ہو اور مساوی رقم ہارنا یا جیتنا موافق انصاف کی ہو فرض کرو کہ تعداد دفعون پہینکنی پانسی کی مساوی ہی لا کے اب موافق مثال گذشتہ کی یہہ بات ظاہر ہی کہ احتمال اس بات کا کہ لا دفع متواتر آ اوپر واقع نہین ہوگا مساوی ہی $\left(\frac{5}{6}\right)^{لا}$ اور چونکہ احتمال واقع ہونی اور نہونی کا موافق شرط اس سوال کے مساوی ہی یعنے ہر واحد انمین سے مساوی نصف یقین کے ہی جو عدد ایک سی تعبیر کیا جاتا ہی تو معلوم ہوا کہ $\left(\frac{5}{6}\right)^{لا} = \frac{1}{2}$ اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات لا × لوگ $\frac{5}{6}$ = لوگ $\frac{1}{2}$

یا لا × (لوگ ۵ − لوگ ۶) = لوگ ۱ − لوگ ۲ اور

$لا = \frac{\text{لوگ ۱} - \text{لوگ ۲}}{\text{لوگ ۵} - \text{لوگ ۶}}$ اور چونکہ لوگ ۱ = ۰ تو معلوم ہوا کہ $لا = \frac{\text{لوگ ۲}}{\text{لوگ ۶} - \text{لوگ ۵}}$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت لا کی لا = ۸ ء ۳ قریب قریب

مثال ۶ چاہتے ہین دریافت کرنا احتمال اس بات کا کہ دو شخص ق اور ق جنکی عمرین معلوم ہین ایک سال تک جیتی رہینگے فرض کرو کہ فہرست مردون اور زندون وغیرہ کی سے کہ جسکا پہلی ذکر ہو چکا ہے

یہہ بات معلوم ہوتی ہی کہ احتمال ایک کے دو شخصون مذکور مین سے ایک برس تک جینی کا $\frac{1}{م}$ ہی اور اسیطرح سے احتمال دوسرے شخص یعنے ق کے جلنی کا ایک برس تک $\frac{1}{ن}$ ہی تو اب ظاہر ہی کہ احتمال اس بات کا کہ دونو شخص ایک برس تک جیتے رہینگے مساوی ہوگا اس حاصل ضرب $\frac{1}{م} \times \frac{1}{ن}$ یا $\frac{1}{م ن}$ کے

مثال ۷ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا احتمال اس بات کا کہ کے برسونمین کم سے کم ایک دو شخصون مذکورہ مثال گذشتہ مین سے جیتا رہیگا مرقومہ بالا سی ظاہر ہی کہ احتمال اسبات کا کہ شخص ق ایک سال مین مرجائیگا مساوی $\frac{م-1}{م}$ ہی اور احتمال اس بات کا کہ ق اسی عرصہ مین مرجائیگا مساوی ہے $\frac{ن-1}{ن}$ کے پس احتمال اس بات کا کہ دو نو شخص ایک سال مین مرجائینگی مساوی ہوگا $\frac{(م-1)(ن-1)}{م ن}$ کے اور اسیواسطی احتمال اسبات کا کہ دونون شخص مذکور نہین مرینگے مساوی ہوگا

$$1 - \frac{(م-1)(ن-1)}{م ن} = \frac{م + ن - 1}{م ن}$$

یہہ بہی ظاہر ہی کہ اگر احتمال اسبات کا کہ شخص ق ل سال تک جینیکا تعبیر کیا جاے $\frac{1}{ط}$ سی اور احتمال شخص ق کے جینی کا اسی عرصہ تک تعبیر کیا جای $\frac{1}{ص}$ سے تو موافق اوسکی کہ پہلی لکہا گیا ہی احتمال اسبات کا کہ کم سے کم ایک شخص انمین کا وقت مذکور تک جینیکا مساوی ہوگا

$$1 - \frac{(ط-1)(ص-1)}{ط ص} = \frac{ط + ص - 1}{ط ص}$$ اسکے

اگر احتمال ایک بات کی واقع ہونیکا ایک امتحان کرنی سے تعبیر کیا جاے $\frac{ط}{ط + ص}$ سے تو چاہتے ہین ہم دریافت کرنا احتمال اسی کام کی واقع ہونیکا ایک دفع یا دو دفع یا تین دفع اور علی ہذا القیاس ن بار امتحان کرنی سے چونکہ احتمال اسبات کی واقع ہونیکا کسی خاص امتحان مین $\frac{ط}{ط + ص}$ ہی تو موافق اوسکی جو پہلی بیان کیا گیا ہی یہہ بات ظاہر ہی کہ احتمال اسی بات کی نہونے کا (ن − ۱) بار امتحانونمین تعبیر کیا جائیگا $\frac{ص^{ن-1}}{(ط + ص)^{ن-1}}$ سے اور یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ احتمال واقع ہونیکا کسی خاص امتحان مین اور نہونیکا باقی امتحانونمین تعبیر کیا جائیگا $\frac{ط ص^{ن-1}}{(ط + ص)^{ن}}$ سے اور چونکہ تعداد امتحانون کی ن ہی تو ضرور ہی کہ احتمال اس بات کا کہ بات مذکور واقع ہوگی کسی ایک مین ان امتحانونمین سے اور نہ واقع ہوگی باقی امتحانونمین بہ نسبت احتمال مذکور کے ن دفع زیادہ ہوگا یعنے وہ یہہ $\frac{ن ط ص^{ن-1}}{(ط + ص)^{ن}}$ ہوگا اسیطرح سی احتمال اوسی کے واقع ہونیکا دو امتحانونمین اور نہین ہونیکا باقی امتحانونمین تعبیر کیا جائیگا $\frac{ط^2 ص^{ن-2}}{(ط + ص)^{ن}}$ سے اور چونکہ اس صورت مین تعداد ان مختلف طریقون کی جنمین وہ دو دفع ن

سکتے امتحانوں مین واقع ہوتا ہی اور باقی امتحانوں مین نہین واقع ہوتا ہی $\frac{ن(ن-۱)}{۲}$ ہی تو ضرور ہی کہ احتمال اسکی واقع ہونیکا دو دفعہ ن امتحانوں مین تعبیر کیا جاییگا

$$\frac{\frac{ن(ن-۱)}{۲}\, ط^{۲} ص^{ن-۲}}{(ط+ص)^{ن}}$$

سیے اسیطرح احتمال اسکا کہ بات مذکور تین دفعہ ن امتحانوں مین واقع ہوگی ہے

$$\frac{\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۲\times۳}\, ط^{۳} ص^{ن-۳}}{(ط+ص)^{ن}}$$

ہی اور احتمال اسکی ع دفعہ واقع ہونیکا ن امتحانوں مین یہہ ہوگا

$$\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\cdots\cdots\frac{ن-ع+۱}{ع}\, ط^{ع} ص^{ن-ع}}{(ط+ص)^{ن}}$$

بعینہ مرقومہ بالا کی طرح یہہ بھی ثابت ہو سکتا ہی کہ احتمال بات مذکور کی نہ واقع ہونیکا ع دفعہ ن امتحانوں مین تعبیر کیا جایگا اس صورت جبریہ سی

$$\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\cdots\cdots\frac{ن-ع+۱}{ع}\, ط^{ن-ع} ص^{ع}}{(ط+ص)^{ن}}$$

مرقومہ بالا سی یہہ بھی واضح ہوتا ہی کہ احتمال اسبات کا کہ بات مذکور کم سی کم ع دفعہ ن امتحانون مین واقع ہو تعبیر کیا جایگا اس صورت جبریہ سیے

$$\frac{ط^{ن} + ن\, ط^{ن-۱} ص + \frac{ن(ن-۱)}{۲} ط^{ن-۲} ص^{۲} \cdots\cdots \overline{ن-ع+۱}\ \text{جزون تک}}{(ط+ص)^{ن}}$$

دلیل اسکی یہہ ہی کہ اگر ایک بات ہر دفعہ واقع ہو تو واقع ہو ایک دفعہ یا دو دفعہ یا تین دفعہ یا ن − ع دفعہ تو ضرور ہی کہ وہ اس صورتین کم سیے کم ع دفعہ واقع ہوگی اور اسیواسطی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ احتمال واقع ہونی بات مذکور کا کم سیے کم ع دفعہ ن امتحانوں مین مساوی ہی حاصل جمع احتمالون اوسکی ہر دفعہ واقع ہونیکی اور نہ واقع ہونیکے ایک دفعہ یا دو دفعہ ...... ن − ع دفعہ اور ظاہر ہی کہ حاصل جمع ان احتمالون کا یہہ ہی

$$\frac{ط^{ن} + ن\, ط^{ن-۱} ص + \frac{ن(ن-۱)}{۲} ط^{ن-۲} ص^{۲} \cdots\cdots \overline{ن-ع+۱}\ \text{جزون تک}}{(ط+ص)^{ن}}$$

مثال ۱ اگر ایک پانسی کو کہ اوسکی چھہ ضلعوں پر حروف ا اور ب اور ج اور د اور س اور ص لکھے ہوئے ہین تین دفعہ متواتر پھینکین تو ہم سوال کرتے ہین کہ کیا ہی احتمال اسکا کہ حرف ا کا کم سیے کم دو دفعہ اوپر کی طرف واقع ہو اسصورت مین ظاہر ہی کہ

ن = ۳ اور ع = ۴ اور ط = ۱ اور ص = ۵ اور اسیواسطی ظاہر ہی کہ احتمال مطلوبہ یہہ ہوگا

$$\frac{۱ + ۳ \times ۵}{۶ \times ۶ \times ۶} = \frac{۱۶}{۲۱۶} = \frac{۲}{۲۷}$$

مثال ۲ - بتلاو کیا ہی احتمال اسکا کہ پانچ شخصوںمین سے جنکی عمر کچھہ فرض کی گئی ہی کم سے کم تین آدمی ایک وقت مفروض مین مرجائینگے فرض کرو کہ احتمال اسبات کا کہ کوئی سا ایک ان شخصوںمین سے وقت مفروض مین مرجائیگا پس اسصورت مین معلوم ہی ہمین احتمال ایک بات کے ایک دفع واقع ہونیکا اور دریافت کرنا ہے ہمیں احتمال اسکا کہ بات مذکور کم سے کم تین دفع پانچ امتحانونمین واقع ہو اسصورت مین ظاہر ہی کہ ط = ۱ اور ص = م - ۱ اور ن = ۵ اور ع = ۳ پس معلوم ہوا کہ احتمال مطلوبہ یہہ ہی

$$\frac{۱ + ۵(م-۱) + ۱۰(م-۱)^۲}{م^۵}$$

واضح ہو کہ مطالب اس فصل کے بہت مشکل اور دلچسپ اور مفید ہین لیکن اس کتاب مین ساری مسئلے اس فرع کی نہین لکھے جاسکتی ہین لیکن امید ہی جو طالب علم اوسکو جو مرقوم اوپر ہوا ہی توجہہ سی پڑہی گا اوسی بہت کچھہ درباب اس مطلب کے معلوم ہوجایگا یہہ بہی واضح ہو کہ مسئلون مذکورہ بالا کی حل کرنے مین اکثر ہم سے غلطی ہوجاتی ہی کیونکہ بعض اوقات ایسا ہوتا ہی کہ جن باتونکو نہایت ظاہر اور صحیح تصور کرتے ہین حقیقت مین بالکل غلط ہوتی ہین واسطی توضیح کرنے اس بات کی ایک مثال اس جا کفایت کریگی اور وہ مثال یہہ ہی ظاہر ہی کہ احتمال اسبات کا کہ ایک دفع پانسی کے پہنکنے سی حرف آ کا اوپر کیطرف واقع ہو تعبیر کیا جاتا ہی $\frac{۱}{۶}$ سے اور چونکہ دوسری دفع پہنکنے مین بہی اتنا ہی احتمال واسطی واقع ہونی آ کے اوپر کیطرف ہی تو ایسا معلوم ہوتا ہی کہ اگر دو دفع پانسی مذکور کو پہنکین تو احتمال دوگنا ہوگا یعنے تعبیر کیا جائیگا $\frac{۲}{۶}$ سے لیکن اوس سے جو ہمنے اوپر بیان کیا ہی یہہ پایا گیا ہی کہ یہہ نتیجہ بالکل غلط ہی کیونکہ اگر ایسا ہی ہوتا تو اس سے یہہ نتیجہ بہی نکلتا کہ چھہ دفع پانسی کو پہنکنے سی بالضرور حرف آ کا اوپر واقع ہوتا باعث اس غلطی کا جو اس صورت مین ذرا پوشیدہ ہی یہہ ہی کہ فرض کرلیتی ہین ہم کہ بالضرور پانسہ دوسری دفع بہی پہنکا جائیگا اور یہہ نہین ہوتا ہی جبکہ واقع ہو حرف آ کا اوپر کیطرف اول سے پہنکنی سے

فصل تیرہوین بیچ بیان ایسی کسور کی جنکی نسب نما اور شمار کنندہ صفر ہوجاتے ہین جسوقت فرض کیجاتی واسطی مقدار غیر مقررہ کے اوسکی یا جاتی ہی کوئی خاص قیمت

مطالب اس فصل کی بہت عجیب اور دلچسپ ہین اور جو شخص اونکو قرار واقعی سمجھلی اوسی بہت قوت واقعی سمجھنی اوس مشکل فرع
علم ریاضی کے جسکو علم حساب جزیات وکلیات کہتے ہین حاصل ہوتی ہی واضح ہو کہ مختلف مہندسون نی مختلف
طریقی اس فرع ریاضی مین نکالی ہین چنانچہ ایک مہندس انگریزی نی کہ اوسکا نام لینڈن تہا اس علم کو ایک
ایسی قاعدہ پر بنا کیا تہا کہ جو ان کسور کی مسئلہ پر موقوف ہی پس واسطی سمجھنے اس مہندس کے رسالہ کے کہ علم حساب جزیات
مین ہے (گو اس کتاب کا رواج نہین ہی) ضرور ہی کہ پہلی واقف ہو جائین ان کسور سی سوای اس فائدہ کی ایک اور بڑا
فائدہ یہہ ہی کہ اونکی ذریعہ سی بچتے ہین ہم بہت سی غلطیون سے مثلاً اگر شخص جو مسئلہ ان کسور کی سے آگاہ نہین وہ یہہ
جانتے ہین کہ اگر صفر کو صفر پر تقسیم کرین تو خارج قسمت صفر ہوگا یا کوئی خاص مقدار ہوگی واسطے توضیح اس
بات کی لیتے ہین ہم ایک بہت سہل مثال فرض کرو کہ کسر مفروض یہہ ہی $\frac{\text{۲لا} - \text{۲ط}}{\text{لا} - \text{ط}} = ۲$
اس صورت مین ظاہر ہی کہ لا کو کچھہ ہی فرض کرین کسر $\frac{\text{۲لا} - \text{۲ط}}{\text{لا} - \text{ط}}$ ہمیشہ مساوی ۲ کی ہوگی چونکہ لفظ کچھہ ہی مین ط
بہی داخل ہی تو لازم آتا ہی اس سے یہہ کہ جسوقت لا = ط کی ہو اوسوقت بہی قیمت کسر مفروض کی ۲ ہی لیکن اس صورت
$\text{۲لا} - \text{۲ط} = ۰$ اور اسی طور $\text{لا} - \text{ط} = ۰$ پس کسر مفروض اس شکل کی ہوجایگی $\frac{۰}{۰}$ اور یہان سے یہہ بات ثابت
ہوتی ہی کہ $\frac{۰}{۰} = ۲$ اگر مفروض $\frac{\text{۳لا} - \text{۳ط}}{\text{لا} - \text{ط}}$ ہوتی تو اس صورت مین حاصل ہوتی ہمین یہہ مساوات
$\frac{۰}{۰} = ۳$ اور اگر کسر مفروض یہہ $\frac{\text{ن لا} - \text{ن ط}}{\text{لا} - \text{ط}}$ ہوتی تو حاصل ہوتی یہہ مساوات $\frac{۰}{۰} = \text{ن}$ اور ن تعبیر
کرتا ہی کسی عدد کو تو معلوم ہوا کہ کسر $\frac{۰}{۰}$ مساوی کسی عدد کی ہوسکتی ہی بعض اشخاص جو علم ریاضی سے خوب
واقف نہین ہوتے ہین یہہ بات سنکر حیران ہوتی ہین اور یہہ اعتراض کرتے ہین کہ چونکہ $\frac{۰}{۰} = ۲$ کے ہی اور ۳ کی بہی ہے
تو لازم آتا ہی اس سے یہہ $۳ = ۲$ اور یہہ بات صریح محال ہی لیکن ہمین اسکا جواب اونہین یہہ جواب دینا چاہیئے کہ جسوقت
یا جس صورت مین $\frac{۰}{۰}$ مساوی ۲ کی ہی اوس صورت مین وہ مساوی ۳ کے نہین ہوتی ہی یعنے معنی $\frac{۰}{۰}$ کے
صورتون مختلفہ مین مختلف ہوتی ہین ایکوقت اوس سے ایک مقدار تعبیر کیجاتی ہی اور دوسری وقت کوئی اور مقدار
چند سو برس گذرتے ہین کہ ان کسور کی درباب فاضلون مین بہت تکرار ہوئی تہی برکلی نامی ایک بڑا فاضل اپنی زمانہ کا
انگلستان مین تہا لیکن اوسے ایسی معلومات علم ریاضی مین نہ تہی کہ اوسکی قول کو اس علم مین بہت ہی لحاظ کرین یہہ
بی شک اوسی بڑی دستگاہ منطق اور علم الٰہیات مین تہی اور اور لحاظون مین وہ بہت ذہین اور عاقل تہا لیکن مسئلون ریاضی
کو خوب نہین سمجہتا تہا وہ کہا کرتا تہا کہ علامت $\frac{۰}{۰}$ بی معنی ہی اور نہین ہی ممکن کہ یہہ کسی مقدار محدود کی مساوی ہوسکے
اور یہی باعث تہا کہ وہ علم حساب جزیات وکلیات کو کہ اسحاق نیوٹن نے ایجاد کیا تہا غلط جانتا تہا قاعدہ دریافت کرنی اصلی قیمت
$\frac{۰}{۰}$ کا کسی خاص صورت مفروض مین یہہ ہی کہ اوس خاص مقدار پر کہ جسکی مساوی فرض کرنے سے مقدار غیر مقررہ
کو کسر مفروض $\frac{۰}{۰}$ ہوجاتی ہی ایک ایسی مقدار غیر مقررہ زیادہ کرتے ہین کہ حاصل جمع مساوی ہوجاے مقدار غیر مقررہ

مفروض سے کے اور بعدازان لکھتے ہین اسس حاصل جمع کو بجای مقدار غیرمقرره مفروض کی کسر مفروض مین اور بعد جاری کرنے عمل ضروری کے فرض کرتے ہین مقدار غیرمقرره زیاده کی گنی کو مساوی صفر کی اور اس عمل سی قیمت اصلی کسر $\frac{0}{0}$ کے معلوم ہوجاتی ہی مثلاً فرض کرو کہ ہی یہہ کسر $\frac{\text{لا}^2 - \text{ط}^2}{\text{لا} - \text{ط}}$ کہ ہوجاتی ہی $\frac{0}{0}$ جسوقت فرض کرتے ہین ایک خاص قیمت مثل ط کی بجای مقدار غیرمقرره لا کے اب موافق قاعده سے فرض کریگے کہ $\text{ط} + \text{د} = \text{لا}$ اور $\therefore$ $\text{لا}^2 = \text{ط}^2 + 2\,\text{د}\,\text{ط} + \text{د}^2$ اور $\therefore$ $\frac{\text{لا}^2 - \text{ط}^2}{\text{لا} - \text{ط}} = \frac{2\,\text{ط}\,\text{د} + \text{د}^2}{\text{د}} = 2\,\text{ط} + \text{د}$ اور جسوقت $\text{د} = 0$ اوسوقت $\frac{0}{0} = 2\,\text{ط}$ ایک اور مثال اسکی یہہ ہی فرض کرو کہ چاہتے ہین ہم قیمت $\frac{\text{ط}\,\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ط}}{\text{لا} - 1}$ کی کہ مساوی $\frac{0}{0}$ کی ہوجاتی ہی جسوقت ہووے $\text{لا} = 1$ لکن یہہ مثال بخوبی حل ہوسکتے ہی اگر جاری کرین ہم عمل تقسیم کا اور بعدازان فرض کرین کہ $\text{لا} = 1$ اسصورت عمل سے یہہ ہوسیگے چونکہ

$$\frac{\text{ط}\,\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ط}}{\text{لا} - 1} = \frac{\text{ط}\,(\text{لا}^{\text{ن}} - 1)}{\text{لا} - 1}$$ تو

$$\begin{array}{l} (\text{لا} - 1)\ \overline{)\ \text{لا}^{\text{ن}} - 1\ }\ (\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{لا}^{\text{ن}-2} + \text{لا}^{\text{ن}-3} + \text{لا}^{\text{ن}-4} + \text{وغیره} \\ \quad \text{لا}^{\text{ن}} - \text{لا}^{\text{ن}-1} \\ \hline \quad \text{لا}^{\text{ن}-1} - 1 \\ \quad \text{لا}^{\text{ن}-1} - \text{لا}^{\text{ن}-2} \\ \hline \quad + \text{لا}^{\text{ن}-2} - 1 \\ \quad \text{لا}^{\text{ن}-2} - \text{لا}^{\text{ن}-3} \\ \hline \quad + \text{لا}^{\text{ن}-3} - 1 \end{array}$$

پس معلوم ہوا کہ $\frac{\text{ط}\,(\text{لا}^{\text{ن}} - 1)}{\text{لا} - 1} = \text{ط}\,(\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{لا}^{\text{ن}-2} + \text{لا}^{\text{ن}-3} + \text{لا}^{\text{ن}-4} + \text{وغیره})$ اور جسوقت $\text{لا} = 1$ اوسوقت $\frac{0}{0} = \text{ط}\,\text{ن}$ اور یہی ہی قیمت مطلوبہ یہی قیمت حاصل ہوتی اگر عمل کرتے ہم موافق قاعده مذکور الصدر کے یعنی فرض کرتے ہم اول $\text{ط} + \text{د} = \text{لا}$ کے اور بعدازان یہہ فرض کرتے کہ $\text{د} = 0$

واضح ہو کہ جبکہ کسر کا شمارکنندہ و اور نسب نما کسی خاص قیمت مثلاً ط کے فرض کرنے سے علیحدہ علیحدہ مساوی صفر کی ہو جاوے تو بالضرور اوس کسر کی شمارکنندہ اور نسب نما میں کوئی جزضربی مثلاً $(\text{لا} - \text{ط})$ یا $(\text{لا} - \text{ط})^{\text{م}}$ شامل ہوتا ہی جس سے وہ کسر $\frac{0}{0}$ ہو جاتی ہی پس اب ظاہر ہی کہ اگر یہہ جزضربی زائل ہو جاوے تو اصلی قیمت کسر مفروض کی دریافت ہو سکتی ہی مثلاً اول مثال اسطرح حل ہو سکتی ہی

$$\frac{\text{ط}^2 - \text{لا}^2}{\text{ط} - \text{لا}} = \frac{(\text{ط} + \text{لا})(\text{ط} - \text{لا})}{\text{ط} - \text{لا}} = \text{ط} + \text{لا} = 2\,\text{ط}$$ اگر فرض کریں ہم $\text{لا} = \text{ط}$

۲ کیا قیمت ہی اس کسر کی $\frac{1 - 3\,\text{لا}^2 + 2\,\text{لا}^3}{(1 - \text{لا})^2}$ جبوقت $\text{لا} = 1$

ظاہر ہی کہ $$\frac{1 - 3\,\text{لا}^2 + 2\,\text{لا}^3}{(1-\text{لا})^2} = \frac{1 - \text{لا}^2 - 2\,\text{لا}^2(1-\text{لا})}{(1-\text{لا})^2} = \frac{1 + \text{لا} - 2\,\text{لا}^2}{1 - \text{لا}} = \frac{1 - \text{لا}^2 + \text{لا}(1-\text{لا})}{1 - \text{لا}}$$

$= 1 + \text{لا} + \text{لا} = 3$ جبوقت $\text{لا} = 1$

۳ کیا ہی قیمت اس کسر کی $\frac{\sqrt{\text{لا} - \text{ط}} + \sqrt{2\,\text{ط}\,\text{لا} - 2\,\text{ط}^2}}{\sqrt{\text{لا}^2 - \text{ط}^2}}$ جبکہ $\text{لا} = \text{ط}$ ظاہر ہی کہ

$$\frac{\sqrt{\text{لا} - \text{ط}} + \sqrt{2\,\text{ط}\,\text{لا} - 2\,\text{ط}^2}}{\sqrt{\text{لا}^2 - \text{ط}^2}} = \frac{\sqrt{\text{لا} - \text{ط}} + \sqrt{2\,\text{ط}}\sqrt{\text{لا} - \text{ط}}}{\sqrt{\text{لا} - \text{ط}}\sqrt{\text{لا} + \text{ط}}} = \frac{\sqrt{\text{لا} - \text{ط}} + \sqrt{2\,\text{ط}}}{\sqrt{\text{لا} + \text{ط}}} = \frac{\sqrt{2\,\text{ط}}}{\sqrt{2\,\text{ط}}} = 1$$ جبکہ $\text{لا} = \text{ط}$

۴ کیا ہی قیمت اس کسر کی $\frac{(\text{لا} + \text{د})^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}} - \text{لا}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}}{\text{د}}$ جبوقت کہ $\text{د} = 0$ ظاہر ہی کہ

$$\frac{(\text{لا}+\text{د})^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}} - \text{لا}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}}{\text{د}} = \frac{(\text{لا}+\text{د})^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}} - \text{لا}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}}{(\text{لا}+\text{د}) - \text{لا}} = (\text{لا}+\text{د})^{\frac{\text{م}}{\text{ن}} - 1} \times \frac{1 - \left(\frac{\text{لا}}{\text{لا}+\text{د}}\right)^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}}{1 - \frac{\text{لا}}{\text{لا}+\text{د}}} = (\text{لا}+\text{د})^{\frac{\text{م}}{\text{ن}} - 1} \times \frac{1 - \text{ع}^{\text{م}}}{1 - \text{ع}^{\text{ن}}}$$ اگر فرض کیا جاوے

$\left(\frac{\text{لا}}{\text{لا}+\text{د}}\right)^{\frac{1}{\text{ن}}} = \text{ع}$ اور اسی واسطے $$(\text{لا}+\text{د})^{\frac{\text{م}}{\text{ن}} - 1}\,\frac{1 - \text{ع}^{\text{م}}}{1 - \text{ع}^{\text{ن}}} = (\text{لا}+\text{د})^{\frac{\text{م}}{\text{ن}} - 1}\,\frac{1 - \text{ع}^{\text{م}} \div 1 - \text{ع}}{1 - \text{ع}^{\text{ن}} \div 1 - \text{ع}}$$

$$= (\text{لا}+\text{د})^{\frac{\text{م}}{\text{ن}} - 1} \times \frac{1 + \text{ع} + \text{ع}^2 + \text{ع}^3 + \cdots \text{ع}^{\text{م}-1}}{1 + \text{ع} + \text{ع}^2 + \text{ع}^3 \cdots \text{ع}^{\text{ن}-1}} = \text{لا}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}} - 1} \times \frac{1+1+1+1 \cdots \text{م جزوں تک}}{1+1+1 \cdots \text{ن جزوں تک}}$$ اگر $\text{ع} = 1$

$$= \frac{\text{م}}{\text{ن}}\,\text{لا}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}} - 1}$$

فصل چودہوین مقادیر جبریہ کی عجیب نتیجون کے بیان مین

مقادیر جبریہ سی بعض اوقات ایسی نتیجہ نکلتی ہین جو بادی النظر مین نہایت عجیب بلکہ غلط معلوم ہوتی ہین حالانکہ تامل کرنی سیے اونکی حقیقت دریافت ہوتی ہی اور پہر تعجب رفع ہوجاتا ہی اور یہہ نتیجہ بعضی اوقات غلط فرضون سیے بہی لازم آتے ہین تفصیل اسکی یہہ ہی کہ مثلاً $\frac{\text{ط}}{\text{ٹ}}$ = لانہایت ایک عجیب بات معلوم ہوتی ہی اسواسطی کہ اول یہہ خیال ہوتا ہی کہ صفر کوئی مقدار ہین ہی اوسسیے تقسیم ہونی سی ہر مقدار بحال خود رہی لیکن یہہ خیال غلط ہی اور دلیل اس بات کی کہ $\frac{\text{ط}}{\text{ٹ}} = \infty$ یہہ ہی کہ اگر ایک مقدار کو دوسری پر تقسیم کرین توکچہہ خارج قسمت ہوگا اب اگر پہلی مقدار کو ایسی مقدار پر تقسیم کرین جو دوسری سیے کم ہو تو نہایت ظاہر ہی کہ اس صورت مین خارج قسمت پہلی سیے زیادہ ہوگا اور علی ہذالقیاس مقسوم علیہ کو جتنا کم فرض کرینگی اوسیقدر خارج قسمت زیادہ ہوگا پس اگر مقسوم علیہ اتنا کم ہو کہ صفر ہوجاوے تو خارج قسمت نہایت زیادہ لانہایت ہوگا

٢ ظاہر ہی کہ اگر ایک مقدار کو دوسری پر تقسیم کرین اور کچہہ باقی نرہی تواس صورت مین خارج قسمت کامل ہوگا پس اگر ایک مقدار کو دوسری پر تقسیم کرین اور تقسیم پوری نہو اور پہر خارج قسمت کو کامل خارج قسمت تصور کرین اور اسسیے کوئی بات محال لازم آجاوی تو تعجب ہنین اسواسطی کہ غلطی سیے یہہ محال لازم آتا ہی مثلا

$\frac{1}{1-\text{لا}} = 1 + \text{لا} + \text{لا}^2 + \text{لا}^3 +$ وغیرہ اب اگر اس صورت مین لا = ٢ تو $\frac{1}{1-2} = -1 = 1 + 2 + 4 + 8$ وغیرہ

$\therefore\ 0 = 4 + 4 + 8 +$ وغیرہ اور یہہ صریحاً محال ہی پس یہان جاننا چاہیئے کہ یہہ محال ہی اسواسطی لازم آیا کہ خارج قسمت $1 + \text{لا} + \text{لا}^2 + \text{لا}^3 +$ وغیرہ کو کامل خارج قسمت فرض کرلیا حالانکہ کامل خارج قسمت یہہ نہین ہی بلکہ $\frac{1}{1-\text{لا}} = 1 + \text{لا} + \text{لا}^2 + \text{لا}^3 + \ldots\ldots \text{لا}^{\text{م}-1} + \frac{\text{لا}^{\text{م}}}{1-\text{لا}}$ .... (١) ہی

اب اگر لا = ٢ تو $\frac{1}{1-2} = -1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 \ldots + 2^{\text{م}-1} - 2^{\text{م}} = (2^{\text{م}} - 1) - 2^{\text{م}} = -1$

اور اسیطرح سیے جو قیمت لا کی خارج قسمت کامل (١) مین لکہی جاویگی کوئی خرابی لازم نہ آویگی

اگر سلسلہ بالا مین لا کی علامت تبدیل کیجاوے تو ظاہر ہی کہ $\frac{1}{1+\text{لا}} = 1 - \text{لا} + \text{لا}^2 - \text{لا}^3 +$ وغیرہ

اب اگر لا = ١ تو $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1$ وغیرہ = ٠ یا ١ اور یہہ محال ہی اب اگر خارج قسمت کامل لین یعنی $\frac{1}{1+\text{لا}} = 1 - \text{لا} + \text{لا}^2 - \text{لا}^3 + \ldots (-\text{لا})^{\text{م}} + \frac{(-\text{لا})^{\text{م}+1}}{1+\text{لا}}$ اور اسمین فرض کرین لا = ١

تو $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 \ldots\ldots \pm \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

۳ ۰^۰ = ۱ یعنے صفر کی قوت صفر کہین تو حاصل صعود ۱ ہوتا ہی دلیل اسکی یہہ ہی کہ ضابطہ نیوٹن صاحب کے ثبوت سی پہلی ثابت ہوا ہی کہ اُ = ۱ اور ا عام مقدار ہی جو چاہین سو فرض کرین پس اگر ا = ط − لا تو (ط − لا)^۰ = ۱ اب فرض کرو کہ ط = لا ∴ ۰^۰ = ۱

۴ جاننا چاہیئے کہ صفر یعنے ۰ کوئی خاص مقدار نہین ہے یعنے جسطرح ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۵ یا ط وغیرہ خاص مقدار ہین صفر کوئی خاص مقدار نہین اور اسی سبب سے قیمت اس کسر ۰/۰ کی کوئی خاص مقدار نہین ہوتی ہے صفر کو خاص مقدار خیال کرنے سے بڑی غلطیان لازم آتی ہین مثلاً ۲^۰ = ۱ اور ۴^۰ = ۱ ∴ ۲^۰ = ۴^۰ جو محال ہے اور یہہ غلطی سوا اسکے کہ ۲^۰ = ۴^۰ ط^۰ = لا^۰ پر قیاس کیا ہی اور یہہ قیاس غلط ہی کیونکہ ط ایک خاص مقدار ہی اوسکی قیمت ہرگز نہین بدل سکتی اور صفر کی قیمت بدل سکتی ہی مثلاً ۲^۰ = ۲^{۱−۱} اور ۲^۰ = ۲^{۲−۲} اور علی ہذالقیاس اسیطرح سے اور غلطیان لازم آتی ہین مثلاً لا = ۱ ∴ لا − ۱ = ۰ ∴ لا (لا − ۱) = ۰ (۱)

اور چونکہ لا = ۱ ∴ لا^۲ = ۱ ∴ لا^۲ − ۱ = ۰ ∴ (لا + ۱)(لا − ۱) = ۰ (۲) بوسیلہ (۱) و (۲) کے (لا + ۱)(لا − ۱) = لا (لا − ۱) ∴ لا + ۱ = لا ∴ ۱ = ۰ اور یہہ محال ہی

اور اسیطرح ط × ۰ = ۰ اور ص × ۰ = ۰ ∴ ط × ۰ = ص × ۰ ∴ ط = ص اور یہہ محال ہے

فصل پندرہوین کسور متسلسل کی بیان مین

کسر متسلسل اوس کسر کو کہتے ہین کہ جسکی نسب نما مین سوا عدد صحیح کی ایک کسر بہی ہوتی ہی اور اس کسر کے نسب نما مین بہی سوای عدد صحیح کی ایک کسر ہوتی ہی اور اسیطرح سی اس تیسری کسر کے نسب نما مین بہی سوای عدد صحیح کے ایک اور کسر ہوتی ہی اور علی ہذالقیاس مثلاً کسر

۱
۱ + ۱
۲ + ۱
۳ + ۱
۴ + ۱
۵ + وغیرہ

ایک کسر متسلسل ہی

اگر تبدیل کیا چاہین کسی کسر محدود کو ایسی کسر سے تو طریقہ واسطی حاصل ہونے اس مطلب کے یہہ ہی تقسیم کرو شمار کنندہ کسر مفروض کو اوسکی نسب نما پر اور اگر کوئی عدد صحیح نکلے اوسے ایک جا ثبت کرو اور بعد ازان باقیات کو مقسوم علیہ قرار دیکر تقسیم کرو اوسپر مقسوم علیہ سابق کو اور بعد ازان جو کچہہ باقی رہی اوسے مقسوم علیہ مقرر کرو اور اس سے پہلے مقسوم علیہ کو مقسوم اور عمل قسمت کا جاری کرو اور یہی عمل کیئے جاو جہانتک وہ تمام ہو اور اگر تمام نہو

تو جہان تک چاہو وہان تک اس عمل کو جاری رکھو پس اب ہم کہتی ہین کہ متواتر کی خارج قسمت جو اس متواتر کی تقسیم سے حاصل ہوتی ہین ہونگی اعداد صحیح متواتر کی نسب نمایون کسر مطلوبہ کی واسطی ثبوت اس دعوی کے لازم ہی کہ کرین ہم عمل مذکور الصدر کو کہ اوسکی صورت مثال ائندہ مین مندرج ہی جیسا چاہیئے ہین تبدیل کرنا کسر $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ کو ایک کسر متسلسل سے

ب) ا (ط   اس عمل سے ظاہر ہی کہ حاصل ہونگی یے مساواتین

ب ط

ج) ب (ص

ص ج $\text{ا} = \text{ب ط} + \text{ج}$

د) ج (ع $\text{ب} = \text{ج ص} + \text{د}$

د ع $\text{ج} = \text{د ع} + \text{ر}$

ر) د (ق   وغیرہ = وغیرہ

ر ق

س وغیرہ   اور سیواسطی ہوتی ہی یہہ مساوات

$$\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \text{ط} + \frac{\text{ج}}{\text{ب}}$$

$$= \text{ط} + \frac{\text{ج}}{\text{ج ص} + \text{د}} = \text{ط} + \cfrac{1}{\text{ص} + \cfrac{\text{د}}{\text{ج}}}$$

$$= \text{ط} + \cfrac{1}{\text{ص} + \cfrac{\text{د}}{\text{د ع} + \text{ر}}}$$

$$= \text{ط} + \cfrac{1}{\text{ص} + \cfrac{1}{\text{ع} + \cfrac{\text{ر}}{\text{د}}}} \quad \text{وغیرہ}$$

اور یہی ہی کسر متسلسل مطلوبہ

مرقومہ بالا سی یہہ بات ظاہر ہی کہ بوسیلہ کسور متسلسل کے ہم کسی ایسی کسر کو کہ اوسکا شمار کنندہ اور نسب نما بڑی بڑی عدد ہون ایک ایسی کسر سے تبدیل کر سکتے ہین جو کسر مفروض سی تہوڑا ہی سا فرق رکھتی ہو اور جسکا نسب نما اور شمار کنندہ چہوٹی چہوٹی عدد ہون اور یہہ بہی ظاہر ہی کہ جتنا زیادہ دور تک عمل تقسیم کا جاری کرو گی اوتنا ہی زیادہ درست قیمت کسر مفروض کی حاصل ہوگی اور سوای اسکی یہہ بہی عیان ہی کہ جو قیمتین متواتر حاصل ہونگی

ویے ایکبار زیاده اور دوسری بار کم قیمت حقیقی سیے هونگی اسیطرح سی $\frac{1}{ب}$ زیاده هی به نسبت طا کے
لیکن کم هی به نسبت ط + $\frac{1}{ص}$ کے اس قسم کی کسور اکثر حسابون ریاضیات مین بهت مفید هوتی هین اور یهه
بات انکی هی ذریعه سی حاصل هوتی هی که بڑی کسور کو ایک چهوٹی کسر سے بدل لیتے هین اور قیمت مین کچهه بهت
فرق نهین آتا هی مثلا اگر چاهین دریافت کرنی ایک چهوٹی سی کسر جو تعبیر کری نسبت قطر ایک دایره کی طرف
اسکی محیط کی هم جانتے هین که اگر هووی قطر کسی دائره کا ١٠٠٠٠٠ تو هوویگا محیط اس دایره کا
٣١٤١٥٩ پس نسبت درمیان اس قطر اور محیط کی یهه هی $\frac{٣١٤١٥٩}{١٠٠٠٠٠}$ ظاهر هی که یهه ایک بڑی کسر هی اور
هم ایک چهوٹی کسر دریافت کیا چاهتے هین ترکیب اسکی دریافت کرنی کی موافق قاعده مرقوم الصدر کے

٣) ٣١٤١٥٩ (١٠٠٠٠٠
٣٠٠٠٠٠
(١٤١٥٩
١٠٠٠٠٠ (٧
٩٩١١٣
١٥) ١٤١٥٩ (٨٨٧
٨٨٧
٥٢٨٩
٤٤٣٥
١) ٨٨٧ (٨٥٤
٨٥٤
٢) ٨٥٤ (٣٣
٦٦
١٩٤
وغیره

اسجای ظاهر هی که ط = ٣ اور ص = ٧ اور ع = ١٥ اور علی هذا القیاس پس حاصل هوگی یهه
مساوات

$$\frac{314159}{100000} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \text{وغیره}}}$$

اس صورت مین ظاهر هی که اول تقریبی قیمت کسر مفروض کی $\frac{٣}{١}$ هی که یهه بهت کم هی اور دوسری قیمت تقریبی
٣ + $\frac{1}{7}$ یعنی $\frac{22}{7}$ که ذرا زیاده به نسبت قیمت حقیقی کے هی اور تیسری تقریبی قیمت

یہہ $۳ + \cfrac{۱}{۷ + \cfrac{۱}{۱۵}} = ۳ + \frac{۱۵}{۱۰۶} = \frac{۳۳۳}{۱۰۶}$

اور یہہ ایک تقریبی قیمت کسر مفروض کی اوسکی بہت ہی قریب ہی اور تہوڑا ہی سا اوس سے کم ہی اب ہم لکہتے ہین چند مثالین جنمین سے لکہے گئی ہین عجیب سلسلی غیر متناہی

(۱) فرض کرو کہ $\cfrac{۱}{ق + \cfrac{۱}{ع + \cfrac{۱}{ق + \cfrac{۱}{ع + \text{وغیرہ لا انتہا}}}}} = لا$ تو ظاہر ہی کہ $\cfrac{۱}{ق + \cfrac{۱}{ع + لا}} = لا$

اور اسیواسطی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $\frac{ع + لا}{ق ع + ق لا + ۱} = لا$ اور اسیواسطی یہہ مساوات حاصل ہوتی ہی $ع + لا = ق ع لا + ق لا^۲ + لا$ اور اسیواسطی $لا^۲ + ع لا - \frac{ع}{ق} = ۰$ اور جسوقت حل کرینگی ہم اس مساوات درجہ دویم کی کو تو حاصل ہوگی ہمین قیمت لا کی

(۲) فرض کرو کہ $لا = \sqrt{ط + \cfrac{ص}{\sqrt{ط + \cfrac{ص}{\sqrt{ط + \text{وغیرہ}}}}}}$ لا انتہا

اور جسوقت مجذور کرین ہم دونو طرف اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

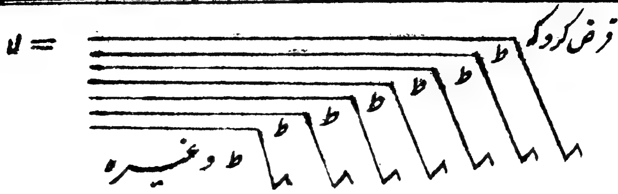
$لا^۲ = ط + \cfrac{ص}{\sqrt{ط + \cfrac{ص}{\sqrt{ط + \text{وغیرہ}}}}} = ط + \frac{ص}{لا}$ اور اسیواسطی

حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات تیسری درجہ کی $لا^۳ - ط لا - ص = ۰$ اور اسکی حل کرنی سی قیمت لا کی معلوم ہو سکتی ہی

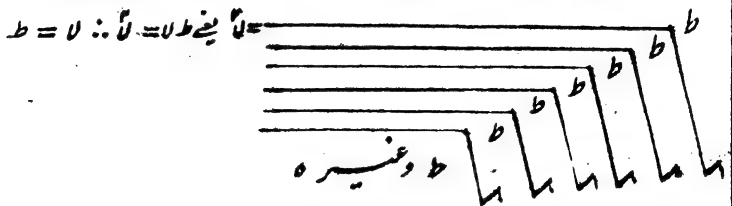
۳ چاہتے ہین دریافت کرنی قیمت اس عجیب سلسلہ کی

$\sqrt{ط + \sqrt{ط + \sqrt{ط + \sqrt{ط + \sqrt{ط + \sqrt{ط \text{ وغیرہ}}}}}}}$

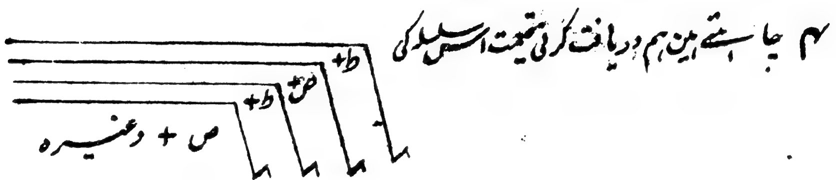
فرض کروکہ



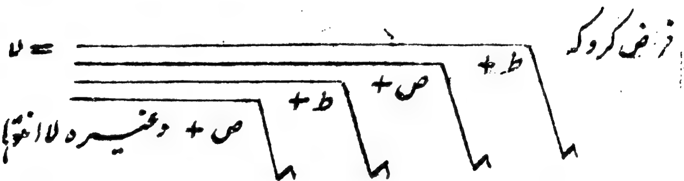
اور جسوقت مجذور کریں ہم دونوں طرفوں اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات



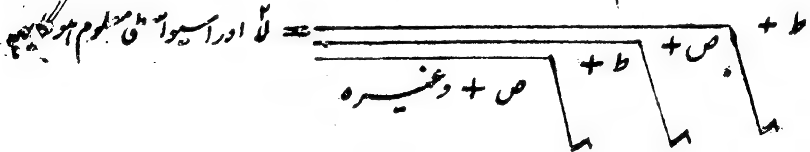
٤ چاہتے ہیں ہم دریافت کرنی قیمت اس سلسلہ کی

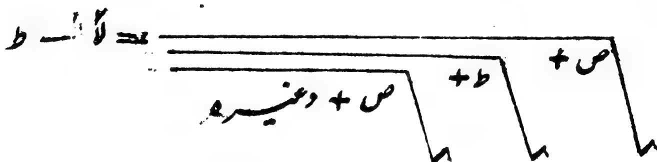


فرض کروکہ

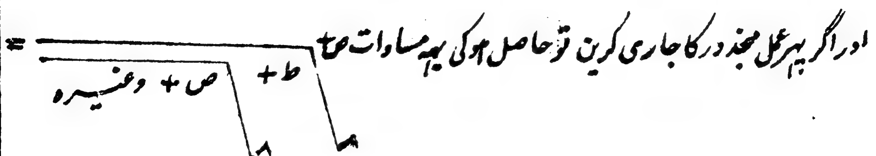


اور جسوقت مجذور کریں ہم دونوطرفوں اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات





اور اگر پھر عمل مجذور کا جاری کریں تو حاصل ہوگی یہہ مساوات



لا⁴ − ۲ لا³ ط + ط² لا² اور + ط
ص + وغیرہ
= لا⁴ − ۲ط لا³ + ط² لا² − ص = لا

یا لا⁴ − ۲ط لا³ − لا + ط² − ص = ۰ اور اس مساوات سے کہ ایک مساوات چوتھی درجہ کی ہے قیمت لا کی بذریعہ قاعدہ مہندس ببلی کے دریافت ہو سکتی ہے مثالین مرقوم الصدر بہت عجیب ہین اور یقین ہے کہ طالب علم اس فن کو انکی ملاحظہ اور حل کرنے مین بہت خوشی حاصل ہوگی

فصل سولہوین ثبوت مقسوم علیہ اعظم کے بیان مین

کسور مین یہہ بات بیان کی گئی ہے کہ اگر شمار کنندہ اور نسب نما کو ایک ہی عدد پر تقسیم کرین اور وہ عدد ایسا ہو کہ اوس پر شمار کنندہ اور نسب نما پوری پوری تقسیم ہو جاوین تو تقسیم کرنی سے کسر کا اختصار ہو جاتا ہی لیکن ایسا عدد جس پر شمار کنندہ اور نسب نما دونو پوری پوری تقسیم ہو جاوین بااکثر اوقات تامل سے بدشواری معلوم ہوتا ہی بلکہ بعضی دفعہ نہین معلوم ہوتا اسواسطی اوسکی دریافت کرنیکو یہہ قاعدہ مقرر کیا گیا ہی کہ نسب نما اور شمار کنندہ مین سے جو مقدار زیادہ ہو اوسکو مقسوم بناوین اور دوسرے مقدار کو مقسوم علیہ اور بعد تقسیم کے جو کچھہ بچے پہر اوسکو مقسوم علیہ بنا کر پہلی مقسوم علیہ کو مقسوم مقرر کرین اور جو کچھہ بعد تقسیم کے بچی پہر اوسکو مقسوم علیہ بناوین اور باقی اول کو مقسوم مقرر کرین و ہی عمل جاری رکھین یہانتک کہ باقی نہ بچے پس جس مقسوم علیہ پر تقسیم پوری ہو جاوے یعنے باقی کچھہ نہ بچے وہ مقسوم ایسا ہوگا کہ اوس پر شمار کنندہ اور نسب نما دونو پوری پوری تقسیم ہو جاینگے اور ان سب مقدارون مین جن پر شمار کنندہ اور نسب نما پوری پوری تقسیم ہو سکتی ہین یہی مقسوم علیہ بڑا ہوگا یعنے اخیر مقسوم علیہ مقسوم علیہ اعظم ہوتا ہی اب ظاہر ہی کہ اس قاعدہ مین دو باتین ثابت کرنی چاہئین ایک تو یہہ کہ اخیر مقسوم علیہ پر شمار کنندہ اور نسب نما دونو پوری پوری تقسیم ہو جاتے ہین اور دوسری یہہ کہ اخیر مقسوم علیہ اون سب مقدارون مین بڑا ہی جن پر شمار کنندہ اور نسب نما پوری پوری تقسیم ہو سکتی ہین پس ان دونو باتون کے اثبات کی واسطی ہم فرض کرتے ہین کہ آ اور ب دو مقدارین ہین اینمین سے ہر ایک شمار کنندہ اور نسب نما ہو سکتا ہی اور آ زیادہ ہی ب سے پس جس وقت آ کو ب پر تقسیم کیا تو خارج قسمت ف ہوا اور باقی س بچا اور پہر ب کو جو مقسوم علیہ تہا س پر تقسیم کیا تو خارج قسمت ق ہوا اور باقی د بچا اور پہر اس باقی یعنے س کو د پر تقسیم کیا تو خارج قسمت ح ہوا اور کچھہ باقی نرہا

```
ب ) ا ( ف
    ب ف
س ) ب ( ق
    س ق
د ) س ( ح
    ح د
    ×
```
(ط)

یعنے د پر تقسیم پوری ہو گئی اب ہم پہلے یہہ بات ثابت کر دیتے ہیں کہ د ا اور ب دونوں کا مقسوم علیہ مشترک ہی یعنے ا اور ب دونوں د پر پوری پوری تقسیم ہو سکتی ہیں عمل تقسیم سے جسکی سامنے نشان (ط) ہی ظاہر ہی کہ

ا = ب ف + س ..... (۱)
ب = س ق + د ..... (۲)
س = ح د ..... (۳)

مساوات (۲) اور (۳) سے ظاہر ہی کہ ب = س ق + د = ح ق د + د = (ح ق + ۱) د
∴ ب/د = ح ق + ۱ پس ثابت ہوا کہ ب مقسوم علیہ د پر پورا تقسیم ہوتا ہی اور تینوں مساواتوں سے ظاہر ہی کہ

ا = ب ف + س = ف (س ق + د) + س = ف (ح د ق + د) + ح د = (ف ح ق + ف + ح) د

∴ ا/د = ف ح ق + ف + ح اس سے ثابت ہوا کہ ا بھی د پر پورا تقسیم ہوتا ہی پس اول بات تو ثابت ہو گئی یعنے اخیر مقسوم علیہ د مقسوم علیہ مشترک ا اور ب کا ہی اب رہی دوسری بات پس ہم دعوی کرتے ہیں کہ د ہی مقسوم علیہ اعظم ا اور ب کا ہی اور اگر یہہ نہو تو فرض کرو کہ لا ہی مقسوم علیہ اعظم اور جب ا کو لا پر تقسیم کرتے ہیں تو خارج قسمت م ہوتا ہی اور جب ب کو لا پر تقسیم کرتی ہیں تو خارج قسمت ن ہوتا ہی اسیواسطے

ا = م لا اور ب = ن لا اور بوسیلہ عمل تقسیم (ط) کی س = ا − ب ف = م لا − ن لا ف = (م − ن ف) لا

اور د = ب − س ق = ن لا − ق (م − ن ف) لا = (ن − م ق + ق ن ف) لا

∴ د/لا = ن − م ق + ق ن ف اس سے معلوم ہوا کہ د جو مقسوم علیہ مشترک ہی لا پر پورا تقسیم ہوتا ہی پس ضرور ہی کہ لا سے د بڑا ہو اور جسطرح سے د کی لا سے عظیم تر ثابت ہوئی اسیطرح ہر مقسوم علیہ مشترک سے ثابت ہو سکتی ہی تو لازم آیا کہ د ہی مقسوم علیہ اعظم ہی — د کا مقسوم علیہ اعظم ہونا ایک اور طرح بھی ثابت ہوتا ہی لیکن اسطرح کے اثبات میں دو باتیں جاننی چاہئیں ایک تو یہہ کہ جب دو مقدار ایک اور مقدار پر پوری تقسیم ہو جاویں تو اون دونوں مقداروں کا مجموعہ اور حاصل تفریق بھی دوسری مقدار پر پورا تقسیم ہو جاویگا مثلاً ا اور ب ح پر پوری تقسیم ہوتی ہیں اور خارج قسمت انکا ط اور ن ہوتا ہی تو ظاہر ہی ا/ح = ط اور ب/ح = ن

∴ ا/ح ± ب/ح = ط ± ن یا (ا ± ب)/ح = ط ± ن اور دوسری یہہ کہ اگر ایک مقدار دوسری پر پوری تقسیم ہو جاوے تو پہلی مقدار کا دوگنا تگنا اور علی ہذا القیاس ط گنا بھی دوسری مقدار پر پورا تقسیم ہو سکتا ہی یعنے پہلی مقدار کا ضعف صحیح بھی دوسری مقدار پر پورا تقسیم ہو سکتا ہی مثلاً اگر

ب/ح = ط تو س ب/ح = س ط اب عمل تقسیم (ط) کو دیکھو تو ا − ب ف = س

اور ب − س ق = د اور یہاں سے معلوم ہوتا ہی کہ جس مقدار پر ا اور ب پوری تقسیم ہو سکتے ہیں اوسی مقدار پر ب ف اور ا − ب ف یعنے س بھی پورا تقسیم ہو سکتا ہی اور اسیواسطے اوسی مقدار پر

ب − س ق یعنے د بہی پورا تقسیم ہوسکتا ہی یعنے جس مقدار پر ا اور ب پورے تقسیم ہوسکتے ہین اوس
مقدار پر د بہی پورا تقسیم ہوسکتا ہی پس اس بیان سے لازم آیا کہ جتنی مقسوم علیہ مشترک ا اور ب کی ہین
اون سب سے د بڑا ہی کیونکہ اون سب پر پورا تقسیم ہوسکتا ہی اب د کی عظمت تو ثابت ہوئی لیکن یہہ بات
بہی ثابت ہوجاوے کہ ا اور ب دونو د پر پوری پوری تقسیم ہوجاتی ہین تو د کا مقسوم علیہ اعظم ہونا بخوبی
ثابت ہی اب مساوات (۴) سے ظاہر ہی کہ س د پر پورا تقسیم ہوتا ہی اور اسیواسطی س ق اور
س ق + د یعنے ب (بوسیلہ مساوات (۲) کے) بہی د پر پورا تقسیم ہوسکتا ہی اور اسی جہت سی
ب ف + س یعنے ا (بوسیلہ (۱) کے) بہی د پر پورا تقسیم ہوسکتا ہی یعنے ا اور ب دونو د پر پورے
پورے تقسیم ہوسکتی ہین پس معلوم ہوا کہ ا اور ب دونو د پر پورے تقسیم بہی ہوسکتی ہین اور جتنے
مقسوم علیہ مشترک ا اور ب کے فرض کئے جائین سب سے د بڑا ہی تو صاف ظاہر ہی کہ د مقسوم علیہ
اعظم ا اور ب کا ہی واضح ہو کہ مقسوم علیہ اعظم کی مثالون مین بعض اوقات تقسیم کا عمل جاری نہین ہوسکتا
پس ایسی صورتون مین یا تو کسی جز ضربی کو جو دونو مین مشترک نہین ہوتا ہی دور کردیتے ہین یا کسی مقدار کو ضرب
کردیتے ہین اور اس سے کچہہ خرابی نہین ہوتی اسواسطی کہ مقسوم علیہ اعظم دریافت کرنی سے یہہ غرض ہوتی ہی کہ شمارکنندہ
اور نسب نما کا مشترک جز ضربی دریافت ہوجاوے پس ظاہر ہی کہ اگر شمارکنندہ یا نسب نما کسی مقدار مین ضرب کرین تو
تو جز ضربی مذکور مشترک ہی رہیگا یا کسی ایسی مقدار پر جو دو مین مشترک نہو تقسیم کرین تو بہی جز مشترک کے جز
ضربی ہونی مین خلل نہ آویگا پس بعد اس عمل کے بہی جز ضربی مشترک یعنی مقسوم علیہ اعظم دریافت ہوسکتا ہی اور
یہہ بات مثالون سے بخوبی معلوم ہوجاویگی

مثال ۱ کیا ہی مقسوم علیہ اعظم ۹ لا^۳ + ۵۳ لا^۲ − ۹ لا − ۱۸ اور لا^۲ + ۱۱ لا + ۳۰ کا

لا^۲ + ۱۱ لا + ۳۰) ۹ لا^۳ + ۵۳ لا^۲ − ۹ لا − ۱۸ (۹ لا − ۴۶

۹ لا^۳ + ۹۹ لا^۲ + ۲۷۰ لا

− ۴۶ لا^۲ − ۲۷۹ لا − ۱۸

− ۴۶ لا^۲ − ۵۰۶ لا − ۱۳۸۰

۲۲۷ لا + ۱۳۶۲ = ۲۲۷ (لا + ۶)

چونکہ اس صورت مین ۲۲۷ مشترک ہی اسواسطی اسکو ترک کیا اور لا + ۶ کو مقسوم علیہ مقرر کرکے پہلی مقسوم علیہ کو مقسوم بنایا

لا + ٦) لا^2 + ١١ لا + ٣٠ (لا + ٥

پس معلوم ہوا کہ (لا + ٦) مقسوم علیہ اعظم مطلوب ہے

لا^2 + ٦ لا

٥ لا + ٣٠

٥ لا + ٣٠

×

٢ دریافت کرو مقسوم علیہ اعظم ٢ لا^3 + لا^2 − ٨ لا + ٥ اور ٧ لا^2 − ١٢ لا + ٥ کا

چونکہ اس مثال میں اول مقدار میں لا^3 کا سر ٢ ہی اور یہہ ٧ پر تقسیم نہیں ہو سکتا اسواسطے اول مقدار کو ٧ میں ضرب کیا تاکہ تقسیم ہو سکے

٢ لا^3 + لا^2 − ٨ لا + ٥

٧

٧ لا^2 − ١٢ لا + ٥) ١٤ لا^3 + ٧ لا^2 − ٥٦ لا + ٣٥ (٢ لا + ٤

١٤ لا^3 − ٢٤ لا^2 + ١٠ لا

٣١ لا^2 − ٦٦ لا + ٣٥

٢٨ لا^2 − ٤٨ لا + ٢٠

٣ لا^2 − ١٨ لا + ١٥ = ٣ (لا^2 − ٦ لا + ٥)

لا^2 − ٦ لا + ٥) ٧ لا^2 − ١٢ لا + ٥ (٧

٧ لا^2 − ٤٢ لا + ٣٥

٣٠ لا − ٣٠ = ٣٠ (لا − ١)

لا − ١) لا^2 − ٦ لا + ٥ (لا − ٥   پس معلوم ہوا کہ لا − ١ مقسوم علیہ اعظم مطلوب ہی

لا^2 − لا

− ٥ لا + ٥

− ٥ لا + ٥

×

٣ دریافت کرو مقسوم علیہ اعظم ٣٦ ط^6 − ١٨ ط^5 − ٢٧ ط^4 + ٩ ط^3 اور ٢٧ ط^4 ص^2 − ١٨ ط^3 ص^2 − ٩ ط^2 ص^2 کا

اس صورت میں ظاہر ہی کہ ٣٦ ط^6 − ١٨ ط^5 − ٢٧ ط^4 + ٩ ط^3 = ٩ ط^3 (٤ ط^3 − ٢ ط^2 − ٣ ط + ١)

اور ٢٧ ط^4 ص^2 − ١٨ ط^3 ص^2 − ٩ ط^2 ص^2 = ٩ ط^2 ص^2 (٣ ط^2 − ٢ ط − ١) یہاں سے معلوم ہوا کہ ٩ ط^2 دونو میں

مشترک ہی یعنے مقسوم علیہ اعظم کا جزو ضربی ہی اور ص فقط دوسری ہی مقدار مین مشترک ہی اسیواسطی بعد دور کرنے

اجزای مشترک کے اول مقدار کو ۳ مین ضرب کرکے مقسوم مقرر کیا

$$۴ط^{۳} - ۲ط^{۲} - ۳ط + ۱$$

$$۳$$

$$۳ط^{۲} - ۲ط - ۱ \;)\; ۱۲ط^{۳} - ۶ط^{۲} - ۹ط + ۳ \;(\; ۴ط$$

$$۱۲ط^{۳} - ۸ط^{۲} - ۴ط$$

$$۲ط^{۲} - ۵ط + ۳ = ۲ط(ط-۱) - ۳(ط-۱)$$

$$= (۲ط - ۳)(ط - ۱)$$

یہہ بات باسانی معلوم ہوسکتی ہی کہ ۲ط − ۳ مشترک جزو ضربی مقادیر مفروضہ کا نہین ہی پس اسیواسطی اسکے دور کرنی سے کچھہ خرابی نہین ہوسکتی

$$ط - ۱ \;)\; ۳ط^{۲} - ۲ط - ۱ \;(\; ۳ط + ۱$$

$$۳ط^{۲} - ۳ط$$

$$ط - ۱$$

$$ط - ۱$$

$$\times$$

پس معلوم ہوا کہ مقسوم علیہ اعظم مقادیر

$۴ط^{۳} - ۲ط^{۲} - ۳ط + ۱$ اور $۳ط^{۲} - ۲ط - ۱$ کا $ط - ۱$ ہی اور اسیواسطے مقسوم علیہ اعظم مطلوب $۶ط^{۳}(ط-۱)$ ہی

فصل سترہوین سود اور تنخواہون کے بیان مین

۱ فرض کرو س = سود ایک روپیہ کی ایک سال یا مہینے مین اور ا = اصل آ = مجموعہ سود اور اصل کا = م اور ن = تعداد مہینون یا برسون کے اب ظاہر ہی کہ چونکہ سود ایک روپیہ پر زیادہ ہوتا ہی جیسا کہ عرصہ زیادہ ہوتا ہی تو معلوم ہوا کہ ۱ سال : ن سال :: س : ن س جو سود ہی ایک روپیہ کا واسطے ن سالون کے اور اگر ا کتنے روپیہ ہوان تو سود ا ن س ہوگا اور جسوقت زیادہ کرین اسپر اصل تو حاصل ہوگی یہہ مساوات م = ا + ا ن س اور ظاہر ہی کہ بوسیلہ اس مساوات کی جسوقت کہ معلوم ہون تین مقدارین چار مقدارون م اور ا اور ن اور س مین سے تو باقی ایک مقدار معلوم ہوسکتی ہی مثلاً اگر ا مجہول ہو اور باقی معلوم تو ا معلوم ہوسکتا ہی اس مساوات سے $ا = \frac{م}{۱ + ن س}$ سوال کتنا روپیہ ہمین بطور اصل کے کسی ساہوکار کو سونپنا چاہئے تاکہ ۵ روپیہ سینکڑہ سالیانہ کی سود سے ۹ مہینے مین ہمین ۶۰۰ روپیہ حاصل ہون یہان ظاہر ہی کہ م = ۶۰۰ اور ن = $\frac{۳}{۴}$ = ۷۵ . اور س = $\frac{۵}{۱۰۰}$ = ۰۵ . اور

∴ ا = م ÷ (۱ + ن س) = ۶۰۰ ÷ (۱ + ۱ء۷۵ × ۰ء۰۵) = ۲۱۲ء۸۸۴

۲ ایک ساہوکار کو ہمنی کچھ روپیہ دیا اس شرط پر کہ ہمین مدت مقررہ تک ہرسال یا ہر مہینے کچھ روپیہ بطور تنخواہ سے کے دیا کریے اور فرض کرو کہ ن کتنے سال تک ہم یہہ تنخواہ ساہوکار سی نہ لین اور اوسپر سود لگتا جاوے تو بتاؤ کہ بعد ن برس کے اگر ہم ساہوکار سے سب تنخواہ ن سال کی مانگین تو اوسی ہمین کتنا روپیہ دینا چاہئیے فرض کرو کہ ا تعبیر کرتا ہی ایک برس کی تنخواہ کو تو ظاہر ہی کہ سود اس تنخواہ کا بعد دو سال کے س ا ہوجائیگا (موافق فقرہ آ کے) لیکن بعد اختتام دو سال کے اصل ۲ ا ہوجائیگا تو بعد گذرنے تیسری سال کے سود ۲ س ا ہوگا اور اسیطرح سے بعد چوتھی برس کے سود ۳ س ا ہوگا اور علی ہذالقیاس پس کل سود بعد گذرنے ن سال کے یہہ ہوگا

س ا + ۲ س ا + ۳ س ا + ۴ س ا ۰۰۰۰ + (ن − ۱) س ا = ن (ن − ۱)/۲ س ا

لیکن مجموعہ تمام تنخواہوں کا سوای سود کے یہہ ن ا ہوگا ∴ مجموعہ معہ سود کے یہہ ہوگا

م = ن ا + ن (ن − ۱)/۲ س ا

۳ فرض کرو کہ قبل از تمام ہونے میعاد مقررہ کی جسکی واسطی ساہوکار سی یہہ اقرار تھا کہ وہ ہمین تنخواہ دیا کریگا مابین ہمارے اور ساہوکار کی کچھہ نا اتفاقی ہوگئی اور ساہوکار مذکور ہمارا روپیہ ہمین واپس کیا چاہتا ہی لیکن چونکہ اوس سے اقرار ہوچکا ہی تو لازم ہی کہ وہ ہمین اتنا روپیہ دیوے جتنا وہ ہمین دیتا بعد انقضای وقت مذکور کے اب بناؤ اوس حال مین کتنا روپیہ لینا چاہئیے تاکہ اوس وقت تک اوسپر سود لگکر ہمین اوتنا ہی روپیہ حاصل ہوجاوے فرض کرو کہ روپیہ مطلوبہ = ع پس بعد ن کتنے سال کے روپیہ ع معہ اوسکی سود کی مساوی ہوگا ع + ن س ع (موافق فقرہ ۱) کے اور چونکہ یہہ مجموعہ مساوی ہونا چاہئیے اوس مجموعہ کی جو ساہوکار ہمین گذرنے ن کتنے سال کے دیتا اگر مابین ہمارے اور اوسکی رنج نہ واقع ہوتا تو معلوم ہوا کہ

ع + ن س ع = ن ا + ن (ن − ۱)/۲ س ا

اور ∴ ع = [ن ا + ن (ن − ۱)/۲ س ا] ÷ (۱ + ن س)

۴ چاہئیے ہمین دریافت کرنا مجموعہ اصل اور سود کسی خاص رقم روپیہ کا اس شرط پر کہ سود در سود دیا گیا فرض کرو کہ ص تعبیر کرتا ہی حاصل جمع ایک روپیہ اور اوسکے ایک سال کی سود کو تو ظاہر ہی کہ بعد گذرنے اول سال کے ص ہوجائیگا اصل اور

∴ ۱ : ص : : ص : ص^2 جو مجموعہ دو سال کا ہوگا

۱ : ص : : ص^2 : ص^3 جو مجموعہ تین سال کا ہوگا اور اسیطرح سی

۱ ص : : ص$^{ن-1}$: ص^ن جو مجموعہ ن سال کا ہوگا

اور اگر ۱ ہو وہی اصل تو ظاہر ہی کہ مجموعہ آ کتنا ضعف مجموعہ گذشتہ کا ہوگا یعنے م = ۱ ص^ن

۵ مرقومہ بالا سے ظاہر ہی کہ ۱ = $\frac{م}{ص^ن}$ مثال کتنا روپیہ ہمین ساہوکار کو دینا چاہیئے تاکہ بعد تین سال کی ہمین ۶۰۰ روپیہ حاصل ہون موافق نرخ ۵ روپیہ سینکڑہ سود فی سال کے اور بحساب سود درسود کی اسس صورت مین ظاہر ہی کہ ص = ۱،۰۵ اور ن = ۳

اور م = ۶۰۰ تو ۱ = $\frac{۶۰۰}{(۱،۰۵)^3}$ = ۵۱۸،۳۰۲ روپیہ

۶ مرقومہ بالا سے ظاہر ہی کہ اگر ۱ اور ص اور م معلوم ہون اور ن مطلوب تو لکھنا چاہیئے ہمین لوگ ۱ + ن × لوگ ص = لوگ م

$$∴ ن = \frac{لوگ\ م - لوگ\ ۱}{لوگ\ ص}$$

۷ اگر سب باتین وہی فرض کرین جیسکہ فقرہ (۳) مین الا یہہ کہ سود پر سود لگایا جاوے تو بتاؤ ساہوکار کو ہمین کتنا روپیہ بعد ن سال کے دینا چاہیئے فرض کرو کہ ۱ تعبیر کرتا ہی ایک سال کی تنخواہ کو اور اسیواسطے بعد دوسرے سال کی تنخواہ دو سال کے مع سود کی یہہ ہوگی ۱ + ص ۱ اور بعد تین سال کے مجموعہ تنخواہ کو جسکو ہم م سے تعبیر کرتے ہین مساوی ہوگا (۱ + ص + ص^2 .... ص$^{ن-1}$) ۱ کے یعنے موافق قاعدہ سلسلہ ضرب کی م = $\frac{ص^ن - 1}{ص - 1}$ × ۱ اور یہان ظاہر ہی کہ اسس مساوات مین سے اگر تین مقدارین معلوم ہون تو چوتھی معلوم ہوسکتی ہی

۸ اگر سب باتین وہی فرض کرین جیسکہ فقرہ (۳) مین الا یہہ کہ سود پر سود لگایا جاوے تو بتاؤ ساہوکار سے ہمین کتنا روپیہ لینا چاہیئے اس صورت مین ظاہر ہی کہ اگر تعبیر کرین مجہول مطلوبہ کو ح سی تو حاصل ہونگے مساوات

$$ح\ ص^ن = \frac{ص^ن - 1}{ص - 1} × ۱ \ \text{یا}\ ح = \frac{1 - \frac{1}{ص^ن}}{ص - 1} × ۱$$

اگر تعداد برسون کی لانہایت ہو یعنے اگر ن = ایک مقدار لانہایت کی تو ظاہر ہی

$$\frac{1}{ص^ن} = ۰ \ \text{اور}\ ∴ ح = \frac{1}{ص - 1}$$

مثال ایک خاص زمین ہی اور اوسکا خراج ایک روپیہ سالیانہ ہی بتاؤ اوسکی کیا قیمت ہی اگر فرض کرین ہم کہ سود بر سود لگایا جاوے اور اسکا نرخ ۵ روپیہ سینکڑہ سالیانہ ہو اس صورت مین ظاہر ہی کہ آ = ۱ اور ص − ۱ = ۰۵. اور ∴ ح = $\frac{۱}{۰۵.}$ = ۲۰

فصل اٹھارہوین دریافت کرنی زیادتی آبادی کسی ملک کے جسوقت کہ معلوم ہو تعداد مرنی اور پیدایش کے

۱ فرض کرو کہ آ تعبیر کرتا ہی آبادی کسی خاص ملک کو بیچ کسی وقت مفروض کے اور م تعبیر کرتا ہی اوس حصہ آبادی کو جو ایک سال مین مرجاتا ہی اور $\frac{۱}{ط}$ اوس حصہ کو جو پیدا ہوتا ہی اب ظاہر ہی کہ اندازہ زیادتی آبادی کا = $\frac{۱}{ط} - \frac{۱}{م} = \frac{م-ط}{ط م}$ کے ہوگا اور ∴ ۱ : ۱ + $\frac{م-ط}{م ط}$ :: آ : آ $(۱+\frac{م-ط}{م ط})$ = آبادی کے بعد اول سال کے اور چونکہ آبادی ہر سال اسی اندازہ سے زیادہ ہوتی ہی تو

۱ : ۱ + $\frac{م-ط}{م ط}$ :: آ $(۱+\frac{م-ط}{م ط})$: آ $(۱+\frac{م-ط}{م ط})^{۲}$ = آبادی بعد دو سال کے اور ∴ آبادی بعد ن سال کے یہہ آ $(۱+\frac{م-ط}{م ط})^{ن}$ ہوگی تعبیر کرین مجموعہ کو ساتھ ح کے تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ح = آ $(۱+\frac{م-ط}{م ط})^{ن}$ اور اس مساوات سی حاصل ہوتا ہی یہہ

لوگ ح = لوگ آ + لوگ $(۱+\frac{م-ط}{م ط})$ × ن اور اس مساوات سی حاصل ہوتی ہین یہہ مساواتین

لوگ آ = لوگ ح − ن × لوگ $(۱+\frac{م-ط}{م ط})$

$$ن = \frac{لوگ\ ح - لوگ\ آ}{لوگ\ (۱+\frac{م-ط}{م ط})}$$ اور

لوگ $(۱+\frac{م-ط}{م ط}) = \frac{لوگ\ ح - لوگ\ آ}{ن}$ ظاہر ہی کہ اگر مقدار ن ح اور آ اور م اور ط اون مین سے کوئی سی چار مقدارین معلوم ہون تو پانچوین معلوم ہو سکتی ہی مثال فرض کرو کہ آبادی انگلستان کی سنہ ۱۸۰۰ عیسوی مین ایک کرور ہی اور $\frac{۱}{۴۰}$ حصہ آبادی کا ہر سال مرجاتا ہی اور نسبت پیدایش کی طرف مرنے کی ہی جو ۴۳ سے کی ہی طرف ۳۰ سے کے اور یہہ بھی فرض کرو کہ اس صدی مین کوئی شخص رعایا انگلستان مین سے اور ملکون مین بسنے نہین جاتا ہی تو بتاؤ سنہ ۱۹۰۰ عیسوی مین آبادی انگلستان کی کتنی ہوگی یہان ظاہر ہی کہ

آ = ۱۰۰۰۰۰۰۰ اور ن = ۱۰۰ اور م = ۴۰ اور

ط = ۰۳۰ ∴ ۱ + م − ط / م ط = ۱۲۱ / ۱۲۰ اور لوگ ح = لوگ و

+ ن × لوگ (۱ + م − ط / م ط) = لوگ ۰۰۰۰۰۰ ۱ + ۱۰۰ ×

لوگ ۱۲۱ / ۱۲۰ = ۰۰۰ ۲ ۴ ۶ ۳ ۱ ۷ = لوگ ۱۰۰۰ ۳ ۱ ۹ ۲ ۲

∴ ح = ۱۰۰۰ ۳ ۱ ۹ ۲ ۲

فصل اونیسوین ثبوت قواعد جذر اور کعب عددون کے بیان مین

چاہیئے کہ نظر کرین ہم اعداد حسابی کے نظم پر پہلی بیان کرنے اون قاعدون کے جن سی نکلتا ہی جذر مالی اور
کعبی عدد کا نظام عددی (جیسی کہ مقرر ہی حساب مین) زیادہ ہوتا ہی دس دس کے ساتھہ داہنی طرف سی بائین طرف کو
یعنے ہر ایک مرتبہ جو اس نظام مین ہی ہوتا ہی دس امثال اوس مرتبہ کا جو پہلی اوس سے ہی طرف داہنی کی یا دسوان اوس
مرتبہ کا جو بعد اوسکے ہی طرف بائین کے پس ممکن ہی تعبیر کرنا ہر ایک عدد کا ساتھہ جمع اکائیون اور دہائیون اور سیکڑون
اور ہزارون وغیرہ کی جیسی کہ تعبیر ہوتا ہی عدد ۱۷۳۴ ساتھہ طریق آئندہ کے یعنے
۴۰۰۰ + ۳۰۰ + ۷۰ + ۱ یا اسطرح سی ۴ × ۱۰^۳ + ۳ × ۱۰^۲ + ۷ × ۱۰ + ۱ اب اگر تعبیر کرین ہم عددہا
۱ ۲ ۳ وغیرہ کو ساتھہ حروف ا ب ج د وغیرہ کے اور ۱۰ اکو ساتھہ حرف ی کے تو عدد دو مرتبہ کا
ممکن ہی کہ تعبیر کیا جاوے اسطرح سی ا ی + ب اور عدد تین مرتبہ کا یا تین صورتونکا اسطرح سی
ا ی^۲ + ب ی + ج اور چار مرتبہ کا اسطرح سی ا ی^۳ + ب ی^۲ + ج ی + د اور پانچ مرتبہ کا اسطرح سی
ا ی^۴ + ب ی^۳ + ج ی^۲ + د ی + ط اور اسیطرح سی قیاس باقی کا ہی بموافق اوسکی جو بیان کیا گیا
نظام عددی سے ممکن ہی یہہ کہ تعبیر کیا جاوے عدد تین مرتبہ کا اسطرح سی ۱۰۰ ا + ۱۰ ب + ج اور حاصل ہوتا
ہی مربع اوسکا ضرب فی نفسہ سے = ۱۰۰۰۰ ا^۲ + ۲۰۰۰ ا ب + ۱۰۰ ب^۲ + ۲۰۰ ا ج + ۲۰ ب ج + ج^۲
اور یہہ ایسا مربع ہی کہ نکل سکتا ہی جذر مالی اوسکا ساتھہ قاعدہ جذر کی جو بیان کیا ہمنے سابق مین اوسکے عمل
کے صورت یہہ ہی ۱۰۰۰۰ ا^۲ + ۲۰۰۰ ا ب + ۱۰۰ ب^۲ + ۲۰۰ ا ج + ۲۰ ب ج + ج^۲ (۱۰۰ ا + ۱۰ ب + ج

۱۰۰۰۰ ا^۲

۲۰۰ ا + ۱۰ ب) * + ۲۰۰۰ ا ب + ۱۰۰ ب^۲

۲۰۰۰ ا ب + ۱۰۰ ب^۲

۲۰۰ ا + ۲۰ ب + ج) * * + ۲۰۰ ا ج + ۲۰ ب ج + ج^۲

۲۰۰ ا ج + ۲۰ ب ج + ج^۲

* * *

چاہیئے کہ ہووی ا = ۲ اور ب = ۳ اور ج = ا پس اب تمام ہوتاہی عمل مذکور اسطرح سے

```
۱+۳۰+۲۰۰ ) ۱+۶۰+۴۰۰+۹۰۰+۱۲۰۰۰+۴۰۰۰۰

                       ۴۰۰۰۰
          ۹۰۰+۱۲۰۰۰+ ─────── ( ۳۰+۴۰۰
                          *

                  ۹۰۰+۱۲۰۰۰
      ۱+۶۰+۴۰۰+ ──────────── ( ۱+۶۰+۴۰۰
                  *        *

      ۱+۶۰+۴۰۰
      ─────────
      *   *   *
```

چاہیئے کہ جمع کیئے جاوین سب عدد کہ واقع ہین بعض اوروں کی تہہ بعض کی ایک سطر مین اسطرحسی

```
                 ۵ ۳ ۳ ۶ ۱ ) ۲ ۳ ۱

                   ۴ ۰ ۰ ۰ ۰
           ۴ ۳ ) ─────────────
                   ۱ ۳ ۳ ۶ ۱

                   ۱ ۲ ۹
          ۴ ۶ ۱ ) ─────────────
                       ۴ ۶ ۱

                       ۴ ۶ ۱
                       ─────
                         *
```

چاہیئے کہ ساقط کیئے جاوین صفر جو نہین دخل رکہتے تمام کرنے عمل مین بیچ عمل کے اور نقل کیجاوین نیچے
ان حرف دو صورتین ایک دفعہ تو عمل کیا جاویگا اسطرحسی

```
                 ۵ ۳ ۳ ۶ ۱ ( ۲ ۳ ۱

                ۴
          ۴ ۳ ) ۱ ۳ ۳

                ۱ ۲ ۹
         ۴ ۶ ۱ ) ─────────
                   ۴ ۶ ۱

                   ۴ ۶ ۱
                   ─────
                     *
```

یہان سی واضح ہوتاہی یہہ کہ جذر مالی واسطی اس عدد کی ۱ ۶ ۳ ۳ ۵ کے یہہ ۱ ۳ ۲ ہی
یا
وجہہ تقسیم عدد کی جسکا جذر مالی مطلوب ہی درمیان دو دونکے ساتہہ رکہنی نقطہ کی اوپر ہر ایک دوسری مرتبہ کی

جب کہ ابتدا کی جاوے اکائیون سے ظاہر ہوتی ہی بیان ائندہ سی چونکہ معلوم ہی ہمین کہ ۱۰ جذر مالی ۱۰۰ کا ہی
اور ۱۰۰ ۱۰۰۰۰ کا اور ۱۰۰۰ ۱۰۰۰۰۰۰ کا اخر تک تو لازم آتا ہی یہہ کہ ہو وے جذر مالی واسطے
ایسی عدد کی جو چہوٹا ہی ۱۰۰ اسی ایک مرتبہ کا اور واسطی ایسی عدد کی جو متوسط ہی درمیان ۱۰۰ اور ۱۰۰۰۰
کے دو مرتبہ کا اور واسطی ایسی عدد کی جو واقع ہی بیچ ۱۰۰۰۰ اور ۱۰۰۰۰۰۰ کی تین مرتبہ کا اور اسی قیاس تک
آگی تک پس ضرور ہی کہ شمار نقطون ان دوردن سے ظاہر کرتی ہی مرتبون سے شمار کو جنسی مرکب ہون جذر مالی
اونکی اور یہان سے لازم آتا ہی یہہ ہی کہ ہو دی پہلی صورت اوپر بائین طرف جذر کی جیسی کہ صورت مذکورہ مین
۶۱ ۳۳ ۵ کہ جذر مالی اوسکا ہی تین مرتبو نکا ہی اسواسطی کہ نہین ممکن ہی یہہ کہ پایا جاوے مربع اوس صورت
کا جو واقع ہی بیچ تیسری مرتبہ جذر ۳ ۲ سے کہ بیچ دورہ اخیر کی جو داہنی طرف ہی (۶۱) کی اور اسیطرح مربع اوس
صورت کا جو واقع سے سینکڑوں بیچ دوسرے دورہ (۳۳) کی تو لازم آیا یہہ کہ پایا جاوے مربع اس صورت
کا جو واقع ہی جذر کی سینکڑون مین بیچ پہلی دورہ کی (۵) اور ضرور ہی کہ ہوگی صورت پہلی اوپر بائین طرف جذر کے
اور یہی قاعدہ حساب مین ہی اب ہم ثابت کرینگی قاعدہ واسطے نکالنی کعب یا جذر کعبی کی چونکہ معلوم ہی کہ ۱۰ ہی جذر کعبی
۱۰۰۰ کا اور ۱۰۰ ۱۰۰۰۰۰۰ کا اور ۱۰۰۰ ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰ کا اور اسیطرح تو لازم آتا ہی یہہ کہ ہووے
جذر کعبی ایسے عدد کا جو چہوٹا ہی ۱۰۰۰ اسی ایک صورت کا اور ایسی عدد کا جو مابین ہی ۱۰۰۰ اور ۱۰۰۰۰۰۰
کے دو صورتونکا پس اسیواسطی تقسیم ہوتا ہی عدد جسکا جذر کعبی مطلوب ہی درمیان دوردن کے جو مرکب ہین
تین تین مرتبون سے ساتہہ نشان کرنی کی نقطون سے ہر تیسری صورت کی سر پر جب کہ ابتدا کرین داہنی طرف
سے پس شمار دوردن کی ظاہر کرتی ہی اس بات کو کہ شمار صورتون کی جنسی مرکب ہو جذر کعبی مساوی ہی اوسکی
واسطے جیسی کہ جذر کعبی اس عدد کا ۹ ۲۷ ہوگا ایک صورت کا فقط اور جذر کعبی واسطی اس عدد سے
۳۲۴ ۸ ۳ ۱ ہوگا دو صورتون کا اور جذر کعبی اس عدد کا ۱۲ ۵ ۷ ۹۹ ۳ ۱ ہوگا تین صورت کا
اور اسی قیاس پر نکالا جاتے ہین جذر کعبی

(ا + ب + ج) کا ہی کہ مکعب (ا + ب) کا $+$ ۳ $\times$ (ا + ب)^2 $\times$ ج $+$ ۳ (ا + ب) $\times$ ج^2 $+$ ج^3 کا ہی
اور فرض کرو کہ مکعب حرد فی = ۱۲ ۵ ۷ ۹۹ ۳ ۱ ایسے ہی پس چاہیئے کہ لکھین پہلی صورت عمل یے

١٣٩٩٧٥٢١ (٢٠٠ + ٤٠ + ١

٨٠٠٠٠٠٠

٥٩٩٧٥٢١

باقی جو بعد تفریق کرنے ۸ کے رہے = ٥٩٩٧٥٢١

٣ ا٢ ب = ٣ (٢٠٠)٢ × (٤٠) = ٤٨٠٠٠٠٠

٣ ا ب٢ = ٣ (٢٠٠) × (٤٠)٢ = ٩٦٠٠٠٠

ب٣ = (٤٠)٣ = ٦٤٠٠٠

} = ٥٨٢٤٠٠٠

حاصل تفریق = ١٧٣٥٢١

اور ٣ (ا + ب)٢ ج = ٣ (٢٤٠)٢ × ١ = ١٧٢٨٠٠

٣ (ا + ب) ج٢ = ٣ (٢٤٠) × ١ = ٧٢٠

ج٣ = ١ = ١

} ١٧٣٥٢١ = حاصل تفریق

١٧٣٥٢١

×

حاصل تفریق بالا سے تفریق کیا کچھ نہ بچا

جاہیئے کہ حذف کریں ہم صفروں زاید کو اور نقل کریں ہم تین تین صورتیں ہر دفعہ پس عمل مذکور رہے اس صورت آئندہ پر

١ ٤ ٢

١٣٩٩٧٥٢١

٨

٥٩٩٧

ب٣ + ٣ا ب٢ + ٣ا٢ ب = ٢٨٢٤

---

٣ (ا + ب)٢ ج = ١٧٢٨) ١٧٣٥٢١

١٧٣٥٢١

×

فصل بیسوین خواص اعداد کے بیان مین

فقرہ ۱ واضح ہو کہ اعداد مین ہر ایک عدد اپنی ماقبل کے عدد سی دس گنا ہوتا ہی یعنے دس کی اضعاف سے اعداد کی ترکیب ہوتی ہی مثلاً ۳۲۵۶ اسطرح تعبیر ہو سکتا ہی $۶ + ۵ \times ۱۰ + ۲ \times ۱۰^{۲} + ۳ \times ۱۰^{۳}$ اور اعداد ۳ ۲ ۵ ۶ کو جنسی عدد مذکور بنتا ہی مراتب اس عدد کی کہتے ہین اور عدد ۱۰ کا جسکی قوا سے موافق عدد مذکور زیادہ ہوتا ہی عدد بنیادی کہلاتا ہی — جاننا چاہیئے کہ عدد بنیادی مختلف ہو سکتی ہین یعنے جسطرح نظام مدی عدد ۱۰ اسی مرتب ہی اسیطرح اعداد ۲ ۳ ۱۰ ۱۲ وغیرہ سی مرتب ہو سکتی ہی پس اگر عدد بنیادی ۷ فرض کیا جاوے تو عدد ۳۲۵۶ اسطرح تعبیر ہوگا $۶ + ۵ \times ۷ + ۲ \times ۷^{۲} + ۳ \times ۷^{۳}$ اور عموماً اگر مراتب ایک عدد کی $ا_{۰}$ $ا_{۱}$ $ا_{۲}$ $ا_{۳}$ وغیرہ فرض کیے جاوین اور ر عدد بنیادی متصور کیا جاوے تو وہ عدد اسطرح تعبیر ہوگا $ا_{۰} + ا_{۱} ر + ا_{۲} ر^{۲} + ا_{۳} ر^{۳} +$ وغیرہ اور اگر تعداد مراتب کی ن ہو تو عدد مذکور اسطرح تعبیر ہوگا $ا_{۰} + ا_{۱} ر + ا_{۲} ر^{۲} + ا_{۳} ر^{۳} + \ldots + ا_{ن-۲} ر^{ن-۲} + ا_{ن-۱} ر^{ن-۱}$ اور اسکی دیکھنے سے یہہ بات معلوم ہوتی ہی کہ اگر عدد بنیادی کچھہ ہی فرض کیا جاوے ر کی نہایت بڑی قوت تعداد مرتبون سے ایک کم ہوگی اور یہہ بھی واضح ہو کہ عدد بنیادی کچھہ ہی فرض کرین جو عدد اوسکی موافق لیا جاوے اوسکا ہر ایک مرتبہ عدد بنیادی سے کم ہوگا اور تعداد مراتب کی معہ [illegible] مساوی عدد بنیادی یعنے ر کے ہوگی

۲ چاہتے ہین ہم کہ ایک عدد کو جو کسی خاص عدد بنیادی کے موافق ہی کسی اور عدد بنیادی کے موافق تعبیر کرین پس فرض کیا کہ ن عدد مذکور ہی اور ر وہ عدد بنیادی ہی جسکے موافق تعبیر کرنا منظور ہی اور $ا_{۰}$ $ا_{۱}$ $ا_{۲}$ $ا_{۳}$ وغیرہ مراتب مجہول ہین تو اب ظاہر ہی کہ $ن = ا_{۰} + ا_{۱} ر + ا_{۲} ر^{۲} + ا_{۳} ر^{۳}$ وغیرہ اب اگر ن کو ر پر تقسیم کرین تو $ا_{۰}$ باقی رہیگا اور اگر خارج قسمت کو پہر ر پر تقسیم کرین تو $ا_{۱}$ باقی رہیگا اور اگر پہر خارج قسمت ثانی کو ر پر تقسیم کرین تو $ا_{۲}$ باقی رہیگا و علی ہذا القیاس $ا_{۳}$ $ا_{۴}$ وغیرہ باقیان بچین گے پس اگر یہان تک عمل کرین کہ باقی کچھہ نہ رہی تو ظاہر ہی کہ اس عمل تقسیم سی مراتب $ا_{۰}$ اور $ا_{۱}$ اور $ا_{۲}$ وغیرہ معلوم ہو جائینگی اور اون کے معلوم ہونے سے عدد مطلوب معلوم ہو جاویگا مثلاً چاہتے ہین ہم کہ عدد ۱۸۲۰ کو جو عدد بنیادی ۱۰ کے موافق ہی ایسی عدد سی تعبیر کرین جسکا عدد بنیادی ۶ ہو پس موافق قاعدہ کے ۱۸۲۰ کو ۶ پر تقسیم کیا اور خارج قسمت کو پہر ۶ پر تقسیم کیا اور باقیان ثبت کین

٦	١ ٨ ٢ ٠
٦	٣٠ ٠ ١٠ باقی ٢
٦	٥٠ - ٣
٦	٨ - ٢
١	١ ب ٢
	٠ ب ١

باقی اول ا = ٢
باقی دوم ا = ٣
باقی سویم ا = ٣
ایضاً (٤) = ٢
ایضاً (٥) = ١

پس معلوم ہوا کہ عدد مطلوب ٢٣٣٢١٢ ہے اور اسکا امتحان بھی ہو سکتا ہے اسواسطے کہ اگر نتیجہ درست ہو تو با مفروضہ یہہ مساوات ہونی چاہیے

$١٨٢٠ = ٦^٤ \times ١ + ٦^٣ \times ٢ + ٦^٢ \times ٣ + ٦ \times ٣ + ٢$

اور اسس مساوات کا اول طرف جمع کرنے سے بھی ١٨٢٠ حاصل جمع ہوتا ہے تو معلوم ہوا کہ عدد مذکور صحیح ہے (ص)
اگر تعداد مراتب اور عدد بنیادی معلوم ہو تو دریافت کرو کہ اسس تعداد مراتب کے موافق نہایت بڑا عدد اور نہایت چھوٹا عدد کیا ہوگا فرض کرو کہ عدد بنیادی ر ہو اور ن تعداد اون مراتب کی ہے تو ظاہر ہے کہ عدد نہایت بڑا اوس وقت ہوگا جس وقت ہر ایک مرتبہ اوسکا نہایت بڑا ہو۔ اور کوئی مرتبہ ر-١ سے بڑا نہیں ہو سکتا یعنی نہایت بڑا مرتبہ ر-١ ہوتا ہے پس معلوم ہوا کہ جس وقت ہر ایک مرتبہ ر-١ ہوگا اوس وقت عدد نہایت بڑا ہوگا یعنی عدد مطلوب اسس صورت سے بتعبیر ہوگا ر-١ + (ر-١) ر + (ر-١) ر^٢ ... (ر-١) ر^(ن-١) =

(ر-١)(١ + ر + ر^٢ ... ر^(ن-١)) = (ر-١) (ر^ن - ١)/(ر-١) = ر^ن - ١ = عدد مطلوب نہایت

زیادہ کی — اور یہہ بھی ظاہر ہے کہ نہایت چھوٹا عدد سب اعداد میں ١ ہے اور اسیواسطے دو مرتبہ کا نہایت چھوٹا عدد ١٠ ہوگا اور تین مرتبہ کا نہایت چھوٹا ١٠٠ ہوگا اور علی ہذا القیاس یعنی نہایت چھوٹا عدد وہ ہوتا ہے جسکا اخیر مرتبہ ١ ہو اور باقی مراتب ٠ ہوں اور اس صورت میں نہایت چھوٹا عدد = ر^(ن-١) ہوتا ہے
مثال اگر عدد بنیادی ١٠ فرض کیا جاوے تو چار مرتبہ کا عدد نہایت بڑا یہہ ہوگا ١٠^٤ - ١ = ٩٩٩٩
اور نہایت چھوٹا عدد = ١٠^٣ = ١٠٠٠ دو عدد مفروض کو باہم ضرب کریں تو دریافت کرو کہ تعداد مراتب حاصل ضرب کی کیا ہوگی فرض کرو کہ دو عدد مفروض ف اور ق ہیں اور م اور ح ان دونو کی تعداد مراتب ہیں اور ر عدد بنیادی ہے تو ف = ا + ا ر + ا ر^٢ ... ا ر^(م-١) اور ق = ص + ص ر + ص ر^٢ ... ص ر^(ح-١)
بسیواسطے ف ق = ایک ایسی سلسلہ کی ہوگی جسمیں نہایت بڑی قوت ر کی یہہ ہوگی ا ص ر^(م+ح-٢)
اور نہایت بڑی قیمت اسکی یہہ ہے (ر-١) ر^(م+ح-٢) اور نہایت کم ر کی قوت ف ق میں یہہ ہوگی ر^(م+ح-٢)
پس معلوم ہوا کہ نہایت بڑی قوت ر کی حاصل ضرب ف ق میں کم اسکے ر^٢ × ر^(م+ح-٢) یا ر^(م+ح) سے ہوگی اور نہایت کم ر^(م+ح-٢) ہے تو موافق بیان فقرہ (١) کی تعداد مراتب کی حاصل ضرب ف ق میں م + ح سے زیادہ نہیں ہو سکتی اور نہ م + ح - ١ سے کم ہو سکتی ہے

(۵) چاہتی ہین ہم کو تعداد مراتب خارج قسمت ف ÷ ق کی کیا ہوگی اوس صورت مین جبکہ ق پرف پورا تقسیم ہوجای فرض کرو کہ ف ÷ ق = د ∴ ف = ق د اور چونکہ ف مین م مرتبہ فرض کیگئے تو بالضرور ق د مین بہی م مرتبہ ہونگی اور فرض کرو کہ تعداد مراتب د کی = لا تو موافق فقرہ گذشتہ کے م زیادہ (ح + لا) سی اور کم (ح + لا − ۱) سی نہین ہونیگا اور اسیواسطی عدد مطلوب لا کم (م − ح) سی اور زیادہ (م − ح + ۱) سی نہوگا

حکم یہان سیسے معلوم ہوا کہ تعداد مرتبون کے $ف^2$ مین ۲م یا ۲م − ۱ ہی اور $ف^3$ مین ۳م یا ۳م − ۱ یا ۳م − ۲ ہی اور علی ہذا القیاس — (۶) اگر مجموعہ مراتب کو ہر ایک قسم کی اعداد مین جنکا عدد بنیادی ر ہو ر − ۱ پر تقسیم کرین تو باقی اوسیقدر رہیگا جسقدر کل عدد کو ر − ۱ پر تقسیم کرنی سیسے رہتا ہی اثبات دعوی کی لئے فرض کرتے ہین ہم کہ

$ا + ا_1 ر + ا_2 ر^2 + \cdots ا_ن ر^ن$ عدد (ن) کو تعبیر کرتا ہی اسیواسطی

$$ن = ا + ا_1 + ا_2 + \cdots ا_ن + ا_1 (ر - 1) + ا_2 (ر^2 - 1) + \cdots + ا_ن (ر^ن - 1)$$

$$\therefore \frac{ن}{ر - 1} = \frac{ا + ا_1 + ا_2 + \cdots + ا_ن}{ر - 1} + ا_1 + ا_2 (ر + 1) + \cdots\cdots ا_ن \frac{ر^ن - 1}{ر - 1}$$

لیکن یہہ بات ظاہر ہی کہ اگر ر کی واسطی کوئی مثبت قیمت فرض کیجاوی ہر صورت مین $\frac{ر^ن - 1}{ر - 1}$ ایک عدد صحیح ہوگا پس اگر کل عدد صحیح کو ع سی تعبیر کرین تو $\frac{ن}{ر - 1} = ع + \frac{ا + ا_1 + \cdots ا_ن}{ر - 1}$ اور اس مساوات سی صاف ظاہر ہی کہ عدد ن کو ر − ۱ پر تقسیم کرنی سیسے وہی باقی رہتا ہی جو مجموعہ مراتب ا + ا₁ وغیرہ کو ر − ۱ پر تقسیم کرنی سی باقی رہتا ہی کیونکہ ع تو عدد صحیح ہی اوسمین باقی ہو ہی نہین سکتی

حکم یہان سیسے ثابت ہوا کہ اگر ایک عدد ر − ۱ پر پورا تقسیم ہوسکی تو اوسکی مجموعہ مراتب کا بہی ر − ۱ پر پورا تقسیم ہوسکتا ہی اور یہان سیسے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اگر حاصل تفریق اون مراتب کا جو طاق اور جفت مقامون پر واقع ہین ر + ۱ پر پورا تقسیم ہوسکی تو وہ عدد بہی ر + ۱ پر پورا تقسیم ہوسکیگا

مثال دریافت کیا چاہتے ہین ہم کہ وہ اعداد کونسی ہین جو ۳ اور ۹ پر پوری تقسیم ہوسکتے ہین فرض کرو کہ ا ب س د وغیرہ مراتب کسی عدد کی ہین تو ظاہر ہی کہ وہ عدد اس صورت سی تعبیر ہوسکتا ہی

ا + ۱۰ ب + ۱۰۰ س + ۱۰۰۰ د + وغیرہ اب اگر اسکو ۳ پر تقسیم کرین تو یہہ حاصل ہوگا

$$\frac{ا}{3} + 3ب + \frac{ب}{3} + 33س + \frac{س}{3} + 333د + \frac{د}{3} + \text{وغیرہ}$$ یعنی

ا + ب + س + وغیرہ / ۳ + ۳ ب + ۳۳ س + ۳۳۳ د + وغیرہ اور یہہ عدد اسوقت صحیح ہوگا جسوقت ا + ب + س + وغیرہ / ۳ صحیح ہو پس معلوم ہوا کہ وہ عدد ۳ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہی جسکی مراتب کا مجموعہ ۳ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہی مثلاً ۱۱۱ اور ۲۵۲ اور ۱۸۵۷ وغیرہ ۳ پر پوری تقسیم ہو سکتی ہین اور اسیطرح ثابت ہو سکتا ہی کہ ۹ پر وہ عدد پورا تقسیم ہوگا جسکی مراتب کا مجموعہ ۹ پر پورا تقسیم ہوگا اسواسطی کہ

ا + ۱۰ ب + ۱۰۰ س + ۱۰۰۰ د + وغیرہ / ۹ = ا/۹ + ب + ب/۹ + ۱۱ س + س/۹ + ۱۱۱ د + د/۹ + وغیرہ

= ا + ب + س + د + وغیرہ / ۹ + ب + ۱۱ س + ۱۱۱ د + وغیرہ = عدد صحیح کی جسوقت کہ ا + ب + س + وغیرہ / ۹ عدد صحیح کی ہو مثلاً ۴۸۶ اور ۶۵۸۸ وغیرہ ۹ پر پوری تقسیم ہو سکتی ہین حکم (۱) یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ اگر کسی عدد کو ۹ پر تقسیم کرین اور اسکی مجموعہ مراتب کو بہی ۹ پر تقسیم کرین تو دونو صورتونمین باقی یکسان رہیگی حکم (۲) یہان سے وہ قاعدہ بہی ثابت ہو سکتا ہی جو ضرب کی غلطی درست کرنیمین مستعمل ہی کیونکہ اگر فرض کرین ہم کہ مضروب فیہ ۹ ا + لا ہی اور مضروب ۹ ب + ر ہی تو حاصل ضرب ۸۱ ا ب + ۹ ب لا + ۹ ا ر + لا ر ہوگا اور یہہ بات ظاہر ہی کہ اگر مضروب فیہ کی مجموعہ مراتب کو ۹ پر تقسیم کرین تو لا باقی رہتا ہی اور اگر مضروب کے مجموعہ مراتب کو ۹ پر تقسیم کرین تو ر باقی رہتا ہی پس ان باقیون کو ضرب کرین تو لا ر ہوتا ہی اور ر لا/۹ = باقی ہے جو مجموعہ مراتب حاصلضرب کو ۹ پر تقسیم کرتی باقی رہتا ہی اسواسطے کہ حاصلضرب مذکور میں سوا لا ر کی اور سب مقداریں ۹ پر پوری تقسیم ہو جاتی ہین اور یہی وجہ ہی کہ اس قاعدہ مین حاصل ہوتی ہی بشرطیکہ عمل درست ہو واضح ہو کہ جن صورتون میں حاصلضرب ہر ایک صفر یا کئی صفر زیادہ یا کم کیجاویں یا ان صورتون میں جبکہ حاصلضرب پر ۹ یا ۹ کا ضعف صحیح زیادہ یا کم کیا جاوے اس قاعدہ سی غلطی کی تصحیح نہو گی

(۷) — نظام عددی جو مقرر ہی اسمین اگر کوئی سے دو قریب کی عدد لین اور انکو باہم ضرب کرین تو انکا حاصلضرب ۱ × ۲ سی تقسیم ہو جائیگا کیونکہ ان دونو عددونمین سے ایک ضرور جفت ہوگا یعنی ۲ پر تقسیم ہو سکیگا اور اسیواسطے ان دونو عددونکا حاصلضرب ۲ پر تقسیم ہو سکیگا اور اس عدد کو کسی عدد مین ضرب کرین بالضرور حاصل ضرب ۲ پر تقسیم ہو سکیگا — چونکہ ہر ایک عدد ان تینون مقدارون ۳ م اور ۳ م ± ۱ اور ۳ م ± ۲ مین سے کسی ایک سے تعبیر ہو سکتا ہی کیونکہ ہر عدد یا تو ۳ پر پورا تقسیم ہو جائیگا یا فقط ۱ یا ۲ باقی رہیگی تو اسی واسطی حاصلضرب قریب کے تین عددون کا ان تین مقدارون سے

۳ م (۳ م + ۱) (۳ م + ۲) اور (۳ م − ۱) ۳ م (۳ م + ۱) اور (۳ م − ۲) (۳ م − ۱) ۳ م مین کسی نہ کسی سے تعبیر ہوگا اب ظاہر ہی کہ موافق بیان بالا کی دونو مقدار (۳ م + ۱) (۳ م + ۲) اور (۳ م − ۲) (۳ م − ۱) ۱ × ۲ پر تقسیم ہو سکتے ہین تو ثابت ہوا کہ صورت اول اور تیسری ۱ × ۲ × ۳ پر پوری تقسیم ہو جاویگی — اور اگر م ایک عدد جفت ہو یعنی ۲ پر تقسیم ہو سکی تو ظاہر ہی کہ ۳ م اور اسیواسطی دوسری صورت ۱ × ۲ × ۳ پر پوری تقسیم ہو جاویگی اور اگر م ایک عدد طاق ہو تو ظاہر ہی کہ ۳ م بہی طاق ہوگا اور اسیواسطی ۳ م + ۱ جفت ہوگا اور اسیواسطی اس صورت مین بہی دوسری

صورت ۱ × ۲ × ۳ پر تقسیم ہو جاویگی پس ثابت ہوا کہ تمام صورتوں میں حاصل ضرب ترتیب کی تین عددوں کا

۱ × ۲ × ۳ پر پورا تقسیم ہو جاویگا — ثابت کرو کہ متسلسل حاصل ضرب ر ترتیبی ترتیب کی عددوں کا ۱ × ۲ × ۳ ..... ر

پر تقسیم ہو جاویگا فرض کرو کہ ح (م اور ر) تعبیر کرتا ہے م $\frac{م-۱}{۲}$ $\frac{م-۲}{۳}$ ..... $\frac{م-ر+۱}{ر}$ کو تو ح (م اور ر+۱) =

م $\frac{م-۱}{۲}$ $\frac{م-۲}{۳}$ ..... $\frac{م-ر+۱}{ر}$. $\frac{م-ر}{ر+۱}$ = ح (م اور ر) $\frac{م-ر}{ر+۱}$ =

ح (م اور ر) $\frac{م+۱}{ر+۱}$ ح (م اور ر) — ح (م اور ر) = $\frac{(م+۱) م (م-۱) ..... (م+۱-ر+۱)}{۱ × ۲ × ۳ .... (ر+۱)}$ — ح (م اور ر)

= ح (م+۱ اور ر+۱) — ح (م اور ر) ∴ ح (م+۱ اور ر+۱) — ح (م اور ر+۱) = ح (م اور ر)

یہاں سے ثابت ہوا کہ ح (ر+۱ اور ر+۱) = ح (ر اور ر) = ۱ اور

ح (ر+۲ اور ر+۱) — ح (ر+۱ اور ر+۱) = ح (ر+۱ اور ر) اور

ح (ر+۳ اور ر+۱) — ح (ر+۲ اور ر+۱) = ح (ر+۲ اور ر)

.... = ...

ح (م اور ر+۱) — ح (م−۱ اور ر+۱) = ح (م−۱ اور ر)

∴ ح (م اور ر+۱) = ۱ + ح (ر+۱ اور ر) + ح (ر+۲ اور ر) + ... + ح (م−۱ اور ر)

اب اگر ر = ۱ تو ح (م اور ۲) = ۱ + ح (۲ اور ۱) + ح (۳ اور ۱) + ... + ح (م−۱ اور ۱)

= ۱ + ۲ + ۳ + ... + م − ۱ = ایک عدد صحیح ہے

اور اگر ر = ۲ تو ح (م اور ۳) = ۱ + ح (۳ اور ۲) + ح (۴ اور ۲) + ... + ح (م−۱ اور ۲) = عدد صحیح ہے

اور اگر ر = ۳ تو ح (م اور ۴) = ۱ + ح (۴ اور ۳) + ح (۵ اور ۳) + ... + ح (م−۱ اور ۳) = عدد صحیح ہے

وغیرہ = وغیرہ = وغیرہ وغیرہ = وغیرہ

اور ح (م اور ر) = ۱ + ح (ر اور ر−۱) + ح (ر+۱ اور ر) + ... ح (م−۱ اور ر−۱) = ایک عدد صحیح ہے

یعنی متسلسل حاصل ضرب ر کتنی اعداد ترتیبیہ کا ۱ × ۲ × ۳ ..... ر یا ر! پر پورا تقسیم ہو جاویگا مثال (۱) اگر ن ایک عدد

صحیح ہو تو ثابت کرو کہ ن (ن² − ۱) (ن² − ۴) ۱۲۰ پر تقسیم ہو جاویگا چونکہ ن (ن² − ۱) (ن² − ۴) =

ن (ن − ۱) (ن + ۱) (ن − ۲) (ن + ۲) = (ن − ۲) (ن − ۱) ن (ن + ۱) (ن + ۲) جو کہ پانچ اعداد ترتیبیہ کا حاصل ضرب ہے اسواسطے

۱ × ۲ × ۳ × ۴ × ۵ یا ۱۲۰ پر پورا تقسیم ہو جاویگا

مثال ۲ اگر ن ایک عدد جفت ہو تو ثابت کرو کہ ن³ + ۲۰ ن ۴۸ ہم پر پورا تقسیم ہو جاویگا چونکہ ن جفت ہی تو فرض کرو کہ ن = ۲ م ∴ ن³ + ۲۰ ن = ۸ م³ + ۴۰ م = ۸ م (م² + ۵) = ۸ م (م² − ۱) + ۴۸ م =
= ۸ (م − ۱) م (م + ۱) + ۴۸ م اب چونکہ (م − ۱) م (م + ۱) تین اعداد قریبہ کا حاصل ضرب ہی اسیواسطی ۱ × ۲ × ۳ پر پورا تقسیم ہو جاویگا اسیواسطی ۶ × ۸ یا ۴۸ پر صورت مفروض تقسیم ہو جاویگی

(۸) ثابت کرو کہ جو عدد مجذور کامل ہو ان دو صورتوں ۵ م اور ۵ م ± ۱ سی تعبیر ہو سکتا ہی اسیواسطے کہ یہہ بات ظاہر ہی کہ ہر عدد بتعبیر ہو سکتا ہی بوسیلہ کسی نہ کسی صورت کی ان صورتوں ۵ م اور ۵ م + ۱ اور ۵ م + ۲ اور ۵ م + ۳ ۵ م + ۴ میں سی اور یہہ صورتیں تعبیر ہو سکتی ہیں ان تین صورتوں ۵ م ۵ م ± ۱ ۵ م ± ۲ سی اسواسطی کہ سوای دو صورتوں اخیر کی یعنی ۳ اور ۴ میں انکا تعبیر ہونا تو ظاہر ہی اور دو نو صورتیں اخیرہ اسواسطی تعبیر ہو سکتی ہیں کہ ۵ م + ۳ = ۵ (م + ۱) − ۲ = ۵ م′ − ۲ اور ۵ م + ۴ = ۵ (م + ۱) − ۱ = ۵ م′ − ۱ پس معلوم ہوا کہ ہر عدد تین صورتوں مذکورہ سی تعبیر ہو سکتا ہی
اب ہم ثابت کرتی ہیں کہ مجذور ان تینوں صورتوں کے اونہیں دو صورتوں مفروضہ یعنی ۵ م اور ۵ م ± ۱ سے تعبیر ہو سکتی ہی ظاہر ہی کہ (۵ م)² = ۵ (۵ م²) = ۵ م′ جو ۵ م کی صورت کا ہی
اور (۵ م ± ۱)² = ۲۵ م² ± ۱۰ م + ۱ = ۵ (۵ م² ± ۲ م) + ۱ = ۵ م′ + ۱ جو ۵ م + ۱ کی صورت کا ہی
اور (۵ م ± ۲)² = ۲۵ م² ± ۲۰ م + ۴ = ۵ (۵ م² ± ۴ م + ۱) − ۱ = ۵ م′ − ۱ جو ۵ م − ۱ کی صورت کا ہی پس ثابت ہوا کہ جو عدد مجذور کامل ہی ان دو صورتوں ۵ م اور ۵ م ± ۱ سے تعبیر ہو سکتا ہی

(۹) ثابت کرو کہ جو عدد ایسا ہو کہ سوای اپنی اور عدد ۱ کے اور کسی پر تقسیم نہو سکی اور اس عدد کو انگریزی میں پریم کہتی ہیں اگر دو سی زیادہ ہو تو ۴ م ± ۱ سی تعبیر ہو سکتا ہی اسواسطی کہ تمام اعداد ان صورتوں سی ۴ م ۴ م + ۱ ۴ م + ۲ ۴ م + ۳ بتعبیر ہو سکتی ہیں لیکن عدد مذکور ۴ م اور ۴ م + ۲ سی تعبیر نہیں ہو سکتا کیونکہ یہہ دو نو صورتیں ۲ پر تقسیم ہو سکتی ہیں پس معلوم ہوا کہ عدد مذکور یعنی عدد پریم جو دو سی بڑا ہو ۴ م + ۱ اور ۴ م + ۳ سے بتعبیر ہو سکتا ہی لیکن ۴ م + ۳ = ۴ (م + ۱) − ۱ = ۴ م′ − ۱ پس ثابت ہوا کہ ہر عدد پریم جو دو سی زیادہ ہی ۴ م ± ۱ سی تعبیر ہو سکتا ہی چونکہ م جفت ہوگا یا طاق یعنی ۲ ن + ۱ کی صورتکا ہوگا یا ۲ ن کی صورت کا اسیواسطی ۴ م ± ۱ ان دو صورتوں سے ۸ ن ± ۱ اور ۸ ن ± ۳ تعبیر ہو سکتا ہی یعنی عدد مذکور ان صورتوں سی تعبیر ہو سکتا ہی

(۱۰) ثابت کرو کہ عدد پریم اگر تین سے زیادہ ہو ۶ م ± ۱ سی تعبیر ہو سکتا ہی اسواسطی کہ تمام عدد ان صورتوں ۶ م اور ۶ م + ۱ اور ۶ م + ۲ اور ۶ م + ۳ اور ۶ م + ۴ اور ۶ م + ۵ سی تعبیر ہو سکتی ہیں

لیکن یہ ظاہر ہی کہ پہلی اور تیسری اور چوتھی اور پانچوین صورت سی پرم عدد تعبیر نہین ہو سکتا پس معلوم ہوا

کہ عدد مذکور ۶ م + ۱ اور ۶ م + ۵ سے بتعبیر ہو سکتا ہی لیکن ۶ م + ۵ = ۶ (م + ۱) − ۱ = ۶ م‌‌ ‌− ۱

کی صورت کا ہی پس جو عدد پرم تین سے زیادہ ہو ۶ م ± ۱ سی تعبیر ہو سکتا ہی اور م کی طاق اور جفت ہونیکی موافق

عدد مذکور ۱۲ ن ± ۱ اور ۱۲ ن ± ۵ سی تعبیر ہوگا

(۱۱) ایک عدد کی تمام مقسوم علیہ دریافت کرو فرض کرو کہ آ ‌ ب ‌ ج وغیرہ اوس عدد کی پرم ہین اور فرض کرو

کہ آ ص دفعہ واقع ہو اور ب ق دفعہ اور ج ر دفعہ ... علی ہذا پس وہ عدد مساوی ہوگا آ^ص ب^ق ج^ر

یہ ظاہر ہی کہ یہہ عدد ہر ایک عدد آئندہ سی پورا تقسیم ہو دیگا

۱ اور آ اور آ^۲ اور آ^۳ ..... آ^ص	ص + ۱ تعداد تک
۱ اور ب اور ب^۲ اور ب^۳ ..... ب^ق	ق + ۱
۱ اور ج اور ج^۲ اور ج^۳ ..... ج^ر	ر + ۱

. . . .

اور ان اعداد کی دو یا زیادہ کی حاصل ضرب سے بہی تقسیم ہو سکیگا یعنی ہر ایک حاصل ضرب مسلسل (۱ + آ + آ^۲ + ... + آ^ص) × (۱ + ب + ب^۲ + ... + ب^ق) (۱ + ج + ج^۲ + ... ج^ر) پر کیونکہ (۱ + آ + آ^۲ + ... آ^ص) (۱ + ب + ب^۲ + ... + ب^ق)

= ۱ + آ + آ^۲ + ... آ^ص
+ ب + آ ب + ... آ^ص ب
+ ب^۲ + آ ب^۲ + ... آ^ص ب^۲
+ . . . .
+ ب^ق + آ ب^ق + ... آ^ص ب^ق

جو کہ مختلف مقسوم علیہ آ^ص ب^ق کی ہین اور انہین مقسوم علیہ ایک بہی شامل ہی اسیطور سی اگر ہم اسکو (۱ + ج + ج^۲ + ... ج^ر) سی ضرب دین تو حاصل ضرب مساوی ہوگا تمام مقسوم علیہ آ^ص ب^ق ج^ر کی اسیطرح اور صورتین حاصل ہو سکتی ہین اگر عدد مفروض کی اجزاء ضربی زیادہ ہون اب ظاہر ہی کہ تعداد ان مقسوم علیہ کی آ^ص مین ص + ۱ ہی اور آ^ص ب^ق مین تعداد مساوی ہوگی (۱ + ص) (۱ + ق)

اور آ^ص ب^ق ج^ر مین تعداد مقسوم علیہ مساوی ہوگی (۱ + ص) (۱ + ق) (۱ + ر) اور اگر زیادہ ہون تو بہی یہی قاعدہ جاری ہو سکتا ہی تعداد مقسوم علیہ آ^ص ب^ق ج^ر ... وغیرہ =

(۱ + ص) (۱ + ق) (۱ + ر) (وغیرہ) ان مقسوم علیہ مین عدد ایک اور وہ خود عدد بہی شامل ہی

مثال دریافت کرو تمام مقسوم علیہ ۲۱۶۰ کے ۲۱۶۰ = ۱۰۸۰ × ۲ = ۵۴۰ × ۲^۲ =

۲۷۰ × ۲^۳ = ۱۳۵ × ۲^۴ = ۴۵ × ۳ × ۲^۴ = ۱۵ × ۳^۲ × ۲^۴ = ۵ × ۳^۳ × ۲^۴ اسیواسطی تمام

مقسوم علیہ ۲۱۶۰ کی مساوی ہوا (۴ + ۱) (۳ + ۱) (۱ + ۱) = ۴۰

باب پنجم سوالات غیر منقطع کی بیان مین

فصل ١

اوس سوال کو جسمین مساواتین جو شرایط سوال کی سی پیدا ہوتی ہین کم ہون بہ نسبت تعداد مقدارون مجہول کی سوال غیر منقطع کہتے ہین گو کہ ایسی سوالون کے جواب بی شمار ہو سکتے ہین پہر بہی جواب اونکی اعداد صحیح مین اکثر تہوڑی سی ہوتی ہین اور اونکی دریافت کرنیکی ترکیبین مرقوم الزیل سی معلوم ہو جائینگی

شکل اول

جاہتے ہین ہم دریافت کرنی قیمتین لا اور رکی مساوات طلا = ص ر + س سے جسمین ط اور ص اور س تعبیر کرتے ہین اعداد مفروضہ کو کہ ایسی کہ اونکا کوئی عدد ضربی مشترک نہین ہی

قاعدہ

(١) تعبیر کرو صہ سی کسی عدد صحیح کو اور چونکہ مساوات مفروضہ سی حاصل ہوتا ہی یہہ لا = (ص ر + س)/ط تو بعد نکالڈالنے کی صحیح کی عدد کو جو (ص ر + س)/ط بیچ نکل سکتی ہین فرض کرو کہ حاصل ہوتا ہی یہہ (د ر + ف)/ط اب تفریق کرو (د ر + ف)/ط کو ط ر/ط یا ٢ط ر/ط یا ٣ط ر/ط یا کسی اور عدد صحیح ہی کی مین سی کہ ہووی نہایت قریب (د ر + ف)/ط کی اور لازم ہی کہ ہووی باقی ایک عدد صحیح اور یہی عمل کری جاو جب تک کہ سر رکا مساوی آ کے ہو جاوے اور اوس صورت مین حاصل ہوگی یہہ مقدار بشکل ایک کسر کی (ر + کہ)/ط اور اسکو لکہو مساوی ایک عدد صحیح کی یعنی ثبت کرو اسطرح سی (ر + کہ)/ط = صہ اور ∴ ر = ط صہ − کہ اب جسقدر فرض کرینگے کوئی عدد صحیح واسطی صہ کی تو قیمت ر کی معلوم ہو جائیگی اور بعد ازان قیمت لا کی بہی قاعدہ مرقومہ بالا مبنی ہی ان علوم متعارفہ پر (١) حاصل جمع اور حاصل تفریق اور حاصل ضرب اعداد صحیح کا صحیح ہوتا ہی (٢) اگر ایک عدد فنا کرتا ہی کسی اور عدد کو اور اوسکی کسی ایک جز کو تو ضرور ہی کہ پہلا عدد بہی فنا کرے پہلی عدد کی باقی جز کو

مثالین

١ ١٩ لا = ٣٢ ر − ١١ بتاؤ کیا ہی قیمت لا اور ر کی ظاہر ہی کہ لا = (٣٢ ر − ١١)/١٩ = صہ

اور چونکہ (۱۹د)/۱۹ = صہ تو معلوم ہوا کہ (۱۹د)/۱۹ − (۱۴د − ۱۱)/۱۹ = (۵د + ۱۱)/۱۹ = صہ اور اب

۴ × (۵د + ۱۱)/۱۹ = (۲۰د + ۴۴)/۱۹ = (۲۰د + ۶)/۱۹ + ۲ = صہ

∴ (۲۰د + ۶)/۱۹ = صہ اور ∴ (۱۹د)/۱۹ − (۲۰د + ۶)/۱۹ = (د + ۶)/۱۹ = صہ

∴ د + ۶ = ۱۹صہ ∴ د = ۱۹صہ − ۶ اب اگر کم سی کم قیمت واسطی د کی دریافت کیجاوین

تو لازم ہی کہ فرض کرین ہم صہ = ۱ اور ∴ د = ۱۹ − ۶ = ۱۳ اور ∴ لا = ۹ اور اگر صہ = ۲ تو

د = ۳۸ − ۶ = ۳۲ اور اسیطرح سی اور بی شمار قیمتین واسطے د کی معلوم ہو سکتی ہین اور ان قیمتوں کے

موافق لا کی بھی قیمتین بی شمار ہونگی

(۲) مثال معلوم ہی ہمین یہہ مساوات ۳لا = ۸د − ۱۶ اور چاہتے ہین ہم دریافت کرنی لا اور د کی

کہ اعداد صحیح ہون اسیجای ظاہر ہی کہ لا = (۸د − ۱۶)/۳ = ۲د − ۵ + (۲د − ۱)/۳ اب ضرور ہی کہ

(۲د − ۱)/۳ = صہ لیکن ظاہر ہی کہ (۳د)/۳ ایک عدد صحیح ہی اور چونکہ

(۲د − ۱)/۳ × ۲ = (۴د − ۲)/۳ = صہ تو ضرور ہی کہ (۴د − ۲)/۳ − (۳د)/۳ =

(د − ۲)/۳ = صہ اور د − ۲ = ۳صہ اور د = ۳صہ + ۲ اب اگر

صہ = ۱ تو د = ۳ + ۲ = ۵ اور لا = ۸ اور اگر صہ = ۳ تو اور قیمتین د اور لا کی معلوم ہو سکتی ہین

(۳) مثال معلوم ہی ہمین مساوات ۹لا + ۱۳د = ۲۰۰۰ اور چاہتے ہین ہم دریافت کرنی

قیمتین لا اور د کی کہ اعداد صحیح ہون اب ظاہر ہی کہ

لا = (۲۰۰۰ − ۱۳د)/۹ = ۲۲۲ − د + (۲ − ۴د)/۹ = صہ اور ∴ (۲ − ۴د)/۹ = صہ

اور چونکہ (۲ − ۴د)/۹ × ۲ = (۴ − ۸د)/۹ = صہ اور (۹د)/۹ بھی = صہ

تو معلوم ہوا کہ (۴ − ۸د)/۹ + (۹د)/۹ = (د + ۴)/۹ = صہ اور ∴ د + ۴ = ۹صہ

اور د = ۹صہ − ۴ اور اگر صہ = ۱ تو د = ۹ − ۴ = ۵ اور لا = ۲۱۵ اور اسطور سے

اور قیمتین د اور لا کی معلوم ہو سکتی ہیں

(۴) معلوم ہے ہمین مساوات ۲۴ لا = ۳۱ د + ۱۶ اور جاننے مین ہم دریافت کرنی قیمت لا اور د کی
جواب لا = ۵ اور د = ۸

(۵) ۱۴ لا = ۵ د + ۷ بتاؤ کیا ہین قیمتین لا اور د کی — جواب لا = ۳ اور د = ۷

(۶) ۲۷ لا = ۱۶۰۰ — ۱۶ د ایضاً — جواب لا = ۴۸ اور د = ۱۶

(۷) ۸۷ لا + ۵۶ ہ د = ۱۵۴۱۰ ایضاً — جواب لا = ۱۳۰ اور د = ۵۰

شکل دوسری

جاننے ہیں دریافت کرنا ایک عدد صحیح مثل لا کی کہ اگر قسمت کرین ہم اوسی کی اعداد صحیح پر مثل ط اور ص اور ع وغیرہ سے کے، تو بعد عمل تقسیم کی باقی رہین اعداد صحیح مثل ا اور ب اور ح وغیرہ

قاعدہ

تفریق کرو ہر عدد باقی کو لا مین سے متواتر اور ہر حاصل تفریق کو قسمت کرو اوپر اعداد مفروضہ ط ص ع وغیرہ کی علیحدہ علیحدہ تو ظاہر ہی حاصل ہونگی یہ صورتیں

جبریہ $\frac{لا - ا}{ط}$ اور $\frac{لا - ب}{ص}$ اور $\frac{لا - ح}{ع}$ وغیرہ اور ہر واحد انمین کا بالضرور = صہ

تعبیر کرو اوس قیمت صحیح مقدار لا کو جو اول کسر سے حاصل ہو ساتھہ ت کی اور رکھو اوسی کسر دوسری مین اب دریافت کرو کم سی کم قیمت ت کو کسر دوسری مین سے بوسیلہ قاعدہ گذشتہ کی اور تعبیر کرو اوسی ت سے اور بعد ازان قیمت لا کی نسبت د کی دریافت کرو اور رکھو اوسی کسر تیسری مین اور اس کسر مین د کی کم سی کم قیمت دریافت کرو اور تعبیر کرو اوسکو ر سی اور جس وقت یہہ قیمت لا کی نسبت ر کی لکھین ہم اوسی کسر چوتھی مین اور یہی عمل جاری رکھین تو آخر شش کو حاصل ہوگا عدد صحیح مطلوبہ

مثالین

۱ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا ایک ایسا چھوٹا سے چھوٹا عدد صحیح کہ اگر قسمت کرین ہم اوسی ۱۷ پر تو باقی رہتا ہے عدد ۷ کا اور اگر قسمت کرین اوسکو ۲۶ پر تو باقی رہتا ہے عدد ۱۳ کا فرض کرو کہ عدد مطلوبہ = لا تو ظاہر ہی کہ ہو وین گے یہ مساواتین $\frac{لا - ۷}{۱۷}$ = صہ اور $\frac{لا - ۱۳}{۲۶}$ = صہ اب فرض کرو کہ $\frac{لا - ۷}{۱۷}$ = د اور ∴ لا = ۱۷ د + ۷ اور جس وقت لکھین ہم اس قیمت لا کو کسر دوسری مین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $\frac{۱۷ د - ۶}{۲۶}$ = صہ لیکن

$\frac{۲۶ی}{۲۶} - \frac{۲۶ی}{۲۹}$ ∴ اور ص = $\frac{۱-۳ی}{۲۶} = \frac{۹ی+۶}{۲۶}$ = ص

یا $\frac{۹ی+۶}{۲۶} \times ۳ = \frac{۲۷ی+۱۸}{۲۶} = ی + \frac{ی+۱۸}{۲۶}$ = ص اور ∴ $\frac{ی+۱۸}{۲۶}$ = ص

اور ∴ ی = ۲۶ ص − ۱۸ اب اگر ص = ۱ تو ی = ۸ اور ∴ لا = ۱۷ی + ۷ = ۱۷ × ۸ + ۷ = ۱۴۳

۲ چاہتے ہیں دریافت کرنا ایک ایسا عدد صحیح کہ اگر قسمت کریں ہم اوسی علیحدہ علیحدہ اعداد ۱۱ ۱۹ ۲۹ پر تو باقی رہتی ہیں سیہ اعداد ۳ ۵ ۱۰ فرض کہ عدد مطلوبہ = لا اور اسیواسطے حاصل ہونگی سیہ مساواتیں

$\frac{لا - ۳}{۱۱}$ = ص اور $\frac{لا - ۵}{۱۹}$ = ص اور $\frac{لا - ۱۰}{۲۹}$ = ص فرض کرو کہ

$\frac{لا - ۳}{۱۱}$ = ی اور ∴ لا = ۱۱ی + ۳ اور جسوقت لکھیں ہم اسس قیمت لاکو دوسری کسر میں تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $\frac{۱۱ی - ۲}{۱۹}$ = ص اور ∴ ۲ × $\frac{۱۱ی - ۲}{۱۹} = \frac{۲۲ی - ۴}{۱۹} = ی + \frac{۳ی - ۴}{۱۹}$ = ص

اور ∴ $\frac{۳ی - ۴}{۱۹}$ = ص لیکن یہہ ظاہر ہے کہ

$۶ \times \frac{۳ی - ۴}{۱۹} = \frac{۱۸ی - ۲۴}{۱۹} = \frac{۱۸ی - ۵}{۱۹} - ۱$ = ص

اور ∴ $\frac{۱۸ی - ۵}{۱۹}$ = ص لیکن $\frac{۱۹ی}{۱۹}$ = ص اور اسیواسطے یہہ ظاہر ہے کہ

$\frac{۱۹ی}{۱۹} - \frac{۱۸ی - ۵}{۱۹} = \frac{ی + ۵}{۱۹}$ = ص اب فرض کرو کہ $\frac{ی + ۵}{۱۹}$ = د اور ∴ ی = ۱۹د − ۵ اور ظاہر ہے کہ لا = ۱۱ی + ۳ = ۱۱ × (۱۹د − ۵) + ۳ = ۲۰۹د − ۵۲ اور جسوقت لکھیں ہم یہہ قیمت لا کی تیسری کسر میں تو حاصل ہوگا یہہ

$\frac{۲۰۹د - ۶۲}{۲۹} = ۷د - ۲ + \frac{۶د - ۴}{۲۹}$ = ص اور ∴ $\frac{۶د - ۴}{۲۹}$ = ص

لیکن $\frac{۶د - ۴}{۲۹} \times ۵ = \frac{۳۰د - ۲۰}{۲۹} = د + \frac{د - ۲۰}{۲۹}$ = ص

اور ∴ $\frac{د - ۲۰}{۲۹}$ = ص اور اسیواسطے د = ۲۹ ص + ۲۰ اب جسوقت ص = ۰ تو حاصل ہوگی یہہ مساوات د = ۲۰ اور ∴ لا = ۲۰۹ × ۲۰ − ۵۲ = ۴۱۲۸

۳ چاہتے ہیں دریافت کرنا ایک ایسا عدد صحیح کہ اگر قسمت کریں ہم اسکو ۹ پر تو باقی رہتا ہے عدد ۳ کا

لیکن جسوقت قسمت کرتے ہین ہم اوسی ۲۸ پر تو باقی رہتا ہی عدد ۱۳ کا   جواب عدد مطلوبہ ۳۴۹ ہی

۴   دہ کونسا چھوٹے سی چھوٹا عدد صحیح ہی کہ اگر قسمت کرین ہم اوسے علیحدہ علیحدہ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ پر تو باقی کچھ نہین رہتا ہی   جواب عدد مطلوبہ ۲۵۲۰ ہی

فصل دوسری بیچ بیان ایسی سوالات غیر منقطع کے جنہین بوسیلہ دو مساواتون کے دریافت کرنا ہوتا ہی تین یا زیادہ مقدارون مجہول کا

سوال ۱   ایک شخص نے تیس فقیرون کو کہ اونمین عورتین اور مرد اور بچی تھی ۵۰ روپیہ دیئے ساتھ اس شرط کی کہ ہر مرد کا حصہ تین روپیہ ہوا اور ہر عورت کا حصہ ۲ روپیہ اور ہر بچہ کا حصہ ۱ روپیہ بتاؤ ان سب فقیرونمین سے کتنے مرد اور کتنی عورتین اور کتنی بچے تھی فرض کرو کہ تعداد مردون کی = ل اور عورتون کی = ی اور بچون کی = د اور اب ظاہر ہی کہ حاصل ہونگی یہہ دو مساواتین

ل + ی + د = ۳۰ .... (۱)

۳ل + ۲ی + د = ۵۰ .... (۲)

مساوات (۱) کو ۳ مین ضرب کرو اور حاصل ضرب مین سے مساوات (۲) کو تفریق کرو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ی + ۲د = ۴۰ اور ظاہر ہی کہ اس مساوات سی موافق قاعدون گذشتہ کی حاصل ہوجائینگی ہمین قیمتین ی اور د کی اور بعد ازان ل کی قیمت بہی معلوم ہوجائیگی یہہ سوال اور طرح سے بہی حل ہوسکتا ہی اور وہ طرح یہہ ہی مساوات اول سی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات د = ۳۰ − ل − ی اور یہان سی یہہ بات معلوم ہوتی ہی کہ ل + ی کم ہی ۳۰ سی اور جسوقت لکہین یہہ قیمت د کی مساوات (۲) مین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ۲ل + ی + ۳۰ = ۵۰ اور ∴ ی = ۲۰ − ۲ل اور ∴ ی + ل = ۲۰ − ل پس معلوم ہوا کہ ۲۰ − ل بہی ۳۰ سے کم ہی پس ہم فرض کرسکتے ہین واسطے ل کی کوئی عدد بشرطیکہ وہ کم ۱۰ سی ہو اور اسیواسطے حاصل ہوتی ہین گیارہ جواب آئندہ

ل =	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
ی =	۲۰	۱۸	۱۶	۱۴	۱۲	۱۰	۸	۶	۴	۲	۰
د =	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰

اور اگر چھوڑین اول اور آخر جواب کو تو باقی رہینگے ۹ جواب

سوال ۲ ایک شخص نے سو جانور خرید کئے اسی نرخ سے کہ فی بیل دس روپیہ اور فی گائے ۵ روپیہ اور فی بچھڑہ ۲ روپیہ اور فی بکری ۸ آنہ بتاؤ ان سو جانوروں میں کتنے بیل تھے اور کتنی گائیں اور کتنے بچھڑے اور کتنی بکریاں فرض کرو کہ تعداد بیلوں کی = لا اور تعداد گاؤں کی = ی اور بچھڑوں کی = د اور بکریوں کی = ر پس اب حاصل ہوگی سے دو مساواتیں

لا + ی + د + ر = ۱۰۰ .... (۱)

۱۰ لا + ۵ ی + ۲ د + ½ ر = ۱۰۰ .... (۲)

اب جسوقت دور کریں ہم کسر کو مساوات (۲) میں سے تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

۲۰ لا + ۱۰ ی + ۴ د + ر = ۲۰۰ اور جسوقت تفریق کریں اس مساوات میں سے مساوات (۱) تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ۱۹ لا + ۹ ی + ۳ د = ۱۰۰ اور اسی واسطے حاصل ہوگا یہہ

۳ د = ۱۰۰ − ۱۹ لا − ۹ ی اور جسوقت قسمت کریں ہم تین پر تو یہہ حاصل ہوگا

د = ۳۳ + ⅓ − ۶ لا − ⅓ لا − ۳ ی یا د = ۳۳ − ۶ لا − ۳ ی + (۱ − لا)/۳ پس

اب ضرور ہے کہ ۱ − لا یا لا − ۱ قسمت ہوسکے ۳ پر اور اسی واسطے فرض کرو کہ

لا − ۱ = ۳ ط اور ∴ لا = ۳ ط + ۱

ی = ی

د = ۲۷ − ۱۹ ط − ۳ ی

ر = ۷۲ + ۲ ی + ۱۶ ط

یہاں سے یہہ بات معلوم ہوتی ہے کہ ۱۹ ط + ۳ ی بالضرور کم ہے ۲۷ سے پس اگر ملحوظ رہے یہہ شرط تو ہم واسطے ی اور ط کی کوئی قیمت فرض کرسکتے ہیں. اول اگر فرض کریں ہم کہ

ط = ۰ تو حاصل ہوگا یہہ

لا = ۱

اور ی = ی

د = ۲۷ − ۳ ی

ر = ۷۲ + ۲ ی

دویم فرض کرو کہ ط = ۱ تو حاصل ہونگی یہ مساواتین ل = ۴ ء = ۶ = ۸ - ۳ء
ر = ۸۸ + ۲ء لیکن ہم نہین فرض کرسکتے ہین ط = ۲ کیونکہ اس صورت مین د ہوجاتی ہی منفی اب
ظاہر ہی کہ صورت اول مین ء نہین زیادہ ہوسکتا ۹ سی اور صورت دوسری مین وہ نہین زیادہ ہوسکتا
ہی ۲ سی پس صورت اول سی حاصل ہوتی ہین دس جواب آئندہ

اجوبہ	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
ل =	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
ء =	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
د =	۲۷	۲۴	۲۱	۱۸	۱۵	۱۲	۹	۶	۳	۰
ر =	۷۲	۷۴	۷۶	۷۸	۸۰	۸۲	۸۴	۸۶	۸۸	۹۰

اور صورت دوسری سی یہ تین جواب حاصل ہوتے ہین

اجوبہ	۱	۲	۳
ل =	۴	۴	۴
ء =	۰	۱	۲
د =	۸	۵	۲
ر =	۸۸	۹۰	۹۲

پس کل جواب تعداد مین ۱۳ ہین اور اگر انمین سے خارج کرین ہم اون جوابون کو جو صفر ہین تو باقی رہینگے دس جواب

جو شخص مہارت مساواتون غیر منقطع کی حل کرنے مین پیدا کیا چاہے اوسی لازم ہی کہ سوالات گذشتہ کو اور ان ترکیبون کو جن سی وہ حل ہوئی ہین اور دو علوم متعارفہ کو کہ پہلی مذکور ہوئی ہین خوب توجہ سی ملاحظہ کری اب ہم حل کرین گے چند مساواتین غیر منقطع جنمین حاصل ضرب اور بعد دو وغیرہ مقدارون مجہول کے دخل رکھتی ہین مثلاً حل کرو اس مساوات کو ل ء + ل + ء = ۷۹ ظاہر ہی کہ اس مساوات سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ل ء + ء = ۷۹ - ل اور

$$\therefore \text{ء} = \frac{۷۹ - \text{ل}}{\text{ل} + ۱} = -۱ + \frac{۸۰}{\text{ل} + ۱}$$

اور اب ضرور ہی کہ ہو وی ل + ۱ کوئی ایسا عدد صحیح کہ اوسپر ۸۰ قسمت ہوسکی ظاہر ہی کہ وے اعداد جن پر ۸۰ قسمت ہوسکی بہت ہین اور اسیواسطی قیمتین ل کی بھی بہت ہونگی جیسکہ جداول آئندہ سی ۲، ۴، ۵، ۸، ۱۰، ۱۶، ۲۰، ۴۰، ۸۰ واضح ہوگا مقسوم علیہ ۸۰ کی اور یہہ اسیواسطی

ل = ۱، ۳، ۴، ۷، ۹، ۱۵، ۱۹، ۳۹، ۷۹

اور اسیواسطی ء = ۳۹، ۱۹، ۱۵، ۹، ۷، ۴، ۳، ۱، ۰

لیکن چونکہ لا اور ر کی قیمتیں ایک ہی ہیں صرف فرق یہہ ہی کہ اونکی ترتیب برعکس ہی تو ظاہر ہی کہ حقیقت میں ۵ جواب ہیں اور وہ یہ ہیں لا = ۰ ۱ ۳ ۴ ۷ اور ر = ۷۹ ۳۹ ۱۹ ۱۵ ۹

مساوات گذشتہ ہی ایک خاص صورت اس مساوات عام کی لا ر + ط لا + ص ر = س اور یہہ اسطرح سی حاصل ہوتی ہی لا ر + ص ر = س − ط لا اور

∴ ر = (س − ط لا)/(لا + ص) = − ط + (ط ص + س)/(لا + ص) پس لا کی واسطی کوئی ایسا عدد تجویز کرنا چاہیئے کہ وہ پورا کری اوس شرط کو جو تعبیر کی گئی ہی اس اخیر مساوات سی چاہتے ہیں ہم دریافت کرنی ایسی قیمت واسطی لا کی کہ صورت √(ط + ص لا) کا جذر نکل سکے فرض کرو کہ ط + ص لا = ر² اور

∴ لا = (ر² − ط)/ص اب اگر مطلوب ہو ہمیں قیمت لا کی اعداد صحیح میں تو لازم ہی کہ فرض کریں ہم واسطی ر کی ایسی قیمت کہ اگر اوسکے مجذور میں سی تفریق کریں عدد ط کو قسمت کریں ہم حاصل تفریق کو ص پر تو خارج قسمت ایک عدد صحیح ہو لیکن اگر کسر ہی مطلوب ہو تو صرف یہہ شرط ملحوظ ہونی چاہئے کہ ر² زیادہ ہو ط سی مثلاً وہ کونسا عدد ہی کہ اگر اوسی ۱۱ میں ضرب کریں اور حاصل ضرب پر عدد ۳ کا زیادہ کریں تو مجموعہ ایک مجذور رہتا ہی اب ظاہر ہی کہ یہہ مساوات ہوگی ۱۱ لا + ۳ = ر² اور ∴ لا = (ر² − ۳)/۱۱ اب اگر ر = ۵ تو لا = (۲۵ − ۳)/۱۱ = ۲۲/۱۱ = ۲ اور اگر ر = ۴ تو لا = (۱۶ − ۳)/۱۱ = ۱۳/۱۱ = ۱ ۲/۱۱ دریافت کیا چاہتے ہیں ہم ایسی قیمت واسطی لا کی کہ صورت √(ط + لا²) کا جذر نکل سکے فرض کرو کہ

√(ط + لا²) = ر + لا اور ∴ ط + لا² = ر² + ۲ ر لا + لا² اور ∴ ر² + ۲ ر لا = ط

اور لا = (ط − ر²)/۲ ر اگر ط = ۱۰ اور ر = ۲ تو لا = (۱۰ − ۴)/۴ = ۶/۴ = ۳/۲

واضح ہو کہ اگر ط اس شکل کا ہو ر² + ۲ ر لا جہاںکہ ر کوئی عدد ہوسکتا ہی تو خواہ لا کی واسطی کچھہی قیمت فرض کریں ط + لا² ہمیشہ مجذور رہتا ہی چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا ایسی دو مجذور کا کہ اونکا حاصل جمع ہی مجذور ہووے فرض کرو کہ لا² اور ر² دو مجذور مطلوبہ ہیں اور یہہ فرض کرو کہ لا² + ر² = (ر لا − ر)² اور

∴ لا² + ر² = ر² لا² − ۲ ر لا ر + ر² ∴ لا² = ر² لا² − ۲ ر لا ر اور ∴ لا = ر² لا − ۲ ر ر اور ∴ لا (ر² − ۱) = ۲ ر ر اور ∴ لا = ۲ ر ر/(ر² − ۱) اب فرض کرو کہ ر = ر² − ۱ اور ∴ لا = ۲ ر

اب جسوقت کوئی قیمت واسطی ر کے فرض کرینگے اوسوقت قیمتیں لا اور ر کی معلوم ہو جائینگی مثلاً ر = ۲ تو ر = ۳ اور لا = ۴ اور لا² + ر² = ۱۶ + ۹ = ۲۵ = ۵² چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا دو ایسی مجذور کا کہ اونکا حاصل تفریق ہی ایک عدد مجذور رہتا ہو فرض کرو کہ لا² اور ر²

مجذور مطلوبہ ہین اور یہہ بہی مان لو کہ لا۲ − و۲ = (لا − ری)۲ = لا۲ − ۲ ری لا + ر۲ ی۲ اور اسسیواسطی
− و۲ = − ۲ ری لا + ر۲ ی۲ یا ۲ ر لا = (ر۲ + ۱) ی اور لا = (ر۲ + ۱) ی / ۲ر اب اگر ی = ۲ ر تو
لا = ر۲ + ۱ مثلاً اگر ر = ۲ تو ی = ۴ اور لا = ۵ اور اسسیواسطی ہوگا یہہ حاصل
لا۲ − و۲ = ۲۵ − ۱۶ = ۹ = ۳۲

فصل تیرہوین بیچ بیان ایک خاص ترکیب کی جسکی ذریعہ سی صورت √(ط ن۲ + ۱) ایک مجذور اعداد صحیح مین ہوجاسئے

بنانا صورت جبریہ √(ط ن۲ + ۱) کو ایک کامل مربعہ کوئی امر مشکل نہوتا اگر دریافت کرنی ہوتی ہمین فقط کسور واسطی مقدار ن کے کیونکہ اس صورت مین ہمین فقط یہہ بات ضرور ہوتی کہ فرض کرسیتے ہم

√(ط ن۲ + ۱) = ۱ + ن ف / ق اور اسسے حاصل ہوتی یہہ مساوات ط ن۲ + ۱ = ۱ + ۲ ن ف / ق + ن۲ ف۲ / ق۲

اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ط ن۲ = ۲ ن ف / ق + ن۲ ف۲ / ق۲ اور جسوقت قسمت کرتے ہم دونو طرف اس مساوات کو ن پر تو حاصل ہوئی یہہ مساوات ط ن = ۲ ف / ق + ن ف۲ / ق۲ یا

ط ن − ن ف۲ / ق۲ = ۲ ف / ق یا ن (ط ق۲ − ف۲) / ق۲ = ۲ ف / ق یا ن = ۲ ق ف / (ط ق۲ − ف۲)

اور اس مساوات سی بیشمار قیمتین واسطی ن کے معلوم ہوجاتین لیکن ویے سب کسور ہین اور نہ اعداد صحیح پس ظاہر ہی کہ یہہ ترکیب نہین جاری ہوسکتی ہی جسوقت دریافت کیا جاوین قیمتین ن کی اعداد صحیح مین اور اسسیواسطی لازم ہی کہ رجوع کرین طرف اور ترکیبون کے جنسی مطلب ہمارا حاصل ہو واسطی اسس مطلب کے لازم ہی کہ نکال ڈالین ہم تمام اون صورتون کو جنمین ط ایک مقدار منفی ہو اور تمام اون صورتون کو بہی جنمین ط ایک مجذور ہو کسواسطی اسس صورت مین ط ن۲ ایک عدد مجذور ہوگا اور چونکہ کوئی مجذور جسوقت کہ اوسکی اوپر عدد ایک کا زیادہ کیا جاتا ہی مجذور اعداد صحیح کا نہین رہتا ہی تو لازم آتا ہی اسسے یہہ کہ اگر ط ایک عدد مجذور ہو تو ط ن۲ + ۱ ایک مجذور صحیح اعداد کا نہین ہوسکتا ہی اسیجای واضح ہو کہ جسوقت معلوم ہوجائیگی ہمین کوئی ترکیب دریافت کرنی کم سے کم ایک قیمت ن کی ایسی کہ اوسکی ذریعہ سی ط ن۲ + ۱ ایک کامل مجذور اعداد صحیح کا ہوگا اوسوقت معلوم ہوسکتی ہین ہمین بیشمار اور قیمتین ن کی پس اب لکہین گے ترکیب دریافت

کرنی کم سی کم قیمت ن کی اور یہہ ترکیب مہندس پیل نی کہ ایک شخص قوم انگریزی مین سے تہا ایجاد کی تہی واضح ہو کہ یہہ ترکیب ایسی نہین ہی کہ سب قسم کی مثالون اس فصل کی یر ایکہی طریقہ سی جاری ہو سکے بلکہ وہ مختلف طریقون سے اور مختلف درجہ سہولت سی مختلف مثالون کی حل کرنی مین جاری ہو سکتی ہی اول لیتے ہین ہم ایک بہت سہل مثال یعنی چاہتی ہین دریافت کرنی کوئی ایسی قیمت واسطی ن کے کہ صورت جبریہ 2ن^2+1 ایک مجذور کامل اعداد صحیح کا ہو جائی اس جای ظاہر ہی کہ جذر $\sqrt{2\text{ن}^2+1}$ کا زیادہ ہی ن سے اور کم ہی $\sqrt{2}$ ن سے پس اگر تعبیر کرین اس جذر کو $\text{ن}+\text{ف}$ سے تو ضرور ہی کہ ف کم ہو ن سے اور اس صورت مین حاصل ہوگی یہہ مساوات $\sqrt{2\text{ن}^2+1} = \text{ن}+\text{ف}$ اور جسوقت مجذور کرین ہم دونو طرف اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $2\text{ن}^2+1=\text{ن}^2+2\text{ن}\text{ف}+\text{ف}^2$

اور جسوقت دور کرین ن^2 کو دونو طرفون اس مساوات سی اور لاوین تمام اجزا کو جنمین ن پایا جاتا ہی ایک طرف مساوات کی اور باقی اجزا کو دوسری طرف مساوات کی تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $\text{ن}^2 - 2\text{ف}\text{ن} = \text{ف}^2 - 1$ اور جسوقت کامل کرین ہم مربعہ کو موافق قاعدہ مساوات درجہ دوم کے تو ہوگی $\text{ن}^2 - 2\text{ف}\text{ن} + \text{ف}^2 = 2\text{ف}^2 - 1$ اور جسوقت جذر نکالین دونو طرفون اس مساوات کا تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $\text{ن} - \text{ف} = \pm\sqrt{2\text{ف}^2-1}$ اور $\text{ن} = \text{ف} \pm \sqrt{2\text{ف}^2-1}$ اب ظاہر ہی کہ تا کہ ن ایک کامل مجذور ہو جائے تو ضرور ہی کہ $\sqrt{2\text{ف}^2-1}$ ایک کامل مجذور ہو لیکن ظاہر ہے کہ جتنا مشکل ہے دریافت کرنا کسی ایسی قیمت کا واسطی ن کے کہ $\sqrt{2\text{ن}^2+1}$ ایک کامل مجذور ہو جای اوتنا ہی مشکل ہی دریافت کرنا کسی ایسی قیمت کا واسطی ف کے کہ $\sqrt{2\text{ف}^2-1}$ ایک کامل مجذور ہو جائے پس ہمین لازم ہی کہ پہر کوئی ایسا عمل کرین کہ اوسکی وسیلہ سے کچہہ سہولت حاصل کرنی مطلب مین پیدا ہوا اب چونکہ $\sqrt{2\text{ف}^2-1}$ زیادہ ہی ف سی اور اسی سبب سی ن زیادہ ہی ٢ف سے تو ہم فرض کرین گے کہ $\text{ن} = 2\text{ف}+\text{ق}$ اور موافق اس فرض کے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $2\text{ف}+\text{ق} = \text{ف} \pm \sqrt{2\text{ف}^2-1}$ اور جسوقت مجذور کرتے ہین ہم دونو طرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $\text{ف}^2 + 2\text{ف}\text{ق} + \text{ق}^2 = 2\text{ف}^2 - 1$ اور اسیواسطے $\text{ف}^2 = 2\text{ف}\text{ق} + \text{ق}^2 + 1$ اور اس مساوات درجہ دوم مین ف کو مقدار مجہول فرض کرکے حل کرنی سے حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت ف کی $\text{ف} = \text{ق} \pm \sqrt{2\text{ق}^2+1}$ پس یہان سے معلوم ہوتا ہی یہہ کہ تا کہ ف ایک ایسا عدد ہو جاوے کہ مقدار $\sqrt{2\text{ف}^2-1}$ ایک کامل مجذور ہو جائے تو لازم ہے کہ $\sqrt{2\text{ق}^2+1}$ ایک کامل مجذور ہو اور اس صورت مین ظاہر ہی کہ اگر $\text{ق}=0$ تو $\sqrt{2\text{ق}^2+1}$ یعنی $\sqrt{1}$ ایک کامل مجذور ہوتا ہی اور یہان سے معلوم ہوا کہ $\text{ف}=1$ اور

اور اسیواسطی ن = ف + √(۲ف۲ − ۱) = ۱ + √(۲ − ۱) = ۲

۲ن۲ + ۱ = ۲ × ۴ + ۱ = ۸ + ۱ = ۹ = ۳۲ = کامل مجذور ہے کے امید ہی کہ فقط اس سہل مثال سے
ترکیب مہندس پیل کی طالب علم کی خیالمین آجایگی اور وہ دلمین بیٹھ جائگی اگر وہ توجہ کریگا اون مثالونکی
طرف جو آگی لکھی جاتی ہین اب فرض کرو کہ ط = ۳ یعنی چاہتے ہین ہم تبدیل کرنا ۳ن۲ + ۱ کو ایک عدد
مجذور سی اس موافق مرقومہ بالاکی فرض کرو کہ √(۳ن۲ + ۱) = ن + ف اور جسوقت جاری کرتے ہین
ہم عمل مجذور کا دونون طرفون اس مساوات پر تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ۳ن۲ + ۱ = ن۲ + ۲فن + ف۲
اور ن۲ − ف ن = (ف۲ − ۱)/۲ اور اگر ن کو مقدار مجہول مقرر کرکے حل کرین ہم اس مساوات درجہ
دوم کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ن = (ف + √(۳ف۲ − ۲))/۲ اب چونکہ √(۳ف۲ − ۲)
زیادہ ہی ف سی اور اسی سبب سے ن زیادہ ہی ۲ف/۲ یعنی ف سی تو فرض کرو کہ ن = ف + ق اور
چونکہ ن = (ف + √(۳ف۲ − ۲))/۲ تو معلوم ہوا کہ

ف + ق = (ف + √(۳ف۲ − ۲))/۲ اور اسیواسطی ۲ف + ۲ق =

ف + √(۳ف۲ − ۲) اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ف + ۲ق = √(۳ف۲ − ۲)
اور جسوقت مجذور کرین دونون طرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات
ف۲ + ۴فق + ۴ق۲ = ۳ف۲ − ۲ یا ف۲ − ۲فق = ۲ق۲ + ۱ اور اس سے حاصل ہوتی
ہی یہہ مساوات ف = ق + √(۳ق۲ + ۱) اور جسوقت فرض کیا جاوی ق = ۰ اوسوقت حاصل ہوتے
ہیے مساواتین ف = ۱ اور ن = ۱ اور √(۳ن۲ + ۱) = ۲ اب فرض کرو کہ ط = ۵ یعنی چاہتے
ہین ہم دریافت کرنا ایسا عدد واسطی ن کے کہ صورت جبریہ ۵ن۲ + ۱ ایک کامل مجذور ہو جانے
اب ظاہر ہی کہ جذر ۵ن۲ + ۱ کا زیادہ ہی ۲ن سے اور اسیواسطی ہم فرض کرتے ہین کہ
√(۵ن۲ + ۱) = ۲ن + ف اور جسوقت مجذور کرتے ہین ہم دونون طرفون اس مساوات کو تو حاصل
ہوتا ہی یہہ ۵ن۲ + ۱ = ۴ن۲ + ۴فن + ف۲ اور اس مساوات سی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات
ن۲ − ۴ف ن = ف۲ − ۱ اور حل کرنی سے اس مساوات درجہ دوم کو ہم پاتی ہین یہہ قیمت ن کی
ن = ۲ف + √(۵ف۲ − ۱) اب چونکہ √(۵ف۲ − ۱) زیادہ ہی ۲ف سی تو لازم آتا ہی اس سے
یہہ کہ ہووی ن زیادہ ۴ف سی اور اسیواسطی ہم فرض کرتے ہین کہ ن = ۴ف + ق

اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۲ ف + ق = √(۵ ف۲ − ۱) اور جسوقت مجذور کرین
دونو طرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۵ ف۲ − ۱ = ۴ ف۲ + ۴ ف ق + ق۲
اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ف۲ − ۴ ف ق = ق۲ + ۱ اور جسوقت فرض کرکی ق کو بطور
مقدار مجہول سیکے حل کرستے ہین ہم اس مساوات درجہ دوم کو تو حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت ف کی
ف = ۲ ق + √(۵ ق۲ + ۱) اور چونکہ کم سی کم قیمت ف کی حاصل ہوتی ہی جسوقت ق = ۰ تو حاصل
ہوگی ہمین یہہ قیمت ف کی ف = ۱ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت واسطی ن کے
ن = ۲ ف + √(۵ ف۲ − ۱) = ۲ + √۴ = ۲ + ۲ = ۴ اور اسیواسطی
√(۵ ن۲ + ۱) = ۹ اور ۵ ن۲ + ۱ = ۸۱ اب فرض کرو کہ ط = ۶ یعنی چاہتے ہین ہم دریافت کرنا ایک
اب عدد واسطے ن کے کہ ۶ ن۲ + ۱ ایک کامل مربع ہوجاوے اس سے ظاہر ہی کہ جذر ۶ ن۲ + ۱
کا زیادہ ہی ۲ ن سی اور کم ۳ ن سے اور اسیواسطی فرض ہین ہم کہ √(۶ ن۲ + ۱) = ۲ ن + ف اور
جسوقت مجذور کرستے ہین ہم دونو طرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات
۶ ن۲ + ۱ = ۴ ن۲ + ۴ ن ف + ف۲ اور اسیواسطی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات درجہ دوم کی
ن۲ − ۲ ف ن = (ف۲ − ۱)/۲ اور اسکو حل کرنی سی حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت ن کی

ن = ف + √(۶ ف۲ − ۲)/۲ = (۲ ف + √(۶ ف۲ − ۲))/۲

اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ن زیادہ ہی ۲ ف سی اور اسیواسطی ہم فرض کرینگے کہ ن = ۲ ف + ق
اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات ۴ ف + ۲ ق = ۲ ف + √(۶ ف۲ − ۲) اور جسوقت دور کرین
ہم دونو طرفون اس مساوات مین سے ۲ ف کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ۲ ف + ۲ ق = √(۶ ف۲ − ۲)
اور جسوقت مجذور کرستے ہین ہم دونو طرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات
۴ ف۲ + ۸ ق ف + ۴ ق۲ = ۶ ف۲ − ۲ اور اسیواسطی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات
۲ ف۲ − ۸ ق ف = ۴ ق۲ + ۲ اور ف۲ − ۴ ق ف = ۲ ق۲ + ۱ اور حل کرنی اس مساوات درجہ
دوم سی حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت واسطی ف کے ف = ۲ ق + √(۶ ق۲ + ۱) اب ظاہر ہی اس صورت
اخیر کی وہی شکل ہی جو صورت مفروض کی ہی تو واسطی حاصل کرنی کم سے کم قیمت ف کی ضرور ہی کہ فرض کرین
ہم ق = ۰ اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات ف = ۱ اور اسیواسطی

$\text{ن} = \frac{\text{۲ف} + \sqrt{\text{۶ف}^{۲} - ۲}}{۲} = \frac{۲ + \sqrt{۴}}{۲} = \frac{۴}{۲} = ۲$ اور اسیواسطے

$\sqrt{\text{۶ن}^{۲} + ۱} = \sqrt{۶ \times ۲^{۲} + ۱} = \sqrt{۲۴ + ۱} = \sqrt{۲۵} = ۵$ یعنی

$\sqrt{\text{۶ن}^{۲} + ۱} = ۵$ اب ہم فرض کرتے ہین کہ ط = ۷ یعنی ہم چاہتے ہین کہ کوئی ایسا عدد واسطی ن کے دریافت کرین کہ صورت $\sqrt{\text{۷ن}^{۲} + ۱}$ ایک کامل مجذور ہو جاے اب چونکہ جذر $\sqrt{\text{۷ن}^{۲} + ۱}$ اکا زیادہ ہی ۲ن سے تو فرض کرتے ہین ہم کہ $\sqrt{\text{۷ن}^{۲} + ۱} = \text{۲ن} + \text{ف}$ اور اگر دونو طرفون اس مساوات کا مجذور لین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $\text{۷ن}^{۲} + ۱ = \text{۴ن}^{۲} + \text{۴ن ف} + \text{ف}^{۲}$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $\text{۳ن}^{۲} - \text{۴ف ن} = \text{ف}^{۲} - ۱$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

$\text{ن}^{۲} - \frac{\text{۴ف ن}}{۳} = \frac{\text{ف}^{۲} - ۱}{۳}$ اور حل کرنی سی اس مساوات درجہ دوم کی حاصل ہوگی یہہ قیمت

واسطی ن کے $\text{ن} = \frac{\text{۲ف} + \sqrt{\text{۷ف}^{۲} - ۳}}{۳}$ اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ن زیادہ ہی $\frac{۴}{۳}$ ف سی اور اسیواسطی ن زیادہ ہی ف سے اور اسیواسطی فرض کرتے ہین ہم $\text{ن} = \text{ف} + \text{ق}$ اور یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ $\text{۳ف} + \text{۳ق} = \text{۲ف} + \sqrt{\text{۷ف}^{۲} - ۳}$ یا $\text{ف} + \text{۳ق} = \sqrt{\text{۷ف}^{۲} - ۳}$ اور جسوقت مجذور کرین ہم دونون طرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $\text{ف}^{۲} + \text{۶ف ق} + \text{۹ق}^{۲} = \text{۷ف}^{۲} - ۳$ اور اس سے حاصل ہوتا ہی یہہ

$\text{۶ف}^{۲} - \text{۶ق ف} = \text{۹ق}^{۲} + ۳$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

$\text{ف}^{۲} - \text{ق ف} = \frac{\text{۳ق}^{۲} + ۱}{۲}$ اور حل کرنی سی اس مساوات درجہ دوم کی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $\text{ف} = \frac{\text{ق} + \sqrt{\text{۷ق}^{۲} + ۲}}{۲}$ اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ف زیادہ ہی $\frac{\text{۳ق}}{۲}$ سی اور اسیواسطی ق سے پس فرض کرتے ہین ہم کہ $\text{ف} = \text{ق} + \text{ک}$ اور اسیواسطی $\text{۲ق} + \text{۲ک} = \text{ق} + \sqrt{\text{۷ق}^{۲} + ۲}$ اور نیز $\text{ق} + \text{۲ک} = \sqrt{\text{۷ق}^{۲} + ۲}$ اور جسوقت مجذور کرین ہم دونون طرفون اس مساوات کو اسوقت حاصل ہوگی یہہ مساوات $\text{ق}^{۲} + \text{۴ک ق} + \text{۴ک}^{۲} = \text{۷ق}^{۲} + ۲$ اور یہان سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $\text{۶ق}^{۲} - \text{۴ک ق} = \text{۴ک}^{۲} - ۲$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

$$\text{ق}^{۲} - \frac{\text{۴ک ق}}{۶} = \frac{\text{۴ک}^{۲} - ۲}{۶} \quad \text{یا} \quad \text{ق}^{۲} - \frac{\text{۲ک ق}}{۳} = \frac{\text{۲ک}^{۲} - ۱}{۳}$$

اور جسوقت حل کرین ہم اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہہ قیمت ق کی ق = (ک + √(۷ک^۲ − ۳))/۲ اور یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ ق زیادہ ہی ک سی اور اسیواسطی ہم فرض کرتی ہین کہ ق = ک + س اور یہان سی یہہ معلوم ہوتا ہی ۲ک + ۳س = √(۷ک^۲ − ۳) اور ۴ک^۲ + ۱۲س ک + ۹س^۲ = ۷ک^۲ − ۳ یا ۳ک^۲ − ۱۲س ک = ۹س^۲ + ۳ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ک^۲ − ۴س ک = ۳س^۲ + ۱ اور حل کرنی سی اسکو حاصل ہوتا ہے یہہ ک = ۲س + √(۷س^۲ + ۱) پس جسوقت فرض کرین ہم س = ۰ اوسوقت حاصل ہوگی یہہ مساوات ک = ۱ اور اسیواسطی ق = ۱ اور ف = ۲ اور ن = ۳ یا √(۷ن^۲ + ۱) = ۸ عمل مذکورہ بالا کا بہت اختصار ہوسکتا ہی بوسیلہ ترکیب آئندہ کی اور یہہ ترکیب اور مثالون مین بھی جاری ہوسکتی ہی چونکہ √(۷ن^۲ + ۱) کم ہی ۳ن سے تو اسی واسطی ہم فرض کرتے ہین کہ √(۷ن^۲ + ۱) = ۳ن − ف اور جسوقت مجذور کرتے ہین ہم دونون طرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ۷ن^۲ + ۱ = ۹ن^۲ − ۶ف ن + ف^۲ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۲ن^۲ − ۶ف ن = ۱ − ف^۲ اور جسوقت حل کرینگے اس مساوات درجہ دوم کو اوسوقت حاصل ہوگی یہہ قیمت واسطی ن کے

ن = (۳ف + √(۷ف^۲ + ۲))/۲ اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ن کم ہی ۳ف سی

فرض کرینگے کہ ن = ۳ف − ق اور جسوقت مجذور کرتی ہین ہم دو طرفون اوس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ۹ف^۲ − ۱۲ف ق + ۴ق^۲ = ۷ف^۲ + ۲ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۲ف^۲ − ۱۲ف ق = ۲ − ۴ق^۲ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

ف^۲ − ۶ق ف = ۱ − ۲ق^۲ اور جسوقت حل کرتے ہین اس مساوات درجہ دوم کو واسطی حاصل کرنے قیمت ف کی تو حاصل ہوگی یہہ قیمت ف کی ف = ۳ق + √(۷ق^۲ + ۱) اور جسوقت فرض کرتے ہین ہم ق = ۰ اوسوقت ف = ۱ اور اسیواسطی ن = ۳ اور √(۷ن^۲ + ۱) = ۸ جیسکہ پہلی اب فرض کرو ط = ۸ یعنے چاہتے ہین ہم دریافت کرنی کوئی ایسی قیمت واسطی ن کے کہ صورت ۸ن^۲ + ۱ کی ایک کامل مجذور ہوجای اس صورت مین ظاہر ہی کہ √(۸ن^۲ + ۱) کم ہے بہ نسبت ۳ن کی اور اسیواسطی ہم فرض کرتی ہین کہ √(۸ن^۲ + ۱) = ۳ن − ف اور جسوقت مجذور کرتے ہین ہم دونو طرفون اسکی کو تو حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۸ن^۲ + ۱ = ۹ن^۲ − ۶ف ن + ف^۲ اور اس سے حاصل ہوگی یہہ مساوات ن^۲ − ۶ف ن = ۱ − ف^۲ اور جسوقت حل کرتے ہین اس مساوات

درجه دویم کو واسطی حل کرنی قیمت ن کے تو حاصل ہوگی یہہ قیمت ن کی $ن = ٣ف + \sqrt{٨ف^{٢} + ١}$
اور جسوقت $ف = ٠$ اوسوقت $ن = ١$ اور اسیواسطی حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت واسطی
$\sqrt{٨ن^{٢} + ١}$ کے $\sqrt{٨ن^{٢} + ١} = ٣$ اسیطرح سی ہم اور صورتون مین عمل کرسکتے ہین بشرطیکه
عدد ط منفی اور مجذور نہو اور اخیر کو ہم حاصل کرینگی ایک ایسی صورت جبریه $\sqrt{ط ح^{٢} + ١}$ متشابه
صورت مفروضه کی اور اسس صورت مین تاکه جذر کی علامت دور ہوجای ہم فرض کرینگے که $ح = ٠$ اور
بعد ازان ہم پہر اولٹی چلینگے او قیمتین تمام اون حروف کی جو ہم متواتر فرض کرتے گئی تہے دریافت
کرینگی اور اخیر کو قیمت ن کی معلوم ہوجایگی اور عمل تمام ہوجایگا یعنی بذریعه اسس قیمت ن کی صورت جبریه
$(ط ن^{٢} + ١)$ ایک کامل مجذور ہوجایگی اسجای واضح ہو که بعض اوقات ہمارا مطلب بہت سہولت سے
حاصل ہوجاتا ہی لیکن اکثر ہمین بہت سی عمل کرنی پڑتے ہین عملونکا زیاده یا کم ہونا موقوف ہی اوپر خواص
عدد ط کی لیکن ہمین آجتک ایسی اصول اور فوائد دریافت نہین ہوے ہین که اونکی ذریعه سی یہه بات
پہلی سے معلوم ہوجایا کری که اسس مثالین اتنی عمل کرنی ہونگی واسطی اعداد کی جو کم ہین ١٣ سی بہت عمل
ضرور نہین ہوتی ہین لیکن جسوقت $ط = ١٣$ اوسوقت حساب بہت مشکل اور طویل ہوجاتا ہی اور واسطی
مثال کے اسس حساب کو ہم اسجای لکہتے ہین فرض کرو $ط = ١٣$ یعنی چاہتے ہین ہم دریافت کرنی ایسی
قیمت واسطی ن کے که صورت جبریه $١٣ن^{٢} + ١$ ایک کامل مجذور ہوجای اسس صورت مین ظاہر ہی
که $\sqrt{١٣ن^{٢} + ١}$ زیاده ہی ٣ن سی اور اسیواسطی ہم فرض کرتی ہین که $\sqrt{١٣ن^{٢} + ١} = ٣ن + ف$
اور جسوقت مجذور کرتے ہین ہم دونو طرفون اسس مساوات کو اوسوقت حاصل یہه مساوات $١٣ن^{٢} + ١ =$
$٩ن^{٢} + ٦ف ن + ف^{٢}$ اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہه مساوات $٤ن^{٢} - ٦ف ن = ف^{٢} - ١$
اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہه مساوات $ن^{٢} - \frac{٣}{٢} ف ن = \frac{ف^{٢} - ١}{٤}$ اور جسوقت حل کرتے ہین
اسس مساوات درجه دوم کو اوسوقت حاصل ہوگی یہه مساوات $ن = \frac{٣ف + \sqrt{١٣ف^{٢} - ٤}}{٤}$
اور یہان سے یہه معلوم ہوتا ہی که ن زیاده ہی $\frac{٦}{٤}$ ف سی یعنی ن زیاده ہی ف سے اور اسیواسطی
ہم فرض کرتے ہین که $ن = ف + ق$ اور یہان سے حاصل ہوتی ہی یہه مساوات $٤ف + ٤ق =$
$٣ف + \sqrt{١٣ف^{٢} - ٤}$ اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہه مساوات $ف + ٤ق = \sqrt{١٣ف^{٢} - ٤}$
اور جسوقت مجذور کرتے ہین ہم دونو طرفون اسس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہی یہه مساوات
$ف^{٢} + ٨ق ف + ١٦ق^{٢} = ١٣ف^{٢} - ٤$ اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہه مساوات
$١٢ف^{٢} - ٨ق ف = ١٦ق^{٢} + ٤$ اور جسوقت تقسیم کرین دونو طرفون اسس مساوات کو عدد ٤ پر

اوسوقت حاصل ہوگی یہہ مساوات $3\text{ف}^2 - 2\text{ق}\,\text{ف} = 4\text{ق}^2 + 1$ اورجسوقت حل کرتے ہین اس مساوات درجہ دوم کو تو حاصل ہوگی یہہ قیمت ف کی $\text{ف} = \frac{\text{ق} + \sqrt{13\text{ق}^2 + 3}}{3}$ اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہے کہ ف زیادہ ہی $\frac{4\text{ق}}{3}$ یعنے ق سے تو فرض کرتے ہین ہم کہ $\text{ف} = \text{ق} + \text{ک}$ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات $3\text{ق} + 3\text{ک} = \text{ق} + \sqrt{13\text{ق}^2 + 3}$ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات $2\text{ق} + 3\text{ک} = \sqrt{13\text{ق}^2 + 3}$ اورجسوقت مجذور کرتے ہین ہم دونون طرفون اس مساوات کو اوسوقت حاصل ہوگی یہہ مساوات $13\text{ق}^2 + 3 = 4\text{ق}^2 + 12\text{ک}\,\text{ق} + 9\text{ک}^2$ اور اس سے یہہ حاصل ہوتا ہی $9\text{ق}^2 - 12\text{ک}\,\text{ق} = 9\text{ک}^2 - 3$ اور اس سے یہہ حاصل ہوتا ہی $3\text{ق}^2 - 4\text{ک}\,\text{ق} = 3\text{ک}^2 - 1$ اورجسوقت حل کرتے ہین ہم اس مساوات درجہ دوم کو تو حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت ق کے

$\text{ق} = \frac{2\text{ک} + \sqrt{13\text{ک}^2 - 3}}{3}$ اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ق زیادہ ہی

$\frac{2\text{ک} + 3\text{ک}}{3}$ سے یعنی ق زیادہ ہی ک سے تو فرض کرتے ہین ہم کہ $\text{ق} = \text{ک} + \text{س}$ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات $3\text{ک} + 3\text{س} = 2\text{ک} + \sqrt{13\text{ک}^2 - 3}$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $\text{ک} + 3\text{س} = \sqrt{13\text{ک}^2 - 3}$ اورجسوقت مجذور کرتے ہین ہم دونون طرفون اس مساوات کا تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $\text{ک}^2 + 6\text{س}\,\text{ک} + 9\text{س}^2 = 13\text{ک}^2 - 3$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $12\text{ک}^2 - 6\text{س}\,\text{ک} = 9\text{س}^2 + 3$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $4\text{ک}^2 - 2\text{س}\,\text{ک} = 3\text{س}^2 + 1$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

$\text{ک}^2 - \frac{\text{س}}{2}\text{ک} = \frac{3\text{س}^2 + 1}{4}$ اورجسوقت حل کرتے ہین اس مساوات درجہ دوم کو تو حاصل ہوگی یہہ قیمت ک کی $\text{ک} = \frac{\text{س} + \sqrt{13\text{س}^2 + 4}}{4}$ اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ک زیادہ ہی $\frac{\text{س} + 3\text{س}}{4}$ یعنے زیادہ ہی س سے تو ہم اسیواسطے فرض کرتے ہین کہ $\text{ک} = \text{س} + \text{ع}$ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات $4\text{س} + 4\text{ع} = \text{س} + \sqrt{13\text{س}^2 + 4}$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $3\text{س} + 4\text{ع} = \sqrt{13\text{س}^2 + 4}$ اورجسوقت مجذور کرین ہم دونون طرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $9\text{س}^2 + 24\text{ع}\,\text{س} + 16\text{ع}^2 = 13\text{س}^2 + 4$ اور اس سے حاصل ہوتا ہی یہہ $4\text{س}^2 - 24\text{ع}\,\text{س} = 16\text{ع}^2 - 4$ اور اس سے یہہ $\text{س}^2 - 6\text{ع}\,\text{س} = 4\text{ع}^2 - 1$ اورجسوقت حل کرتے ہین اس مساوات درجہ دوم کو اوسوقت

حاصل ہوگی یہہ مساوات $س = ۳ع + \sqrt{۱۳ع^2 - ۱}$ اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ س زیادہ ہی ۳ع + ۳ع سے یعنے ۶ع سی اور اسیواسطی ہم فرض کرتی ہین $س = ۶ع + ل$ اور اب حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $۶ع + ل = ۳ع + \sqrt{۱۳ع^2 - ۱}$ اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $۳ع + ل = \sqrt{۱۳ع^2 - ۱}$ اور اگر مجذور کرین ہم دونو طرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $۹ع^2 + ۶لع + ل^2 = ۱۳ع^2 - ۱$ اور اسسی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $۴ع^2 - ۶لع = ل^2 + ۱$ اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

$ع^2 - \frac{۳}{۲} ل ع = \frac{ل^2 + ۱}{۴}$ اور جسوقت فرض کرکے ع کو بطور مقدار مجہول کے

حل کرتے ہین ہم اس مساوات درجہ دوم کو تو حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

$ع = \frac{۳ل + \sqrt{۱۳ل^2 + ۴}}{۴}$ اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ع زیادہ ہی

$\frac{۶}{۴}$ ل سے یعنی ل سے اور اسیواسطی ہم فرض کرتے ہین کہ $ع = ل + م$ اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات $۴ل + ۴م = ۳ل + \sqrt{۱۳ل^2 + ۴}$ اور جسوقت نکال ڈالین دونون طرفون اس مساوات سی ۳ل کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $ل + ۴م = \sqrt{۱۳ل^2 + ۴}$ اور جسوقت مجذور کرتی ہین ہم دونو طرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $ل^2 + ۸مل + ۱۶م^2 = ۱۳ل^2 + ۴$ اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $۱۲ل^2 - ۸مل = ۱۶م^2 - ۴$ اور جسوقت قسمت کرتی ہین دونون طرفون اس مساوات کو عدد ۴ پر تو حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $۳ل^2 - ۲مل = ۴م^2 - ۱$ اور جسوقت مقرر کریکے ل کو بطور مقدار مجہول کے جاری کرین ہم اس مساوات پر قاعدہ مساوات درجہ دوم کا تو حاصل ہوگی یہہ قیمت واسطے ل کے $ل = \frac{م + \sqrt{۱۳م^2 - ۳}}{۳}$ اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا

ہی کہ ل زیادہ ہی $\frac{۴م}{۳}$ سے یعنی زیادہ ہی م سی اور اسیواسطی ہم فرض کرتے ہین کہ $ل = م + لا$ اور اسیواسطی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $۳م + ۳لا = م + \sqrt{۱۳م^2 - ۳}$ اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات جسوقت کہ نکال ڈالیں م کو دونو طرفون اس مساوات سے $۲م + ۳لا = \sqrt{۱۳م^2 - ۳}$ اور جسوقت مجذور کرین دونو طرفون اس مساوات کو تو حاصل

ہوگی یہہ مساوات $۴ م^{۲} + ۱۲ لام + ۹ لا^{۲} = ۱۳ م^{۲} - ۳$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات
$۹ م^{۲} - ۱۲ لام = ۹ لا^{۲} + ۳$ اور جسوقت قسمت کرتی ہین دونو طرفون اس مساوات کو عدد $\overline{۳}$ پر تو حاصل
ہوتی ہی یہہ مساوات $۳ م^{۲} - ۴ لام = ۳ لا^{۲} + ۱$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات
$م^{۲} - \frac{۴}{۳} لام = \frac{۳ لا^{۲} + ۱}{۳}$ اور جسوقت حل کرتے ہین اس مساوات درجہ دوم کو تو حاصل ہوتی ہی
یہہ قیمت واسطی م کے $م = \frac{۲ لا + \sqrt{۱۳ لا^{۲} + ۳}}{۳}$ اور یہان سے یہہ بات معلوم ہوتی
ہی کہ م زیادہ ہی $\frac{۵}{۳}$ لا سے یعنی لا سے اور اسیواسطی ہم فرض کرتے ہین کہ $م = لا + ر$
اور اسیواسطی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $۳ لا + ۳ ر = ۲ لا + \sqrt{۱۳ لا^{۲} + ۳}$ اور اس سے
حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $لا + ۳ ر = \sqrt{۱۳ لا^{۲} + ۳}$ اور جسوقت مجذور کرتے ہین ہم
دونو طرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $لا^{۲} + ۶ ر لا + ۹ ر^{۲} = ۱۳ لا^{۲} + ۳$ اور
اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $۱۲ لا^{۲} - ۶ ر لا = ۹ ر^{۲} - ۳$ یا $۴ لا^{۲} - ۲ ر لا = ۳ ر^{۲} - ۱$
اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $لا^{۲} - \frac{۱}{۲} ر لا = \frac{۳ ر^{۲} - ۱}{۴}$ اور جسوقت مقرر کرکی لا کو
بطور مقدار مجہول سے حل کرتی ہین ہم اس مساوات درجہ دوم کو تو حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات
$لا = \frac{ر + \sqrt{۱۳ ر^{۲} - ۴}}{۴}$ اور یہان بہی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ لا زیادہ ر سے ہی اور اسیواسطی
فرض کرتی ہین ہم کہ $لا = ر + د$ اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات $۴ ر + ۴ د = ر + \sqrt{۱۳ ر^{۲} - ۴}$
اور جسوقت دور کرتے ہین ہم دونون طرفون اس مساوات مین سی مقدار ر کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات
$۳ ر + ۴ د = \sqrt{۱۳ ر^{۲} - ۴}$ اور جسوقت مجذور کرتے ہین ہم دونو طرفون اس مساوات کو تو
حاصل ہوگی یہہ مساوات $۹ ر^{۲} + ۲۴ د ر + ۱۶ د^{۲} = ۱۳ ر^{۲} - ۴$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات
$۴ ر^{۲} - ۲۴ د ر = ۱۶ د^{۲} + ۴$ اور جسوقت قسمت کرتے ہین ہم دونو طرفون اس مساوات کو عدد $\overline{۴}$ پر
تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $ر^{۲} - ۶ د ر = ۴ د^{۲} + ۱$ اور جسوقت حل کرتے ہین اس مساوات درجہ دوم
کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $ر = ۳ د + \sqrt{۱۳ د^{۲} + ۱}$ اب ظاہر ہی کہ یہہ صورت اخیر متشابہ ہی
صورت مفروضہ کے اور اسیواسطی ہم فرض کرتے ہین کہ $د = ۰$ اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات
$ر = ۱$ اس لیے اب لکھتی ہین ہم قیمتین سب مقدارون کی جو کہ متواتر فرض کی گئی ہین نقشہ ذیل مین

د = ٠	ل = م + لا = ٣	ق = ک + س = ٧١
ی = ١	ع = ل + م = ٥	ف = ق + ک = ١٠٩
لا = ی + د = ١	س = ٦ع + ل = ٣٣	ن = ف + ق = ١٨٠
م = لا + ی = ٢	ک = س + ع = ٣٨	√(١٣ ن٢ + ١) = ٣ن + ف = ٦٤٩

اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ چھوٹی سے چھوٹا عدد جو کہ واسطی ن کے فرض کیا جا سکتا ہی اِس شرط پر کہ √(١٣ ن٢ + ١) ایک کامل مجذور ہو جای ١٨٠ ہی مثال مرقومہ بالا سی یہہ بات خوب واضح ہوتی ہی کہ بعض صورتون مین حساب بہت ہی مشکل اور طویل ہوتا ہی جسوقت کہ عدد ١٣ اسی بہی زیادہ ہوتا ہی اوسوقت اکثر بہت دفعہ زیادہ عمل کرنے پڑتے ہین بہ نسبت عدد ١٣ کی چونکہ ہم پہلی سے یہہ بات نہین بتا سکتی ہین کہ کونسی عدد کی واسطی ہمین بہت عمل کرنی پڑیگی تو ہم فائدہ اوٹہا سکتے ہین اور ونکی محنت سی جنہون نے کہ ایسی حساب کر کی بہتیری اعداد دریافت کئی ہین واسطی اِس مطلب کے اِس فصل کی اخیر مین ایک فہرست لگائی گئی ہی اور اوس مین قیمتین ق اور √(ط ن٢ + ١) کے مطابق اون سب قیمتون ط کے جو کہ ٢ سی ١٠٠ تک واقع ہین مندرج ہین اسی

یہہ بات بیان کرنی ضروری ہی کہ خاص صورتون مین ہم دریافت کر سکتے ہین بہت سہولت سی قیمتین ق اور √(ط ن٢ + ١) کی مثلاً جسوقت کہ ط بہ نسبت کسی عدد مجذور کی بقدر ١ یا ٢ کی زیادہ یا کم ہوتا ہی اوسوقت ایک عام اور سہل قاعدہ واسطی حصول ہماری مطلب کے مستعمل ہی اور یہہ قاعدہ مرقوم آئندہ سی ظاہر ہو جائیگا فرض کرو کہ ط = ی٢ − ٢ اور چونکہ ضروری ہی کہ ہووی یہہ مساوات (ی٢ − ٢) ن٢ + ١ = م٢ = ایک مجذور کی تو یہہ بات ظاہر ہی کہ م کم ہی ن کی ی سے اور اسیواسطی ہم فرض کرتے ہین کہ م = ی ن − ف اور اسیواسطی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات (ی٢ − ٢) ن٢ + ١ = ی٢ن٢ − ٢ ی ن ف + ف٢ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

ی٢ن٢ − ٢ن٢ + ١ = ی٢ن٢ − ٢ ی ن ف + ف٢ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

٢ن٢ − ٢ ی ن ف = ١ − ف٢ اور جسوقت مقرر کرکی ن کو بطور مقدار مجہول کے حل کرتے ہین ہم اس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت ن کی ن = (ی ف + √(ی٢ف٢ − ٢ف٢ + ٢)) / ٢ اور یہان یہہ بات ظاہر ہی کہ اگر ف مساوی ایک کے فرض کیا جاوے تو ن = (ی + √ی٢) / ٢ = (ی + ی) / ٢ = ٢ی / ٢ = ی

اور چونکہ √(ط ن٢ + ١) = م اور ط = ی٢ − ٢ تو معلوم ہوا کہ √((ی٢ − ٢) ی٢ + ١) = √(ی٤ − ٢ی٢ + ١) = ی٢ − ١ پس معلوم ہوا کہ م = ی٢ − ١ مثلاً اگر ط = ٢٣ تو ظاہر ہی کہ ی = ٥ اور اسیواسطی م = ٢٥ − ١ = ٢٤ دلیل اوسکی جو کچھہ گذرا ہی اسطرح سے بہی ظاہر ہی

جسوقت کہ ط = ی^2 - ۱ اگر اسوقت فرض کریں ہم ن = ی تو حاصل ہوگی ہمیں یہہ مساوات ط ن^2 + ۱ =
ی^4 - ٢ی^2 + ۱ جو مجذور ہے ی^2 - ۱ کا اب فرض کرو کہ ط = ی^2 - ۱ یعنے فرض کرو ط کو بہ نسبت ایک عدد مجذور کے
کے بقدر عدد ۱ کے کم پس اب ضرور ہے کہ ہووے یہہ مساوات (ی^2 - ۱) ن^2 + ۱ = م^2 اور بطور گزشتہ کے
یہہ بات ظاہر ہے کہ م کم ہے بہ نسبت ی ن کے اور اسیواسطے ہم فرض کرتے ہیں کہ م = ی ن - ف اور
اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات (ی^2 - ۱) ن^2 + ۱ = ی^{2}ن^2 - ٢ی ن ف + ف^2
اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہہ مساوات ن^2 - ٢ی ن ف = ۱ - ف^2 اور اگر مقرر کریں ن کو بطور مقدار مجہول کے حل
کریں ہم اس مساوات درجہ دوم کو تو حاصل ہوگی یہہ قیمت ن کی ن = ی ف + $\sqrt{}$(ی^{2}ف^2 - ف^2 + ۱)
اور اسجا ہی ظاہر ہے کہ علامت جذر کی دور ہوجاویگی اگر فرض کریں ہم ف = ۱ اور اس صورت میں حاصل ہوگی یہہ
مساوات ن = ٢ی اور م = ٢ی^2 - ۱ یہی بات اسطرح بھی ظاہر ہے چونکہ ن = ٢ی اور
م = ٢ی^2 - ۱ تو ط ن^2 + ۱ = ٤ی^4 - ٤ی^2 + ۱ = (٢ی^2 - ۱)^2 یعنے مجذور ٢ی^2 - ۱ کا مثلاً فرض کرو
کہ ط = ٢٤ اور اسیواسطے ی = ٥ اور اس سے حاصل ہوگی یہہ قیمت ن کی ن = ۱٠ اور ٢٤ن^2 + ۱ = ٢٤٠۱
= (٤٩)^2 اب فرض کرو کہ ط = ی^2 + ۱ یعنے یہہ کہ ط زیادہ ہے کسی عدد مجذور سے بقدر عدد ۱ کی اور اسلئے
یہی یہہ بات ضرور ہے کہ (ی^2 + ۱) ن^2 + ۱ = م^2 اور چونکہ اس صورت میں م زیادہ ہے ی ن سے تو فرض کرتے ہیں
ہم کہ م = ی ن + ف اور اسواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات (ی^2 + ۱) ن^2 + ۱ = ی^{2}ن^2 + ٢ی ن ف + ف^2
یا یہہ مساوات ی^{2}ن^2 + ن^2 + ۱ = ی^{2}ن^2 + ٢ی ن ف + ف^2 اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہہ مساوات
ن^2 - ٢ی ن ف = ف^2 - ۱ اور جسوقت حل کرتے ہیں اس مساوات کو اسوقت حاصل ہوتی ہے یہہ قیمت ن
کی ن = ی ف + $\sqrt{}$(ی^{2}ف^2 + ف^2 - ۱) اب فرض کرتے ہیں ف = ۱ اور موافق اس فرض کی حاصل ہوتی
ہے یہہ مساوات ن = ٢ی اور م = ٢ی^2 + ۱ اور یہی بات ظاہر ہوتی ہے اس سے کہ جسوقت ط = ی^2 + ۱
اور ن = ٢ی اوسوقت ط ن^2 + ۱ = ٤ی^4 + ٤ی^2 + ۱ = (٢ی^2 + ۱)^2 = ایک مجذور کے مثلاً فرض
کرو کہ ط = ۱٧ اور یہاں سے یہہ معلوم ہوا کہ ی = ٤ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات
۱٧ن^2 + ۱ = م^2 اور اسیواسطے ن = ٨ اور م = ٣٣ اب فرض کرو کہ ط = ی^2 + ٢ یعنے فرض
کرو کہ ط زیادہ ہے بہ نسبت کسی عدد مجذور کی بقدر عدد ٢ کی پس اس صورت میں حاصل ہوگی یہہ مساوات
(ی^2 + ٢) ن^2 + ۱ = م^2 اور اسیواسطے معلوم ہوا کہ م زیادہ ہے ی ن سے اور اسیواسطے ہم فرض کرتے ہیں کہ
م = ی ن + ف اور اس سے حاصل ہوگی یہہ مساوات ٢ن^2 - ٢ی ن ف = ف^2 - ۱ اور اس سے حاصل
ہوتی ہے یہہ مساوات

ن = (ی ث + ۸ √(یٓ ثٓ + ۴ ثٓ − ۲)) / ۲ اب فرض کرو کہ ث = ۱ اور ہم اسکے واسطے دریافت کرینگے کہ ن = ی اور م = یٓ + ۱ یہی بات اور طرحسے بہی ظاہر ہی کسواسطے کہ جسوقت

ط نٓ + ۱ = یٓ + ۲ یٓ + اور ن = ی تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ط نٓ + ۱ = یٓ + ۲ یٓ + ۱ = (یٓ + ۱)ٓ = ایک

مجذور کی مثل فرض کرو کہ ط = ۱۱ پس اس صورت مین ظاہر ہی کہ ی = ۳ اور اسیواسطے صورت جبریہ

۱۱ نٓ + ۱ = مٓ اور اس صورت مین ن = ۳ اور م = ۱۰ اگر ط = ۸۳ تو ضرور ہی کہ ی = ۹ کے

اور اب بہی ۸۳ نٓ + ۱ = مٓ اور اس صورتمین ن = ۹ اور م = ۸۲ سوای خاص صورتون مذکورہ بالا کے

ایک اور بہی خاص صورت مہندس بارنولی نے نکالی ہی اور وہ یہہ ہی جسوقت کہ ہووی ط اس شکل کی یٓ ± (۲/س) ی

کیونکہ اس صورتمین اگر فرض کرین ہم ن = س تو صورت جبریہ ط نٓ + ۱ ہوجاتی ہی

یٓ سٓ ± ۲ س ی + ۱ = (ی س ± ۱)ٓ = ایک مجذور کے مثلاً اگر ی = ۳ اور س = ۱ تو

یٓ + (۲/س) ی = ۹ + ۶ = ۱۵ ∴ ط = ۱۵ اور اس صورتمین اگر فرض کرین ہم کہ ن = س = ۱

تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ط نٓ + ۱ = ۱۵ × ۱ٓ + ۱ = ۱۵ + ۱ = ۱۶ = ۴ٓ = ایک عدد مجذور کے

اگر ی = ۶ اور س = ۳ اور ∴ ن = ۳ تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ط = یٓ + (۲/س) ی =

۳۶ + (۲ × ۶)/۳ = ۳۶ + ۴ = ۴۰ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات

ط نٓ + ۱ = ۴۰ × ۳ٓ + ۱ = ۴۰ × ۹ + ۱ = ۳۶۱ = (۱۹)ٓ = ایک عدد کی مجذور کی اور اسیواسطے

اور مثالین بہی حل ہوسکتی ہین اب ہم لکہتے ہین وہ فہرست جسکے لکہنے کا ہمنے پہلے اقرار کیا تہا اور اس فہرست

مین قیمتین ط اور ن اور م √(ط نٓ + ۱) یعنے م کی لکہی ہوئی ہین فہرست ذیل مین مندرج ہین مطابق ہر قیمت

ط کے چہوٹی سے چہوٹی قیمتین عدد ن کی ایسی کہ اونکے ذریعہ سے ط نٓ + ۱ کامل مربع ہوجاوے

ط	ن	م	ط	ن	م
۲	۲	۳	۱۳	۱۸۰	۶۴۹
۳	۱	۲	۱۴	۴	۱۵
۵	۴	۹	۱۵	۱	۴
۶	۲	۵	۱۷	۸	۳۳
۷	۳	۸	۱۸	۴	۱۷
۸	۱	۳	۱۹	۳۹	۱۷۰

م	ن	ط	م	ت	ل
٩	٢	٢٠	١٩	٢	١٠
٥٥	١٢	٢١	١٠	٣	١١
١٩٧	٤٢	٢٢	٧	٢	٢٢
١٣	٢	٤٢	٢٤	٥	٢٣
٣٤٨٢	٥٣١	٤٣	٥	١	٤
١٩٩	٣٠	٤٤	٥١	١٠	٢٦
١٦١	٢٤	٤٥	٢٦	٥	٢٧
٢٤٣٣٥	٣٥٨٨	٤٦	١٢٧	٢٤	٢٨
٤٨	٧	٤٧	٩٨٠١	١٨٢٠	٢٩
٧	١	٤٨	١١	٢	٣٠
٩٩	١٤	٥٠	١٥٢٠	٢٧٣	٣١
٥٠	٧	٥١	١٧	٣	٣٢
٦٤٩	٩٠	٥٢	٢٣	٤	٣٣
٦٦٢٤٩	١١٠٠	٥٣	٣٥	٦	٣٤
٤٨٥	٦٦	٥٤	٦	١	٣٥
٨٩	١٢	٥٥	٨٣	١٢	٣٧
١٥	٢	٥٦	٣٧	٦	٣٨
١٥١	٢٠	٥٧	٢٥	٤	٣٩
١٩٦٠٣	٢٥٧٣	٥٨	١٩	٣	٤٠
٥٣٠	٦٩	٥٩	٢٠٤٩	٣٢٠	٤١
٥٣	٦	٧٨	٣١	٤	٦٠
٨٠	٩	٧٩	١٧٦٦٣١٩٠٤٩	٢٢٦١٥٣٩٨٠	٦١
٩	١	٨٠	٦٣	٨	٦٢
١٦٣	١٨	٨٢	٨	١	٦٣

ط	ن	م	ط	ن	م
۶۵	۱۶	۱۲۹	۸۳	۹	۸۲
۶۶	۸	۶۵	۸۴	۶	۵۵
۶۷	۵۹۶۷	۴۸۸۴۲	۸۵	۳۰۹۹۶	۲۸۵۷۶۹
۶۸	۴	۳۳	۸۶	۱۱۲۲	۱۰۴۰۵
۶۹	۹۳۶	۷۷۷۵	۸۷	۳	۲۸
۷۰	۳۰	۲۵۱	۸۸	۲۱	۱۹۷
۷۱	۴۱۳	۳۴۸۰	۸۹	۵۳۰۰۰	۵۰۰۰۰۱
۷۲	۲	۱۷	۹۰	۲	۱۹
۷۳	۲۶۷۰۰۰	۲۲۸۱۲۴۹	۹۱	۱۶۵	۱۵۷۴
۷۴	۴۳۰	۳۶۹۹	۹۲	۱۲۰	۱۱۵۱
۷۵	۳	۲۶	۹۳	۱۲۶۰	۱۲۱۵۱
۷۶	۶۶۳۰	۵۷۷۹۹	۹۴	۲۲۱۰۶۴	۲۱۴۳۲۹۵
۷۷	۴۰	۳۵۱	۹۵	۴	۳۹
۹۶	۵	۴۹	۹۸	۱۰	۹۹
۹۷	۶۳۷۷۳۵۲	۶۲۸۰۹۶۳۳	۹۹	۱	۱۰

واضح ہو کہ ایک ہمنی چہوٹی سے چہوٹی قیمتین واسطی ن کے دریافت کی ہین کہ جنکی ذریعہ سی صورت طن² + ۱ ایک کامل مجذور ہوجاوی لیکن اس جا یہہ بہی واضح ہو کہ بذریعہ ان چہوٹے قیمتون کی ہم دریافت کرسکتے اور قیمتین بہی مثلاً ہمنے پہلی دریافت کیا ہی کہ اگر ن مساوی فرض کیا جاوی ۲ کی تو صورت ۳ن² + ۱ ایک کامل مجذور ہوجاتی ہی اور یہہ بات ہمنی بعد فرض کرنے دو مقدار ون ق اور ق کے دریافت کی تہی اور اخیر کی یہہ مساوات حاصل ہوتی تہی ف = ق + √(۳ق² + ۱) اور اسمین ق کو صفر فرض کیا تہا اور اسی ترکیب سی کم قیمت واسطی ن کے حاصل کی تہی پس اگر ہم ق کو صفر تو فرض نکرین لیکن کوئی اور مقدار جو ایسی ہو کہ کامل مربعہ ہوجاوی تو ہمین ایک اور قیمت واسطی ن کے حاصل ہوجایگی ایسی کہ اوسکی ذریعہ سیسے صورت ۳ن² + ۱ ایک کامل مجذور ہوجایگی لیکن یہہ بات ظاہر ہی کہ جسکی وسیلہ سی صورت ۳ن² + ۱ کامل مجذور ہوجاتی ہی اوسی قیمت ق کی ذریعہ سیسے صورت ۳ق² + ۱ کامل مجذور ہوجایگی کیونکہ دونو

صورتون کی ایک ہی شکل ہی پس اب فرض کرو کہ ق = ٢ اور اسیواسطی حاصل ہوگی

یہہ مساوات $ف = ٢ + \sqrt{٢ \times ٢^{٢} + ١} = ٢ + \sqrt{٢ \times ٤ + ١} = ٢ + \sqrt{٨ + ١} =$

$٢ + \sqrt{٩} = ٢ + ٣ = ٥$ اور جونکہ ن دریافت ہوا تہا مساوی اس صورت کی

$ف + \sqrt{٢ف^{٢} - ١}$ اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات $ن = ٥ + \sqrt{٢ \times ٥^{٢} - ١} =$

$٥ + \sqrt{٢ \times ٢٥ - ١} = ٥ + \sqrt{٥٠ - ١} = ٥ + \sqrt{٤٩} = ٥ + ٧ = ١٢$ پس معلوم ہوا

کہ دوسری قیمت سوای ٢ کی واسطی ق کے ١٢ ہی ایسی کہ اوسکی ذریعہ سی صورت $٢ن^{٢} + ١$ کامل مجذور

ہوجاتی ہی اور اسکا امتحان یون ہوتا ہی $م = \sqrt{٢ن^{٢} + ١} = \sqrt{٢ \times ١٢^{٢} + ١} =$

$\sqrt{٢ \times ١٤٤ + ١} = \sqrt{٢٨٨ + ١} = \sqrt{٢٨٩} = ١٧$ اب اگر تیسری قیمت واسطے

ن کی دریافت کیا چاہین تو فقط یہہ لازم ہی کہ لکھین ١٢ کو واسطی ق کی مساوات $ف = ق + \sqrt{٢ق^{٢} + ١}$

اور بعد ازان جو کچھہ قیمت اس مساوات سی واسطی ف کے حاصل ہو لکھین وسی بجای ف کی مساوات

$ن = ف + \sqrt{٢ف^{٢} - ١}$ مین اور جو کچھہ قیمت واسطی ن کے اس مساوات سی حاصل ہوگی وہ قیمت

مطلوبہ ہوگی مثلاً جسوقت لکھین واسطی ق کے عدد ١٢ کا مساوات $ف = ق + \sqrt{٢ق^{٢} + ١}$

مین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $ف = ١٢ + \sqrt{٢ \times ١٢^{٢} + ١} = ١٢ + \sqrt{٢ \times ١٤٤ + ١} = ١٢ +$

$\sqrt{٢٨٨ + ١} = ١٢ + \sqrt{٢٨٩} = ١٢ + ١٧ = ٢٩$ پس اب لکھو عدد ٢٩ کو بجای

ف کے مساوات $ن = ف + \sqrt{٢ف^{٢} - ١}$ کی تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

$ن = ٢٩ + \sqrt{٢ \times ٢٩^{٢} - ١} = ٢٩ + \sqrt{٢ \times ٨٤١ - ١} = ٢٩ \pm \sqrt{١٦٨٢ - ١} =$

$٢٩ + \sqrt{١٦٨١} = ٢٩ + ٤١ = ٧٠$ اور اسیطور سے چوتہی قیمت واسطی ن کے حاصل

ہوسکتی ہی مثلاً جسوقت لکھی ٧٠ واسطی ق کے مساوات $ف = ق + \sqrt{٢ق^{٢} + ١}$ مین تو

حاصل ہوگی یہہ قیمت ف کی $ف = ٧٠ + \sqrt{٢ \times ٧٠^{٢} + ١} = ٧٠ + \sqrt{٢ \times ٤٩٠٠ + ١} =$

$٧٠ + \sqrt{٩٨٠٠ + ١} = ٧٠ + \sqrt{٩٨٠١} = ٧٠ + ٩٩ = ١٦٩$ اور

جسوقت لکھین اس قیمت ف کو بجای اوسکی مساوات $ن = ف + \sqrt{٢ف^{٢} - ١}$ مین تو

$ن = ١٦٩ + \sqrt{٢ \times ١٦٩^{٢} - ١} = ١٦٩ + \sqrt{٥٧١٢٢ - ١} = ١٦٩ + \sqrt{٥٧١٢١}$

$= ١٦٩ + ٢٣٩ = ٤٠٨$ اور یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ چار متواتر قیمتین ن کی سی یہ ہین

٢ ١٢ ٧٠ ٤٠٨ اور قیمتین اسیطور سی معلوم ہوسکتی ہین جسطرح سی کہ مختلف قیمتین ن کی مطابق

قیمت ٢ ط کی دریافت ہوسکتی ہین اوسیطرح سی مختلف قیمتین ن کی مطابق کسی اور قیمت ط کے دریافت

ہوسکتی ہین ہم لکھین گے ایک اور مثال سمجھانا چاہتے ہین ہم دریافت کرنی ایک اور قیمت ن کی سواے ١٨٠ اسکے جو سابق مین دریافت کی گئی ہی جس سے کہ صورت ١٣ ن² + ١ کا کامل مجذور ہوجاوے واسطے اس مطلب کی ہم لکھتے ہین اسجاے تمام مساواتین جو پہلی ثابت کی گئی ہین دیے ہوے مساواتین سے یے ہین

د = ٣ د + √ (١٣ ذ² + ١) اور لا = (د + √ (١٣ ذ² − ٤)) / ٤ اور ک = (٢ لا + √ (١٣ لا² + ٣)) / ٣

اور ل = (٣ ل + √ (١٣ ل² + ٤)) / ٤ اور ع = (ک + √ (١٣ ک² − ٣)) / ٣ اور

س = ٣ ع + √ (١٣ ع² − ١) اور م = (س + √ (١٣ س² + ٤)) / ٤ اور

ق = (٢ م + √ (١٣ م² − ٣)) / ٣ اور ف = (ق + √ (١٣ ق² + ٣)) / ٣ اور

ن = (٣ ف + √ (١٣ ف² − ٤)) / ٤ اب فرض کرو کہ د = ١٨٠ اور اسیواسطے جسوقت لکھین ہم یہ قیمت د کی مساوات اول مین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات د = ٥٤٠ + √ (١٣ × (١٨٠)² + ١) = ٥٤٠ + ٦٤٩ = ١١٨٩ اور جسوقت لکھین گے ہم اس قیمت د کو مساوات دوسری مین تو حاصل ہوگی یہہ قیمت لا کی

لا = (١١٨٩ + √ (١٣ × (١١٨٩)² − ٤)) / ٤ اور جو قیمت لا کی اس مساوات

سی حاصل ہوگی لکھین گے ہم اوسی مساوات تیسری مین تو اوسوقت حاصل ہوگی ہمین قیمت ک کی اور جسوقت لکھین گے ہم اس قیمت ک کو مساوات چوتھی مین تو اوسوقت حاصل ہوگی ہمین قیمت ل کی اور جسوقت لکھین گے ہم اس قیمت کو مساوات پانچوین مین اوسوقت حاصل ہوگی ہمین قیمت ع کی اور جسوقت لکھین گے ہم اس قیمت ع کو مساوات چھٹی مین تو اوسوقت حاصل ہوگی ہمین قیمت س کی اور جسوقت لکھین گے ہم اس قیمت س کو مساوات ساتوین مین تو حاصل ہوگی ہمین قیمت م کی اور جسوقت لکھین گے ہم اس قیمت م کو مساوات اٹھوین مین تو اوسوقت حاصل ہوگی ہمین قیمت ق کی اور جسوقت لکھین گے ہم اس قیمت ق کو مساوات نوین مین تو اوسوقت حاصل ہوگی ہمین قیمت ف کی اور جسوقت لکھین گے ہم اس قیمت ف کو مساوات

دوسوین مین تو اوسوقت حاصل ہوگی ہمین قیمت ق کی پس ان کی عملون سیے حاصل ہوتی ہی دوسری
ق کی اور اگر پہر کئی جائین اتنی عمل تو حاصل ہوگی ہمین تیسری قیمت ق کی اور علی ہذا القیاس اور قیمتین ہی اسیطرح
سی حاصل ہوسکتی ہین اسیجای ہمنی ساری عمل نہین سہ لکھے کسواسطی کہ اونمین کچہہ مشکل بات نہین ہی
سوای کچہہ مشقت کی جو عملون ضرب اور تقسیم اور جذر کی مین ضرور ہوتی ہی

فصل چوتہے بیچ بیان سوالات مجذورون کے

سوال آئندہ بہت دلچسپ اور مفید ہین اونکی حل کرنی سیے بڑی قوت عملون جبر یہ مین حاصل ہوتی ہی اور
ہر واحد اونمین کا بطور ایک مشکل تحریر اقلیدس کے ہی کہ اوسکی حل کرنی یا ثابت کرنی کی واسطی کوئی قاعدہ عام
وضع نہین ہی بلکہ ہر صورت مین عقل اور ذہن کو کام مین لانا ہوتا ہی واضح ہو کہ ایسے سوالات غیر منقطع ہوتے
ہین کسواسطی کہ اونکی واسطی کئی جواب ہوسکتی ہین

سوال ۱ چاہیے ہین ہم دریافت کرنا ایک ایسا عدد کہ خواہ اوسپر عدد ایک کا زیادہ کر
خواہ اوسمین سی اوسی عدد کو تفریق حاصل جمع اور حاصل تفریق دونوا عداد مجذور ہوتے ہین پس
فرض کرو کہ لا ہی عدد مطلوبہ اور موافق شرط سوال کی یہہ بہی فرض کرو کہ $لا + ۱ = ن^۲$ اور
اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $لا = ن^۲ - ۱$ اور اس مساوات سی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات
$لا - ۱ = ن^۲ - ۲$ لیکن موافق دوسری شرط سوال کی $لا - ۱$ یعنی اوسکا مساوی $ن^۲ - ۲$
ایک مجذور ہونا چاہیی چونکہ اسیجای یہہ بات ظاہر ہی کہ جذر $\sqrt{ن^۲ - ۲}$ کا ن سی کم ہی تو فرض کرو کہ
$\sqrt{ن^۲ - ۲} = ن - ق$ اور جسوقت مجذور کرین دونو طرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات
$ن^۲ - ۲ = ن^۲ - ۲ق ن + ق^۲$ اور اس مساوات سی حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت ق سیکے

$$ن = \frac{ق^۲ + ۲}{۲ق}$$ اور چونکہ $لا = ن^۲ - ۱$ اور

$$ن^۲ = \left(\frac{ق^۲ + ۲}{۲ق}\right)^۲ = \frac{ق^۴ + ۴ق^۲ + ۴}{۴ق^۲}$$ تو معلوم ہوا کہ

$$لا = ن^۲ - ۱ = \frac{ق^۴ + ۴ق^۲ + ۴}{۴ق^۲} - ۱ = \frac{ق^۴ + ۴}{۴ق^۲}$$ اور اسیجای قیمت

ق کی کچہی فرض کی جاسکتی ہی خواہ اعداد صحیح خواہ کسور لیکن چونکہ کسور بہ نسبت اعداد صحیح کی عام ہین
یعنی عدد صحیح ایک کسور کی شکل سی تعبیر ہوسکتا ہی اور عکس اسکا نہین ہوتا ہی یعنی ایک کسر بشکل عدد

صحیح کی نہین لکھی جاسکتی ہین تو ہم فرض کرینگے کہ $ق = \frac{ر}{س}$ اور اس مساوات سے حاصل ہوتی ہین یے مساواتین

$ق^2 = \frac{ر^2}{س^2}$ اور $۴ق^2 = \frac{۴ر^2}{س^2}$ اور $ق^4 = \frac{ر^4}{س^4}$ پس جسوقت لکھین گے

ہم یے تینین مساوات لا کی بین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$لا = \frac{\frac{ر^4}{س^4}+۴}{\frac{۴ر^2}{س^2}} = \frac{\frac{ر^4+۴س^4}{س^4}}{\frac{۴ر^2}{س^2}} = \frac{س^2}{۴ر^2} \times \frac{ر^4+۴س^4}{س^4}$$

$= \frac{ر^4+۴س^4}{۴ر^2س^2}$ اب اگر فرض کئے جائین کوئی اعداد واسطی حروف ر اور س کے تو حاصل ہونگی ایسی قیمتین واسطی لا کی کہ اونکی ذریعہ سے جو قیمتین لا کی حاصل ہوگی وے ایسی ہونگی کہ اگر اون پر عدد ایک کا زیادہ کرین یا اونمین سے اسی عدد کو تفریق کرین تو دونون اعداد مجذور حاصل ہونگی مثلاً فرض کرو کہ $\frac{ر}{س}$ مساوی ہی متواتر ان قیمتون یا اعداد کے

$\frac{ر}{س} = \frac{۱}{۱}$	$\frac{۲}{۱}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۱}$	$\frac{۴}{۱}$
$لا = \frac{۵}{۴}$	$\frac{۵}{۴}$	$\frac{۶۵}{۱۶}$	$\frac{۸۵}{۳۶}$	$\frac{۶۵}{۱۶}$

اور امتحان اس بات کا کہ یے قیمتین لا کی مجذور ہوجاتی ہین جسوقت کہ اونپر عدد ۱ کا زیادہ کیا جاتا ہے یا جسوقت کہ اونمین سے عدد ایک تفریق کیا جاتا ہے یون ہوتا ہے

$\frac{۵}{۴} + ۱ = \frac{۹}{۴} = \left(\frac{۳}{۲}\right)^2$ اور $\frac{۵}{۴} + ۱ = \frac{۹}{۴}$ اور

$\frac{۶۵}{۱۶} + ۱ = \frac{۸۱}{۱۶} = \left(\frac{۹}{۴}\right)^2$ اور $\frac{۸۵}{۳۶} + ۱ = \frac{۱۲۱}{۳۶} = \left(\frac{۱۱}{۶}\right)^2$

اور اسیطرح $\frac{۵}{۴} - ۱ = \frac{۱}{۴} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^2$ اور $\frac{۶۵}{۱۶} - ۱ = \frac{۴۹}{۱۶} = \left(\frac{۷}{۴}\right)^2$

اور $\frac{85}{36} - 1 = \frac{49}{36} = \left(\frac{7}{6}\right)^2$

۲ چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا ایک ایسا عدد کہ اگر اوسپر کوئی سی عدد مثل ۴ اور ۷ کے زیادہ کریں تو حاصل جمع دونو صورتوں میں مجذور ہوتا ہے پس موافق شرایط سوال کے سیے دونو صورتیں $\text{لا} + 4$ اور $\text{لا} + 7$ مجذور ہونی چاہئیں لہذا اسیواسطے فرض کرو کہ $\text{لا} + 4 = \text{ف}^2$ اور اس سے حاصل ہوتا ہے یہہ $\text{لا} = \text{ف}^2 - 4$ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات $\text{لا} + 7 = \text{ف}^2 - 4 + 7 = \text{ف}^2 + 3$ اور چونکہ یہہ صورت اخیر بھی مجذور ہونی چاہیے تو فرض کرو کہ اسکا جذر $\text{ف} + \text{ق}$ ہے اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات $\sqrt{\text{ف}^2 + 3} = \text{ف} + \text{ق}$ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ قیمت ف کی $\text{ف} = \frac{3 - \text{ق}^2}{2\,\text{ق}}$ اور چونکہ $\text{لا} + 7 = \text{ف}^2 + 3$ تو اسیواسطے $\text{لا} = \text{ف}^2 - 4$ اور چونکہ

$$\text{ف}^2 = \left(\frac{3 - \text{ق}^2}{2\,\text{ق}}\right)^2 = \frac{9 - 6\,\text{ق}^2 + \text{ق}^4}{4\,\text{ق}^2}$$

تو اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ قیمت واسطے لا کے

$$\text{لا} = \text{ف}^2 - 4 = \frac{9 - 6\,\text{ق}^2 + \text{ق}^4}{4\,\text{ق}^2} - 4 = \frac{9 - 22\,\text{ق}^2 + \text{ق}^4}{4\,\text{ق}^2}$$

اور اگر فرض کریں کوئی کسر واسطے ق کے مثل $\frac{\text{ر}}{\text{س}}$ کی تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$\text{لا} = \frac{9 - \frac{22\,\text{ر}^2}{\text{س}^2} + \frac{\text{ر}^4}{\text{س}^4}}{\frac{4\,\text{ر}^2}{\text{س}^2}}$$

یعنی حاصل ہوگی یہہ مساوات $\text{لا} = \frac{9\,\text{س}^4 - 22\,\text{ر}^2\text{س}^2 + \text{ر}^4}{4\,\text{ر}^2\text{س}^2}$

اور اس مساوات میں کوئی اعداد واسطے ر اور س کے فرض کیے جاسکتے ہیں مثلاً اگر فرض کریں ہم $\text{ر} = 1$ اور $\text{س} = 1$ تو حاصل ہوگی ہمیں یہہ قیمت واسطے لا کے $\text{لا} = -3$ اور اسیواسطے $\text{لا} + 4 = 1 =$ عدد مجذور کے اور $\text{لا} + 7 = 4 =$ مجذور کی لیکن اگر چاہیں ہم دریافت کرنی اعداد مثبت واسطے لا کی تو لازم ہے کہ فرض کریں ہم کہ $\text{س} = 2$ اور $\text{ر} = 1$ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات $\text{لا} = \frac{57}{16}$ اور اس سے حاصل ہوتی ہیں یہ مساواتیں $\text{لا} + 4 = \frac{57}{16} + 4 = \frac{121}{16} = \left(\frac{11}{4}\right)^2 =$ ایک عدد مجذور کے اور $\text{لا} + 7 = \frac{57}{16} + 7 = \left(\frac{13}{4}\right)^2 =$ ایک عدد مجذور کی اور اگر فرض کریں ہم $\text{س} = 3$ اور $\text{ر} = 1$ تو اس سے حاصل ہوتی ہے یہہ مساوات $\text{لا} = \frac{133}{9}$ اور اس سے یہہ حاصل ہوتا ہے

لا + ۴ = ۱۳۳/۹ + ۴ = ۱۶۹/۹ = (۱۳/۳)^۲ = عدد مجذور ہے اور

لا + ۷ = ۱۳۳/۹ + ۷ = ۱۹۶/۹ = (۱۴/۳)^۲ = عدد مجذور ہے اگر ہم چاہین کہ اپنی ...

لوسس صورت جبریہ کا جو قیمت لا کو تعبیر کرتی ہی زیادہ ہوجاتا اوسکی وسط کی جز سی تو لازم ہی کہ فرض کرین ہم کہ ر = ۵ اور
س = ۱ اور اسس صورت مین حاصل ہوگی یہہ قیمت لا کی لا = ۲۱/۲۵ اور اسسے حاصل ہوتی ہین یہے مساواتین

لا + ۴ = ۲۱/۲۵ + ۴ = ۱۲۱/۲۵ = (۱۱/۵)^۲ = ایک عدد مجذور ہے اور

لا + ۷ = ۲۱/۲۵ + ۷ = ۱۹۶/۲۵ = (۱۴/۵)^۲ = ایک عدد مجذور ہے

۳ دریافت کیا جاتے ہین ایک ایسی کسر کہ اگر اوسی زیادہ کرین عدد آ پر یا اوسی تفریق کرا اسی عدد
آ مین سے تو حاصل جمع اور حاصل تفریق دونو مجذور ہو دین فرض کرو کہ کسر مطلوبہ لا ہی پس موافق شرایط
سوال سکے ضرور ہی کہ ہو دین صورتین جبریہ ۱ + لا اور ۱ − لا دونون مجذور اور اسیواسطی فرض کرو کہ
۱ + لا = ف^۲ اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات لا = ف^۲ − ۱ اور ۱ − لا = ۲ − ف^۲ اور موافق
شرط سوال سکے لازم ہی کہ ۲ − ف^۲ بہی ایک مجذور ہو اب چونکہ یہہ بات ظاہر ہی کہ جذر ہر واحد دو جزو دار
اسس صورت جبریہ کا نہین نکل سکتا ہی تو لازم ہی کہ دریافت کرین ہم ایک ایسی صورت جسمین کہ صورت مفروض مجذور
ہوجای اور یہہ بات حاصل ہوتی ہی جسوقت کہ ہووی ف = ۱ کیونکہ اسس حالت مین ۲ − ف^۲ = ۲ − ۱ = ۱
تو فرض کرسکتے ہین ہم کہ ف = ۱ − ق اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات لا = ق^۲ − ۲ق اور
۲ − ف^۲ = ۱ + ۲ق − ق^۲ اور فرض کرو کہ جذر اسس صورت کا یہہ ہی ۱ − ق ر اور اسیواسطی حاصل
ہوگی یہہ مساوات ۱ + ۲ق − ق^۲ = ۱ − ۲ق ر + ق^۲ ر^۲ اور اسسے حاصل ہوتی یہہ مساوات
۲ − ق = − ۲ر + ق ر^۲ اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت ق کی

ق = (۲ر + ۲)/(ر^۲ + ۱) اور اسیواسطی لا = (۴ر − ۴ر^۳)/(ر^۲ + ۱)^۲ اور چونکہ ر ایک کسر ہی تو فرض کرو کہ ر = ط/ع

اور اب حاصل ہوگی یہہ مساوات لا = (۴ط ع^۳ − ۴ط^۳ ع)/(ط^۲ + ع^۲)^۲ = ۴ط ع (ع^۲ − ط^۲)/(ط^۲ + ع^۲)^۲ اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہے

کہ ع زیادہ ہی بہ نسبت ط کی پس اسیواسطی فرض کرو کہ ع = ۲ اور ط = ۱ اور اسصورت مین حاصل ہوینگے
یہہ قیمت لا کی لا = ۲۴/۲۵ اب فرض کرو کہ ع = ۳ اور ط = ۲ اور اس سے حاصل ہوگی یہہ مساوات
لا = ۱۲۰/۱۶۹ اور اسیواسطی حاصل ہونگی یہ مساواتین

۱ + لا = ۲۸۹/۱۶۹ اور ۱ − لا = ۴۹/۱۶۹ اور یہ دونون مجذور ہین کیونکہ یہ ظاہر ہے

کہ ۲۸۹/۱۶۹ = (۱۷/۱۳)۲ اور ۴۹/۱۶۹ = (۷/۱۳)۲

۴ ہم دریافت کیا چاہتے ہین ایک عدد مثل لا کی ایسا کہ خواہ اوسے عدد ۱۰ پر زیادہ کرین
اور خواہ اوسی عدد ۱۰ مین سے تفریق کرین دونون صورتونمین حاصل جمع اور حاصل تفریق اعداد مجذور ہوتے
ہین پس اس صورت مین ضرور ہی کہ کوئی ایسا عدد لا کی واسطی مقرر کرین کہ صورتین ۱۰ + لا اور ۱۰ − لا دونون
مجذور ہوجائین یہہ سوال حل ہوسکتا ہی بذریعہ اوس ترکیب کہ سوال گذشتہ مین لکھی گئی ہی لیکن اسجا پے
ہم ایک اور ترکیب اسکی حل کرنی کی بیان کرینگی یہہ بات بہت ظاہر ہی کہ حاصل ضرب دو مجذورونکا مجذور ہوتا
ہی اور اگر ۱۰ + لا اور ۱۰ − لا مجذور ہون تو ضرور ہی کہ حاصل ضرب انکا یعنی (۱۰ + لا)(۱۰ − لا)
یعنی ۱۰۰ − لا۲ مجذور ہونا چاہیئے اب چونکہ اول جزو اس صورت کا مجذور ہی تو ہم فرض کرسکتے ہین کہ جذر
۱۰۰ − لا۲ کا ۱۰ − ف لا ہی اور موافق اس فرض کے حاصل ہوگی یہہ مساوات
√(۱۰۰ − لا۲) = ۱۰ − ف لا اور جسوقت مجذور کرینگے دونون طرفون اس مساوات کو تو حاصل
ہوگی یہہ مساوات ۱۰۰ − لا۲ = ۱۰۰ − ۲۰ ف لا + ف۲ لا۲ اور اس سے حاصل ہوگی یہہ مساوات
ف۲ لا + لا = ۲۰ ف اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ لا = ۲۰ ف/(ف۲ + ۱) اور یہان سی یہہ بات ثابت
ہوتی ہی کہ اگر فرض کیجای واسطی لا کے ایک ایسی قیمت جو اس مساوات سی حاصل ہوتی ہی تو حاصل ضرب
۱۰۰ − لا۲ ایک عدد مجذور ہوجایگا لیکن یہہ بات ظاہر ہی کہ اگر ایک جزو حاصل ضرب مذکور کا مجذور ہو
تو ضرور ہی کہ دوسرا جزو بھی مجذور ہوجاے اور ہمین واسطی لا کی ایک ایسی قیمت دریافت کرنی ہی کہ جسکے
ذریعہ سی دونون صورتین ۱۰ + لا اور ۱۰ − لا مجذور ہوجائین پس اب دریافت کرنی ہی ایک ایسی قیمت
واسطی لا کی کہ ایک ان صورتونمین سے مثل ۱۰ + لا کی مجذور ہوجاے اب ظاہر ہی کہ

۱۰ + لا = ۱۰ + ۲۰ ف/(ف۲ + ۱) = (۱۰ ف۲ + ۲۰ ف + ۱۰)/(ف۲ + ۱) = ۱۰ (ف۲ + ۲ ف + ۱)/(ف۲ + ۱)

اور چونکہ ف² + ۲ف + ۱ ایک مجذور ہی تو باقی رہا ہمین یہہ کہ دریافت کرین ہم کوئی ایسی قیمت واسطے

لا کہ جسکے ذریعہ سے صورت ۱۰/(ف² + ۱) یا (۱۰ف² + ۱۰)/(ف² + ۱)² ایک مجذور ہوجائے

اور چونکہ نسب نما اسکسر کا ہی ایک مجذور ہی تو باقی رہا ہمین مجذور بنانا ۱۰ف² + ۱۰ کا اسیواسطے ضرور ہے

کہ دریافت کرین ہم ایک خاص ایسی صورت جسمین ۱۰ف² + ۱۰ ایک عدد مجذور ہوجائے اور یہہ اوسوقت

ہوتا ہی جب کہ ف = ۳ کیونکہ موافق اسی فرض کے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

۱۰ف² + ۱۰ = ۹۰ + ۱۰ = ۱۰۰ = (۱۰)² پس فرض کرسکتی ہین ہم ف = ۳ + ق اور اسیواسطے

حاصل ہوگی یہہ مساوات ۱۰۰ + ۶۰ق + ۱۰ق² = ۱۰ف² + ۱۰ اب فرض کرو کہ جذر صورت

۱۰۰ + ۶۰ق + ۱۰ق² کا یہہ ہی ۱۰ + ق ع اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات

۱۰۰ + ۶۰ق + ۱۰ق² = ۱۰۰ + ۲۰ق ع + ق²ع² اور اسسے حاصل ہوگی یہہ مساوات

ق = (۶۰ − ۲۰ع)/(ع² − ۱۰) اور اسکے ذریعہ سے ہمین قیمت ۳ + ق یعنے ف کی معلوم ہوجائیگی اور بوسیلہ

اسی قیمت کے معلوم ہوجائیگی ہمین قیمت لا کی اسی مساوات سی لا = ۲۰ف/(ف² + ۱) فرض کرو کہ

ع = ۳ اور موافق اسی فرض کے حاصل ہوگی یہہ مساوات ق = ۰ اور ف = ۳ اور اسیواسطے

لا = ۶ اور اسیواسطے صورت ۱۰ + لا = ۱۰ + ۶ = ۱۶ = ۴² اور ۱۰ − لا = ۴ = ایک مجذور لیکن اگر

ع = ۱ تو حاصل ہونگی یہہ مساواتین ق = − ۴۰/۹ اور ف = − ۱۳/۹ اور بذریعہ اسی

قیمت ف کے حاصل ہوگی یہہ قیمت لا کی لا = ۲۳۴/۲۵ اور اسسے حاصل ہوتی ہین یہہ مساواتین

۱۰ + لا = ۱۰ + ۲۳۴/۲۵ = ۴۸۴/۲۵ = (۲۲/۵)² اور

۱۰ − لا = ۱۰ − ۲۳۴/۲۵ = ۱۶/۲۵ = (۴/۵)² پس معلوم ہوا کہ دونون

صورتین مجذور رہین

۵ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا ایک ایسا عدد کہ جو اوسمین خواہ اوسکی مجذور پر عدد

ایک کا زیادہ کرین تو دونو صورتون مین حاصل جمع مجذور ہوتا ہی فرض کرو کہ لا عدد مطلوب ہے

پس موافق شرائط سوال کے ضرور ہی کہ ہووے یہہ مساوات لا + ۱ = ف² اور اسسے حاصل

ہوتی ہی یہہ مساوات لا = ف² − ۱ اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات لا² = ف⁴ − ۲ف² + ۱

$لا^۲ + ۱ = ف^۴ - ۲ف^۲ + ۲$ اور چونکہ موافق شرط سوال کے ضرور ہی کہ ہووی $لا^۲ + ۱$ ایک کامل مربع تو ضرور ہی کہ $\sqrt{ف^۴ - ۲ف^۲ + ۲}$ ایک کامل مجذور ہووے اسکی جای یہہ بات ظاہر ہی کہ اگر ہووی $ف = ۱$ تو صورت $\sqrt{ف^۴ - ۲ف^۲ + ۲}$ مجذور ہو جایگی پس فرض کرو کہ $ف = ۱ + ق$ اور جسوقت لکھینگے ہم یہہ قیمت ف کی بجای اوسکی صورت مذکور الصدر مین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $لا^۲ + ۱ = ف^۴ - ۲ف^۲ + ۲ =$
$۱ + ۴ق^۲ + ۴ق^۳ + ق^۴$ پس اب ضرور ہی کہ صورت اخیر مجذور ہووے اور اوسکو مجذور کرنی کی کئی ترکیبین ہین مثلاً فرض کرو کہ جذر اس صورت کا $۱ + ق^۲$ ہی اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات
$\sqrt{۱ + ۴ق^۲ + ۴ق^۳ + ق^۴} = ۱ + ق^۲$ اور جسوقت مجذور کرتے ہین ہم دونو طرفون اس مساوات کو اوسوقت حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $۱ + ۴ق^۲ + ۴ق^۳ + ق^۴ = ۱ + ۲ق^۲ + ق^۴$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $۲ق^۲ + ۴ق^۳ = ۰$ یعنی $۴ق = -۲$ اور $ق = -\frac{۱}{۲}$ اور اسی واسطے

$ف = ق + ۱ = ۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$ اور $لا = -\frac{۳}{۴}$ اور

$\therefore لا + ۱ = ۱ - \frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۴} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲$ اور $لا^۲ + ۱ = \left(-\frac{۳}{۴}\right)^۲ + ۱ =$

$\frac{۹}{۱۶} + ۱ = \frac{۲۵}{۱۶} = \left(\frac{۵}{۴}\right)^۲$ اب فرض کرو کہ جذر اس صورت جبریہ کا

$۱ + ۴ق^۲ + ۴ق^۳ + ق^۴$ یہہ ہی $۱ - ق^۲$ اور موافق اس فرض کے حاصل ہوگی یہہ مساوات
$\sqrt{۱ + ۴ق^۲ + ۴ق^۳ + ق^۴} = ۱ - ق^۲$ اور جسوقت مجذور کرتے ہین ہم دونو طرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $۱ + ۴ق^۲ + ۴ق^۳ + ق^۴ = ۱ - ۲ق^۲ + ق^۴$ اور اس مساوات سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $۶ق^۲ + ۴ق^۳ = ۰$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $۳ = -۲ق$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $ق = -\frac{۳}{۲}$ اور اسیواسطی

$ف = ۱ + ق = ۱ - \frac{۳}{۲} = -\frac{۱}{۲}$ اور $لا = ف^۲ - ۱ = \frac{۱}{۴} - ۱ = -\frac{۳}{۴}$

جیسیکہ پیشتر اب فرض کرو کہ جذر صورت مذکور کا $۱ + ۲ق + ق^۲$ ہی اور موافق اس فرض کے ظاہر ہی کہ اول اور دو اخیر کی اجزا صورت مذکور کی زائل ہو جائینگی پس اب حاصل ہوگی یہہ مساوات
$\sqrt{۱ + ۴ق^۲ + ۴ق^۳ + ق^۴} = ۱ + ۲ق + ق^۲$ اور جسوقت مجذور کرتے ہین ہم دونو طرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $۱ + ۴ق^۲ + ۴ق^۳ + ق^۴ =$
$(۱ + ۲ق)^۲ + ۲ق^۲(۱ + ۲ق) + ق^۴ = ۱ + ۴ق + ۴ق^۲ + ۲ق^۲ + ۴ق^۳ + ق^۴$ اور یہان سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $۴ق + ۲ق^۲ = ۰$ اور یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ $ق = -۲$ اور $ف = -۱$ اور $لا = ۰$ اب فرض کرو کہ جذر صورت مذکور کا $۱ - ۲ق - ق^۲$ ہی اور اس صورت مین حاصل ہوگی یہہ

مساوات ۱ + ۴ ق۲ + ۴ ق۳ + ق۴ = ۱ - ۴ ق + ۲ ق۲ + ۴ ق۳ + ق۴ اور اس سے حاصل ہوتی ہی
یہہ مساوات ق = - ۲ جبکہ پہلی آب فرض کرو کہ جذر صورت مذکور کا ۱ + ۲ ق۲ ہی اور اب حاصل ہوتی
ہی یہہ مساوات ۱ + ۴ ق۲ + ۴ ق۳ + ق۴ = ۱ + ۴ ق۲ + ۴ ق۴ اور یہان سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات
ق = ۴/۳ اور ∴ ف = ۷/۳ اور لا = ۴۹/۹ - ۱ = ۴۰/۹ اور اسیواسطی حاصل ہونگی یے
مساواتین لا + ۱ = ۴۰/۹ + ۱ = ۴۹/۹ = (۷/۳)۲ اور لا۲ + ۱ =
(۴۰/۹)۲ + ۱ = ۱۶۰۰/۸۱ + ۱ = ۱۶۸۱/۸۱ = (۴۱/۹)۲

۶ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا ایسی اعداد کا کہ اگر دو دو کو اونین سے اپسمین ضرب کرین
اور حاصل ضربون پر عدد ایک کا علیحدہ علیحدہ زیادہ کرین تو تینون صورتین اعداد مجذور حاصل ہون فرض
کرو کہ اعداد مطلوبہ لا اور ر اور ع ہین پس موافق شرایط سوال کے ضرور ہی کہ صورتین لا ر + ۱ اور
لا ع + ۱ اور ر ع + ۱ اعداد مجذور ہون فرض کرو کہ ہین یے دو مساواتین لا ع + ۱ = ف۲ اور ر ع + ۱
= ق۲ اور ان مساواتون سے حاصل ہوتی ہین یے مساواتین لا = (ف۲ - ۱)/ع اور ر = (ق۲ - ۱)/ع اور
جسوقت ضرب کرتی ہین ہم ان دونو مساواتون کو اپسمین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

لا ر = (ف۲ - ۱)(ق۲ - ۱)/ع۲ اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات

لا ر + ۱ = (ف۲ - ۱)(ق۲ - ۱)/ع۲ + ۱ پس اب ضرور ہی کہ ہووی یہہ صورت اخیر ایک کامل مجذور

لیکن یہہ بات ظاہر ہی کہ حاصل ضرب دو مجذورونکا مجذور ہوتا تو اگر ضرب کرین ہم اس صورت اخیر کو ع۲ مین تو
حاصل ضرب یعنی (ف۲ - ۱)(ق۲ - ۱) + ع۲ بھی مجذور ہونا چاہیئے اب فرض کرو کہ جذر اس مجذور کا
ع + ر ہی اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات (ف۲ - ۱)(ق۲ - ۱) + ع۲ = ع۲ + ۲ ع ر + ر۲
اور اس سے حاصل ہوگی یہہ مساوات (ف۲ - ۱)(ق۲ - ۱) = ۲ ع ر + ر۲ اور اس مساوات سی حاصل
ہوگی یہہ قیمت ع کی ع = (ف۲ - ۱)(ق۲ - ۱) - ر۲ ــــــــ اور اس مساوات مین کوئی سے
اعداد واسطے ف اور ق اور ر کی فرض سے کیے جاسکتے ہین مثلا اگر ہووی ر = (ف ق + ۱) تو حاصل ہونگی
یے مساواتین ر۲ = ف۲ق۲ + ۲ ف ق + ۱ اور ع = (ف۲ + ۲ ف ق + ق۲)/(۲ ف ق + ۱) اور اس سے حاصل ہوتی

مساوات لا = (ف^۲ − ۱) × (۲ف ق + ۲) / (ف^۲ + ۲ف ق + ق^۲) = ۲(ف ق + ۱) × (ف^۲ − ۱) / (ف + ق)^۲

اور د = ۲(ف ق + ۱) × (ق^۲ − ۱) / (ف + ق)^۲ اگر فقط اعداد صحیح مطلوب ہون تو ضرور ہی کہ اول فرض کرین
ہم کہ لا د + ۱ = ف^۲ اور ع = لا + د + ق اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات
لا ع + ۱ = لا(لا + د + ق) + ۱ = لا^۲ + لا د + لا ق + ۱ = لا^۲ + ق لا + ف^۲ اور تیسری صورت
یہہ ہوجایگی د ع + ۱ = د(لا + د + ق) + ۱ = لا د + د^۲ + د ق + ۱ = د^۲ + ق د + ف^۲ اور
یہان یہہ بات ظاہر ہی کہ سیے تینون صورتین کامل مجذور ہوسکتی ہین اگر فرض کرین ہم کہ ق = ± ۲ف کیونکہ
اس صورت مین حاصل ہونگی سیے مساواتین جنکی دوسری طرفین مجذور ہین لا د + ۱ = ف^۲ اور
لا ع + ۱ = لا^۲ ± ۲ف لا + ف^۲ = (لا ± ف)^۲ اور د ع + ۱ = د^۲ ± ۲ف د + ف^۲ = (د ± ف)^۲
اب مساوات اول سی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات لا د = ف^۲ − ۱ اور واسطی ف کی اسکے ہم کوئی سی قیمت
فرض کرسکتے ہین مثلاً فرض کرو کہ ف = ۳ اور اسیواسطی لا د = ۳^۲ − ۱ = ۹ − ۱ = ۸ پس معلوم ہوا
کہ حاصل ضرب لا اور د کا مساوی ہی ۸ کی اور اسیواسطی جو اعداد واسطی لا اور د کے فرض کیے جائین
ضروری کہ یہہ شرط پوری کرین پس فرض کرو کہ لا = ۲ اور اسیواسطے د = ۴ اور
ع = لا + د + ۲ف = ۲ + ۴ + ۶ = ۱۲ پس اب معلوم ہوجاینگی اعداد مطلوبہ اور امتحان اس مثال کا
اسطرح سیے ہوسکتا ہی لا د + ۱ = ۲ × ۴ + ۱ = ۸ + ۱ = ۹ = ۳^۲ اور
لا ع + ۱ = ۲ × ۱۲ + ۱ = ۲۴ + ۱ = ۲۵ = ۵^۲ اور د ع + ۱ = ۴ × ۱۲ + ۱ =
۴۸ + ۱ = ۴۹ = ۷^۲ اگر ف = ۴ تو ظاہر ہی کہ لا د = ف^۲ − ۱ = ۴^۲ − ۱ = ۱۶ − ۱ = ۱۵
اور اسیواسطی فرض کرو کہ لا = ۵ تو اس سے لازم آتا ہی کہ ہووے د = ۳ اور اسیواسطی
ع = لا + د + ۲ف = ۵ + ۳ + ۸ = ۱۶ پس معلوم ہوا کہ تین اعداد مطلوبہ یہہ ہین ۵ اور ۳ اور ۱۶
اور امتحان اس مثال کا یون ہوتا ہی لا د + ۱ = ۵ × ۳ + ۱ = ۱۵ + ۱ = ۱۶ = ۴^۲ = ایک عدد مجذور کے
اور لا ع + ۱ = ۵ × ۱۶ + ۱ = ۸۰ + ۱ = ۸۱ = ۹^۲ اور د ع + ۱ = ۳ × ۱۶ + ۱ =
۴۸ + ۱ = ۴۹ = ۷^۲ اگر ف = ۵ تو حاصل ہوگی یہہ مساوات لا د = ف^۲ − ۱ = ۵^۲ − ۱ =
۲۵ − ۱ = ۲۴ اور اسیواسطی فرض کرو کہ لا = ۳ اور اس سے حاصل ہوتی ہی مساوات د = ۸ اور اس سے
ع = لا + د + ۲ف = ۳ + ۸ + ۱۰ = ۲۱ اور یہان سے معلوم ہوا کہ تین اعداد مطلوبہ سیے ہین ۳ اور
۸ اور ۲۱ اور امتحان یون ہوتا ہی لا د + ۱ = ۳ × ۸ + ۱ = ۲۴ + ۱ = ۲۵ = ۵^۲

اور لاع + ۱ = ۳ × ۲۱ + ۱ = ۶۳ + ۱ = ۶۴ = ۸^۲

اور دع + ۱ = ۸ × ۲۱ + ۱ = ۱۶۸ + ۱ = ۱۶۹ = ۱۳^۲

۷ چاہتے ہین ہم دریافت کرنی تین ایسی اعداد مثل لا اور د اور ع کی کہ اگر اونین سے دو دو کو اسمین ضرب کرین اور تینون حاصل ضربون پر کوئی خاص عدد مثل ط کی علیحدہ علیحدہ جمع کرین تو حاصل جمع تینون صورتونمین مجذور ہووی ظاہر ہی کہ یہہ سوال حل ہو سکتا ہی بطور سوال گذشتہ کی کیونکہ جو کچھہ عمل اوسوقت ضرور تہا جسوقت بجای ط کے عدد ایک کا تہا وہی عمل اب بہی ضرور ہوگا اور اسس صورت مین مساوات اول یہہ ہوگی لا د = ف^۲ − ط مثلاً فرض کرو کہ ط = ۳ اور ف = ۵ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات لا د = ۵^۲ − ۳ = ۲۵ − ۳ = ۲۲ اور ظاہر ہی کہ اب فرض کرسکتی ہین ہم کہ لا = ۱۱ اور د = ۲ اور اسیواسطی ع = لا + د + ۲ف = ۱۱ + ۲ + ۱۰ = ۲۳ پس معلوم ہوا کہ تین اعداد مطلوبہ یہہ ہین ۱۱ اور ۲ اور ۲۳ اور امتحان اسس مثال کا یون ہوتا ہی لا د + ۳ = ۱۱ × ۲ + ۳ = ۲۲ + ۳ = ۲۵ = ۵^۲ = ایک عدد مجذور کی اور لاع + ۳ = ۱۱ × ۲۳ + ۳ = ۲۵۳ + ۳ = ۲۵۶ = ۱۶^۲ اور دع + ۳ = ۲ × ۲۳ + ۳ = ۴۶ + ۳ = ۴۹ = ۷^۲ اور اسیطور سی اور مثالین بہی حل ہو سکتی ہین جنمین ط کوئی اور عدد ہو

۸ دریافت کیا چاہتے ہین دو ایسی عدد کہ اگر ہر واحد کو اونین سے زیادہ کرین ہم مجذور دوسرے کی پر تو دونون صورتونمین حاصل جمع ایک عدد مجذور ہوتا ہی مثلاً فرض کرو کہ اعداد مطلوبہ لا اور د ہین تو ہم دریافت کیا چاہتے ہین ایسی قیمتین واسطی لا اور د کے کہ صورتین جبریہ لا^۲ + د اور د^۲ + لا دونو علیحدہ علیحدہ مجذور ہوویں فرض کرو کہ لا^۲ + د = ف^۲ اور اس مساوات سی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات د = ف^۲ − لا^۲ اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات د^۲ + لا = (ف^۲ − لا^۲)^۲ + لا = ف^۴ − ۲ف^۲ لا^۲ + لا^۴ + لا پس لازم ہی کہ بنادین ہم اسیطرحسی صورت اخیر کو ایک مجذور لیکن یہہ بات نہایت مشکل ہی تو فرض کرو کہ لا^۲ + د = (ف − لا)^۲ = ف^۲ − ۲ف لا + لا^۲ اور اسیطور سے د^۲ + لا = (ق − د)^۲ = ق^۲ − ۲ق د + د^۲ اور ان مساواتون سے حاصل ہونگی یے مساواتین د + ۲ف لا = ف^۲ اور لا + ۲ق د = ق^۲ اور یہان سی یہہ بات ظاہر ہی کہ یے دو مساواتین اول درجہ کی ہین اور اینمین دو مقدارین مجہول لا اور د ہین پس اگر دور کرین ہم ایک ان دو مقدارون مجہول مین سے بوسیلہ ان دو مساواتون کے اور بعد ازان دریافت کرین قیمت ایک مقدار مجہول کی اور بعد اسکی دوسری مقدار مجہول کی بہی تو حاصل ہون گے یے مساواتین

$\text{لا} = \frac{\text{۳ق ف}^{۲} - \text{ق}^{۲}}{\text{۴ف ق} - ۱}$ اور $\text{ی} = \frac{\text{۲ف ق}^{۲} - \text{ف}^{۲}}{\text{۴ف ق} - ۱}$ اور ان مساواتوں میں کوئی
قیمت واسطی ف اور ق کی فرض سے کیے جا سکتی سب ہے مثلاً فرض کرو کہ ف = ۲ اور ق = ۳ تو
حاصل ہونگی یے دو مساواتیں $\text{لا} = \frac{۱۵}{۲۳}$ اور $\text{ی} = \frac{۳۲}{۲۳}$ اور انکی وسیلہ سی حاصل ہوتی ہیں

یے مساواتیں $\text{لا}^{۲} + \text{ی} = \frac{۲۲۵}{۵۲۹} + \frac{۳۲}{۲۳} = \frac{۹۶۱}{۵۲۹} = \left(\frac{۳۱}{۲۳}\right)^{۲}$ اور

اسیطور سے $\text{ی}^{۲} + \text{لا} = \frac{۱۰۲۴}{۵۲۹} + \frac{۱۵}{۲۳} = \frac{۱۳۶۹}{۵۲۹} = \left(\frac{۳۷}{۲۳}\right)^{۲}$ اور اگر فرض

کریں ہم کہ ف = ۱ اور ق = ۳ تو حاصل ہونگی یے مساواتیں $\text{لا} = -\frac{۳}{۱۱}$ اور $\text{ی} = \frac{۱۷}{۱۱}$
اور یہہ مطابق سوال کی نہیں ہی کسو اسطی کہ ایک اعداد مطلوبہ میں سے منفی نکلا ہی لیکن فرض کر سکتے
ہیں ہم کہ ف = ۱ اور ق = $\frac{۳}{۲}$ اور اب حاصل ہونگی یے مساواتیں $\text{لا} = \frac{۳}{۲۰}$ اور $\text{ی} = \frac{۷}{۱۰}$ اور

انسی حاصل ہوتے ہیں یے مساواتیں $\text{لا}^{۲} + \text{ی} = \frac{۹}{۴۰۰} + \frac{۷}{۱۰} = \frac{۲۸۹}{۴۰۰} = \left(\frac{۱۷}{۲۰}\right)^{۲}$

$\text{ی}^{۲} + \text{لا} = \frac{۴۹}{۱۰۰} + \frac{۳}{۲۰} = \frac{۶۴}{۱۰۰} = \left(\frac{۸}{۱۰}\right)^{۲}$

4 دریافت کیا چاہتی ہیں ہم دو ایسی عدد کہ اگر اونکو جمع کریں تو حاصل جمع ایک عدد مجذور ہوتا ہی اور اگر
اونکی مجذور ونکو جمع کریں تو حاصل جمع ایک عدد چوتہی مرتبہ کا حاصل صعود ہوتا ہی یعنی اس عدد کا چوتہی مرتبہ کا جذر
پورا نکل سکتا ہی فرض کرو کہ اعداد مطلوبہ لا اور ی ہیں اور چونکہ موافق سوال سے کے چاہتی ہیں ہم دریافت کرنا ایسی
قیمتیں واسطی لا اور ی کی کہ صورت $\text{لا}^{۲} + \text{ی}^{۲}$ ایک چوتہی مرتبہ کا حاصل صعود ہو جاے تو ہم اول یہی بات دریافت کر سکینگے
فرض کرو کہ $\text{لا} = \text{ف}^{۲} - \text{ق}^{۲}$ اور $\text{ی} = \text{۲ف ق}$ اور اسیواسطی حاصل ہونگی یے مساواتیں $\text{لا}^{۲} = (\text{ف}^{۲} - \text{ق}^{۲})^{۲} =$
$\text{ف}^{۴} - \text{۲ف}^{۲}\text{ق}^{۲} + \text{ق}^{۴}$ اور $\text{ی}^{۲} = \text{۴ف}^{۲}\text{ق}^{۲}$ اور اسیواسطی $\text{لا}^{۲} + \text{ی}^{۲} =$
$\text{ف}^{۴} - \text{۲ف}^{۲}\text{ق}^{۲} + \text{ق}^{۴} + \text{۴ف}^{۲}\text{ق}^{۲} = \text{ف}^{۴} + \text{۲ف}^{۲}\text{ق}^{۲} + \text{ق}^{۴} = (\text{ف}^{۲} + \text{ق}^{۲})^{۲}$ لیکن تاکہ یہہ
مجذور چوتہی مرتبہ کا حاصل صعود ہووے ضرور ہی کہ $\text{ف}^{۲} + \text{ق}^{۲}$ ایک مجذور رہووی واسطی اس مطلب کی فرض کرو
کہ $\text{ف} = \text{ر}^{۲} - \text{س}^{۲}$ اور $\text{ق} = \text{۲ر س}$ اور انسی حاصل ہوتی ہیں سے یے مساواتیں
$\text{ف}^{۲} = (\text{ر}^{۲} - \text{س}^{۲})^{۲} = \text{ر}^{۴} - \text{۲ر}^{۲}\text{س}^{۲} + \text{س}^{۴}$ اور $\text{ق}^{۲} = \text{۴ر}^{۲}\text{س}^{۲}$ اور اسیواسطی حاصل ہوتی ہی

ہوتی ہی یہہ مساوات ف^۲ + ق^۲ = ر^۴ − ۲ ر^۲ س^۲ + س^۴ + ۴ ر^۲ س^۲ = ر^۴ + ۲ ر^۲ س^۲ + س^۴ =
(ر^۲ + س^۲)^۲ اور اس سے یہہ معلوم ہوا کہ (ف^۲ + ق^۲)^۲ = (ر^۲ + س^۲)^۴ اور اسیواسطی حاصل ہوتی
ہی یہہ مساوات لا^۲ + د^۲ = (ر^۲ + س^۲)^۴ = ایک چوتھی مرتبہ کی حاصل ضرب کی ہمتی فرض کیا ہی
لا = ف^۲ − ق^۲ اور ف = ر^۲ − س^۲ اور ق = ۲ ر س پس اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات
لا = ر^۴ − ۶ ر^۲ س^۲ + س^۴ اور اسیطور سی حاصل ہوگی یہہ مساوات د = ۴ ر^۳ س − ۴ ر س^۳ اور اسیواسطے
لا + د = ر^۴ + ۴ ر^۳ س − ۶ ر^۲ س^۲ − ۴ ر س^۳ + س^۴ پس لازم ہی کہ بنادین ہم اسیطور
سی اس صورت جبریہ اخیر کو ایک کامل مجذور واسطی اسمطلب کی فرض کرو کہ جذر اس صورت کا
ر^۲ − ۲ ر س + س^۲ ہی اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات
ر^۴ + ۴ ر^۳ س − ۶ ر^۲ س^۲ − ۴ ر س^۳ + س^۴ = (ر^۲ − ۲ ر س + س^۲)^۲ =
ر^۴ − ۴ ر^۳ س + ۶ ر^۲ س^۲ − ۴ ر س^۳ + س^۴ اور جسوقت دور کرتی ہین ہم دونون طرفون کے دو دو
خیر جزؤنکو اور باقی جزؤن کو قسمت کرتے ہین ر^۲ س پر اوسوقت حاصل ہوتی ہی مساوات ۴ ر − ۶ س =
− ۴ ر + ۶ س یا یہہ مساوات ۸ ر = ۱۲ س یا ر = ۳/۲ س اور اگر ر = ۳ تو س = ۲ اور
موافق ان قیمتون ر اور س کے حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت لا کی لا = − ۱۱ لیکن یہہ قیمت منفی ہی اور اسیواسطے
نکمی ہی پس اب فرض کرو کہ ر = ۳/۲ س + ط اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات

ر^۲ = (۳/۲ س + ط)^۲ = ۹/۴ س^۲ + ۳ س ط + ط^۲ اور

ر^۳ = ۲۷/۸ س^۳ + ۲۷/۴ س^۲ ط + ۹/۲ س ط^۲ + ط^۳ اور اسیواسطی اب حاصل
ہوگی سب مساواتین کہ اونکی اکٹھا کرنی سے قیمت لا + د کی پیدا ہوتی ہی یعنی وہ صورت پیدا ہوتی
ہی جسکو مجذور بنانا منظور ہی ر^۴ = ۸۱/۱۶ س^۴ + ۲۷/۲ س^۳ ط + ۲۷/۲ س^۲ ط^۲ + ۶ س ط^۳ + ط^۴

+ ۴ ر^۳ س = ۲۷/۲ س^۴ + ۲۷ س^۳ ط + ۱۸ س^۲ ط^۲ + ۴ س ط^۳

− ۶ ر^۲ س^۲ = − ۲۷/۲ س^۴ − ۱۸ س^۳ ط − ۶ س^۲ ط^۲

− ۴ ر س^۳ = − ۶ س^۴ − ۴ س^۳ ط

+ س^۴ = س^۴ اور حاصل جمع ان تمام اجزا کا یہہ ہی

۱/۱۶ س^۴ + ۳۷/۲ س^۳ ط + ۵۱/۲ س^۲ ط^۲ + ۱۰ س ط^۳ + ط^۴

اور چونکہ یہہ صورت اوسوقت بہی مجذور رہیگی جسوقت ضرب کرین ہم اوسکو ۱۶ مین کہ ایک عدد مجذور ہی تو عمل ضرب کا

کوئی سی عدد ۱۶ آ کی مضلعوں ہی یہہ صورت جسکو مجذور کرنا منظور ہی

$\text{س}^{4} + ۲۹۶\,\text{س}^{3}\text{ط} + ۴۰۰۸\,\text{س}^{2}\text{ط}^{2} + ۱۱۶۰\,\text{س}\,\text{ط}^{3} + ۱۶\,\text{ط}^{4}$ فرض کرو کہ جذر اس صورت اخیر کا یہہ ہی $\text{س}^{2} + ۱۴۸\,\text{س}\,\text{ط} - ۴\,\text{ط}^{2}$ اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$\text{س}^{4} + ۲۹۶\,\text{س}^{3}\text{ط} + ۴۰۰۸\,\text{س}^{2}\text{ط}^{2} + ۱۱۶۰\,\text{س}\,\text{ط}^{3} + ۱۶\,\text{ط}^{4} =$$

$$\text{س}^{4} + ۲۹۶\,\text{س}^{3}\text{ط} + ۲۱۸۹۶\,\text{س}^{2}\text{ط}^{2} - ۱۱۸۴\,\text{س}\,\text{ط}^{3} + ۱۶\,\text{ط}^{4}$$

اور اس صورت مین ظاہر ہی کہ دونون طرفون اس مساوات کی اول دو جزو اور اخیر کا جز زائل ہوجاتے ہین اور اسیواسطے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

$$۲۱۸۹۶\,\text{س} - ۱۱۸۴\,\text{ط} = ۴۰۰۸\,\text{س} + ۱۱۶۰\,\text{ط}$$

اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

$$\frac{\text{س}}{\text{ط}} = \frac{۱۳۴۴}{۲۱۴۸۸} = \frac{۳۳۶}{۵۳۷۲} = \frac{۸۴}{۱۳۴۳}$$

اور یہان سے معلوم ہوا کہ $\text{س} = ۸۴$ اور $\text{ط} = ۱۳۴۳$ اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

$\text{ر} = \frac{۳}{۲}\text{س} + \text{ط} = ۱۴۶۹$ اور اسیواسطی حاصل ہوتی ہین یے مساواتین

$$\text{لا} = \text{ر}^{4} - ۶\,\text{ر}^{2}\text{س}^{2} + \text{س}^{4} = ۴۵۶۵۴۸۶۰۲۷۷۶۱$$

$$\text{ی} = ۴\,\text{ر}^{3}\text{س} - ۴\,\text{ر}\,\text{س}^{3} = ۱۰۶۱۶۵۲۲۹۳۵۲۰$$

۱۰ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا تین ایسے اعداد کا کہ اگر ان تینون کو جمع کرین تو حاصل جمع ایک عدد مجذور ہووے اور اگر انمین سے کوئی سی دو دو کو جمع کرین تو بہی حاصل جمع ایک عدد مجذور ہووے فرض کرو کہ اعداد مطلوبہ $۴\,\text{لا}$ اور $\text{لا}^{2} - ۴\,\text{لا}$ اور $۲\,\text{لا} + ۱$ ہین اس صورت مین ظاہر ہی کہ

$(۴\,\text{لا}) + (\text{لا}^{2} - ۴\,\text{لا}) = \text{لا}^{2} =$ عدد مجذور اور $\text{لا}^{2} - ۴\,\text{لا} + ۲\,\text{لا} + ۱ =$

$\text{لا}^{2} - ۲\,\text{لا} + ۱ = (\text{لا} - ۱)^{2} =$ ایک عدد مجذور اور $۴\,\text{لا} + \text{لا}^{2} - ۴\,\text{لا} + ۲\,\text{لا} + ۱ =$

$\text{لا}^{2} + ۲\,\text{لا} + ۱ = (\text{لا} + ۱)^{2} =$ ایک عدد مجذور پس تین شرطین سوال کی تو پوری ہوئین اب

باقی رہی فقط یہہ شرط کہ ہووے حاصل جمع $۴\,\text{لا}$ اور $۲\,\text{لا} + ۱$ کا ایک عدد مجذور یعنی $۶\,\text{لا} + ۱$ ایک عدد مجذور ہووے پس فرض کرو کہ $۶\,\text{لا} + ۱ = \text{ط}^{2}$ اور اس مساوات سی حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت لا کے

$\text{لا} = \frac{\text{ط}^{2} - ۱}{۶}$ اور اسیواسطی $۴\,\text{لا} = \frac{۴\,\text{ط}^{2} - ۴}{۶}$ اور $\text{لا}^{2} - ۴\,\text{لا} =$

$\left(\frac{\text{ط}^{2} - ۱}{۶}\right)^{2} - \frac{۴\,\text{ط}^{2} - ۴}{۶} = \frac{\text{ط}^{4} - ۲۶\,\text{ط}^{2} + ۲۵}{۳۶}$ اور $۲\,\text{لا} + ۱ = ۱ + \frac{۲\,\text{ط}^{2} - ۲}{۶}$

پس معلوم ہوا کہ تین اعداد مطلوبہ یے ہین $\frac{۲\,\text{ط}^{2} - ۲}{۳}$ اور $\frac{\text{ط}^{4} - ۲۶\,\text{ط}^{2} + ۲۵}{۳۶}$ اور $\frac{\text{ط}^{2} + ۲}{۳}$

اس صورت مین یہہ ظاہر ہی کہ جو صورتین جبریہ واسطی تین عددون مطلوبہ کی فرض کیگئی ہین وے ایسی ہین کہ ہر شخص کے یکایک خیال مین نہین آتی ہین پس اس جا یہہ بات کہی جاسکتی ہی کہ گو فرضون مین کوئی بات محال نہین پائی گئی ہی لیکن ہم یہہ کیونکر جانین کہ یہی صورتین فرض کرنی چاہئین تاکہ سوال بآسانی حل ہوجاوے اسکا جواب یہہ ہی کہ اگر کوئی شخص ذرا بہی غور کریگا اوسی یہہ معلوم ہوسکتا ہی کہ یے صورتین ایسی ہین کہ اونکی فرض کرنی سے تین شرطین سوال کی ایک ہی بار پوری ہوجاتی ہین اور باقی رہجاتی ہی فقط چوتہی شرط اور اوسکا پورا کرنا ہوتا ہی بوسیلہ اور عملون کے بیان سے طالب علم کو ایک نئی بات یہہ معلوم ہوگی کہ فرض کرنی مین ہی طالب علم اس فن کی عقل ظاہر ہوتی ہی کیونکہ جسکو زیادہ عقل ہوگی وہ ایسی ایسی فرض کریگا کہ اونکی وسیلہ سی سوال بسہولت حل ہوجایگا

١١ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا دو ایسی عدد مجذور کا کہ حاصل تفریق انکا کوئی خاص عدد مثل ح کے ہو فرض کرو کہ ط اور ص غیر مساوی عدد ایسی ہین کہ اونکا حاصل ضرب ح ہوتا ہی اب فرض کرو کہ جذر اول عدد مجذور کا لا ہی اور جذر دوسرے عدد مجذور کا مساوی ہی $\text{لا} + \text{ص}$ کے پس اب حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$(\text{لا}+\text{ص})^2 - \text{لا}^2 = \text{لا}^2 + 2\,\text{ص}\,\text{لا} + \text{ص}^2 - \text{لا}^2 = 2\,\text{ص}\,\text{لا} + \text{ص}^2 = \text{ح} = \text{ط}\,\text{ص}$$

اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $2\,\text{لا} + \text{ص} = \text{ط}$ اور اس مساوات سی حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت لا کی $\text{لا} = \frac{\text{ط}-\text{ص}}{2}$ اور اسیواسطی حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت $\text{لا}+\text{ص}$ کی

$$\text{لا}+\text{ص} = \frac{\text{ط}-\text{ص}}{2} + \text{ص} = \frac{\text{ط}+\text{ص}}{2}$$

اور یہان سے یہہ معلوم ہوا کہ وہ اعداد مجذور مطلوبہ یے ہین $\left(\frac{\text{ط}-\text{ص}}{2}\right)^2$ اور $\left(\frac{\text{ط}+\text{ص}}{2}\right)^2$ مثلاً فرض کرو کہ $\text{ح} = 60$ اور اسیواسطے $\text{ط} \times \text{ص} = 30 \times 2$ اور اسیواسطی حاصل ہونگی یے مساواتین

$$\frac{\text{ط}-\text{ص}}{2} = \frac{30-2}{2} = \frac{28}{2} = 14 \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ط}+\text{ص}}{2} = \frac{30+2}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

اور $(14)^2 = 196$ اور $(16)^2 = 256$ پس معلوم ہوا کہ اعداد مطلوبہ $\overline{196}$ اور $\overline{256}$ ہین جسوقت فرض کیا جاوے واسطی ح کے عدد $\overline{60}$ کا

١٢ دریافت کیا چاہتے ہین ہم ایسی دو عدد کہ حاصل جمع اور حاصل تفریق انکا دونون مجذور ہووین فرض کرو کہ اعداد مطلوبہ لا^2 اور $\text{لا}^2 - \text{لا}$ ہین یہہ ظاہر ہی کہ حاصل جمع ان دو عددونکا یعنی

$\text{لا} + \text{لا}^{٢} - \text{لا}$ یا $\text{لا}^{٢}$ ایک مجذور ہی اور یہان سی معلوم ہوا کہ اول شرط سوال کی تو پوری ہوئی پس اب باقی رہی دوسری شرط یعنی اب لازم ہی کہ دریافت کرین ہم کوئی ایسی قیمت واسطی لا کے کہ صورت جبریہ $\text{لا}^{٢} - ٢\,\text{لا}$ ایک مجذور ہوجاوے اب فرض کرو کہ جذر $\overline{\text{لا}^{٢} - ٢\,\text{لا}}$ کا $\text{لا} - \text{د}$ ہی اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات $\text{لا}^{٢} - ٢\,\text{لا} = (\text{لا} - \text{د})^{٢} = \text{لا}^{٢} - ٢\,\text{لا}\,\text{د} + \text{د}^{٢}$ اور اس مساوات سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $٢\,\text{لا}\,\text{د} - ٢\,\text{لا} = \text{د}^{٢}$ اور اس مساوات سی حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت واسطے $\text{لا}^{٢}$ کے $\text{لا} = \frac{\text{د}^{٢}}{٢\text{د} - ٢}$ اور $\text{لا}^{٢} - \text{لا} = \left(\frac{\text{د}^{٢}}{٢\text{د} - ٢}\right)^{٢} - \frac{\text{د}^{٢}}{٢\text{د} - ٢}$ اور یہان یہہ بات معلوم ہوئی کہ اعداد مطلوبہ یہہ ہین $\frac{\text{د}^{٢}}{٢\text{د} - ٢}$ اور $\overline{\left(\frac{\text{د}^{٢}}{٢\text{د} - ٢}\right)^{٢} - \frac{\text{د}^{٢}}{٢\text{د} - ٢}}$ اور اسیواسطے واسطی د کی کوئی قیمت فرض کیجاسکتی ہی بشرطیکہ وہ زیادہ ہو عدد ١ سی مثلاً اگر ہووے $\text{د} = ٢$ تو اعداد مطلوبہ ان مساواتون سے معلوم ہوجاوینگی $\text{لا} = \frac{\text{د}^{٢}}{٢\text{د} - ٢} = \frac{٤}{٤ - ٢} = \frac{٤}{٢} = ٢$ اور

$$\text{لا}^{٢} - \text{لا} = \left(\frac{\text{د}^{٢}}{٢\text{د} - ٢}\right)^{٢} - \frac{\text{د}^{٢}}{٢\text{د} - ٢} = ٢^{٢} - ٢ = ٤ - ٢ = ٢$$

پس اسیجای حاصل جمع دو عددون مطلوب کا یعنی ٤ ایک مجذور ہی لیکن حاصل تفریق انکا صفر ہی کہ وہ بھی ایک صفر کا مجذور تصور کیاجاسکتا ہی لیکن ہم لینگی ایک اور مثال مثلاً فرض کرو کہ $\text{د} = ٣$ اور اس صورت مین حاصل ہونگی یہہ مساواتین $\text{لا} = \frac{\text{د}^{٢}}{٢\text{د} - ٢} = \frac{٩}{٦ - ٢} = \frac{٩}{٤}$ اور

$$\text{لا}^{٢} - \text{لا} = \left(\frac{\text{د}^{٢}}{٢\text{د} - ٢}\right)^{٢} - \frac{\text{د}^{٢}}{٢\text{د} - ٢} = \frac{٨١}{١٦} - \frac{٩}{٤} = \frac{٨١}{١٦} - \frac{٣٦}{١٦}$$

$= \frac{٤٥}{١٦}$ اور اس صورت مین ظاہر ہی کہ حاصل جمع دونو عددون مطلوبہ کا یعنی یہہ

$$\frac{٤٥}{١٦} + \frac{٩}{٤} = \frac{٤٥}{١٦} + \frac{٣٦}{١٦} = \frac{٨١}{١٦} = \left(\frac{٩}{٤}\right)^{٢}$$

ایک مجذور ہی اور اسیطور سے حاصل تفریق انکا یہہ

$$\frac{٤٥}{١٦} - \frac{٩}{٤} = \frac{٤٥}{١٦} - \frac{٣٦}{١٦} = \frac{٩}{١٦} = \left(\frac{٣}{٤}\right)^{٢}$$

جو ایک عدد مجذور ہی

١٣١ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا ایسی اعداد مجذور کو کہ جو فرق درمیان اول اور دوسرے کی ہی وہی فرق درمیان دوسرے اور تیسری کی ہی فرض کرو کہ اول عدد مطلوب $\text{ط}^{٢}$ ہی اور فرق اسمین اور دوسرے مین ق اور

دوسری اور تیسری مین $۲ ط ص + ص^{۲}$ ہی پس اس صورت کے اعداد مطلوبہ یے ہونگی $ط^{۲}$ اور
$ط^{۲} + ۲ ط ص + ص^{۲}$ اور $ط^{۲} + ۴ ط ص + ۲ ص^{۲}$ اسجای ظاہر ہی کہ اول دو اعداد تو مجذور
ہین پس صرف باقی رہی صورت اخیر کہ اوسکو بہی مجذور بنانا چاہیئے یہہ بات ظاہر ہی کہ جذر
$ط^{۲} + ۴ ط ص + ۲ ص^{۲}$ کا زیادہ ہے $ط + ص$ سے اور اسیواسطی فرض کرو کہ وہ $ط + ص + س$ ہی
اور مواقف اس فرض کے حاصل ہوگی یہہ مساوات $\sqrt{ط^{۲} + ۴ ط ص + ۲ ص^{۲}} = ط + ص + س$
اور جبوقت مجذور کرینگی ہم دونون طرفون مساوات کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $ط^{۲} + ۴ ط ص + ۲ ص^{۲} =$
$(ط + ص + س)^{۲} = (ط + ص)^{۲} + ۲ (ط + ص) س + س^{۲}$ اور یہان سے معلوم ہوا کہ
$۲ ط ص + ص^{۲} = ۲ (ط + ص) س + س^{۲} = ۲ ط س + ۲ ص س + س^{۲}$ اور اس سے
حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $۲ ط ص - ۲ ط س = ۲ ص س + س^{۲} - ص^{۲}$ یا
$ط (۲ ص - ۲ س) = ۲ ص س + س^{۲} - ص^{۲}$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

$$ط = \frac{۲ ص س + س^{۲} - ص^{۲}}{۲ ص - ۲ س}$$

اسجاے ہم فرض کرسکتے کوئی سی قیمتین واسطی ص اور س
کے لیکن اسجاے ظاہر ہی کہ ط کی قیمتین اکثر کسور دریافت ہونگی پس اگر ہم دریافت کیا چاہین اعداد مجذور صحیح تو یہہ
بات جاننی چاہیئے کہ اگر کئی مجذور ہووین اور اونکی نسب نما ایکسی ہون تو اونکو اس نسب نما مین ضرب دینے
سے اعداد مجذور صحیح بنا سکتے ہین مثلاً اگر ہووین یے مجذور $\frac{۱۶}{۹}$ اور $\frac{۳۶}{۹}$ اور $\frac{۶۴}{۹}$ اور
ضرب کرین ہم ان سبہونکو ۹ مین تو جو ہین حاصل ضرب حاصل ہونگی وے اعداد مجذور صحیح ہونگی اسجاے
یہہ بات بہی ظاہر ہی کہ اگر ط کے واسطے کوئی کسر ایسی فرض کے جائی کہ اوسکا نسب نما عدد ۲ کا ہووے
تو فرق عام یعنی $۲ ط ص + ص^{۲}$ ایک عدد صحیح ہوگا پس اس صورت مین تینون مجذورون کے نسب نما ایک
ہونگی مثلاً فرض کرو کہ $ط = \frac{۲ ص س + س^{۲} - ص^{۲}}{۲ ص - ۲ س}$ مین $ص = ۲$ اور $س = ۱$ پس حاصل
ہونگی یے مساواتین $۲ ص س + س^{۲} - ص^{۲} = ۲ \times ۲ \times ۱ + ۱^{۲} - ۲^{۲} = ۴ + ۱ - ۴ = ۱$ اور
$۲ ص - ۲ س = ۲ \times ۲ - ۲ \times ۱ = ۲$ پس معلوم ہوا کہ $ط = \frac{۱}{۲}$ اور اسیواسطے
حاصل ہونگی یے مساواتین $ط^{۲} = \frac{۱}{۴}$ اور $ط^{۲} + ۲ ط ص + ص^{۲} = \frac{۱}{۴} + ۶ = \frac{۲۵}{۴}$
اور $ط^{۲} + ۴ ط ص + ۲ ص^{۲} = \frac{۲۵}{۴} + ۶ = \frac{۲۵}{۴} + \frac{۲۴}{۴} = \frac{۴۹}{۴}$ پس معلوم ہوا کہ
کہ تین اعداد مطلوبہ یے ہین $\frac{۱}{۴}$ اور $\frac{۲۵}{۴}$ اور $\frac{۴۹}{۴}$ اور اگر اعداد صحیح مطلوب ہون تو لازم ہے

کہ ضرب کریں ہم ان اعداد کو عدد چار میں تو حاصل ہونگی سیے اعداد مجذور ۱ اور ۲۵ اور ۴۹ ہیں کہ انمین ۲۴ کا فرق عام ہی کیونکہ $۱ + ۲۴ = ۲۵$ اور $۲۵ + ۲۴ = ۴۹$ اب فرض کرو کہ $س = ۲$ اور $ص = ۳$ اور موافق اس فرض کے حاصل ہونگی سیے مساواتین

$$ط = \frac{۲ص س + س^۲ - ص^۲}{۲ص - ۲س} = \frac{۱۲ + ۴ - ۹}{۶ - ۴} = \frac{۷}{۲}$$ اور

$۲طص + ص^۲ = ۲۱ + ۹ = ۳۰$ اور اسیواسطی حاصل ہونگی سیے مساواتین

$$ط^۲ = \left(\frac{۷}{۲}\right)^۲ = \frac{۴۹}{۴}$$ اور $$ط^۲ + ۲طص + ص^۲ = \frac{۴۹}{۴} + ۳۰ =$$

$$= \left(\frac{۱۳}{۲}\right)^۲$$ اور $$ط^۲ + ۴طص + ۲ص^۲ = \frac{۱۶۹}{۴} + ۳۰ = \frac{۲۸۹}{۴} = \left(\frac{۱۷}{۲}\right)^۲$$

پس معلوم ہوا کہ تین اعداد مجذور مطلوبہ سیے ہیں $\frac{۴۹}{۴}$ اور $\frac{۱۶۹}{۴}$ اور $\frac{۲۸۹}{۴}$ اور اگر اعداد صحیح مطلوب ہوں تو لازم ہیں کہ ضرب کریں ہم انکو عدد ۴ سے پس اسیواسطی اعداد مجذور صحیح سیے ہونگے ۴۹ اور ۱۶۹ اور ۲۸۹ اور انمین فرق عام ۱۲۰ ہی کیونکہ $۴۹ + ۱۲۰ = ۱۶۹$ اور $۱۶۹ + ۱۲۰ = ۲۸۹$ اب فرض کرو کہ $ص = ۴$ اور $س = ۳$ اور اسیواسطے حاصل ہونگی سیے مساواتین

$$ط = \frac{۲ص س + س^۲ - ص^۲}{۲ص - ۲س} = \frac{۲۴ + ۹ - ۱۶}{۸ - ۶} = \frac{۱۷}{۲}$$ اور

$۲طص = ۱۷ \times ۴ = ۶۸$ اور $۲طص + ص^۲ = ۶۸ + ۱۶ = ۸۴$ اور اسیواسطے حاصل ہونگی سیے مساواتین $ط^۲ = \left(\frac{۱۷}{۲}\right)^۲ = \frac{۲۸۹}{۴}$ اور $ط^۲ + ۲طص + ص^۲ =$

$$\frac{۲۸۹}{۴} + ۸۴ = \frac{۲۸۹}{۴} + \frac{۳۳۶}{۴} = \frac{۶۲۵}{۴} = \left(\frac{۲۵}{۲}\right)^۲$$ اور

$$\frac{۶۲۵}{۴} + ۸۴ = \frac{۶۲۵}{۴} + \frac{۳۳۶}{۴} = \frac{۹۶۱}{۴} = \left(\frac{۳۱}{۲}\right)^۲$$ پس معلوم ہوا کہ

تین اعداد مجذور مطلوب سیے ہیں $\frac{۲۸۹}{۴}$ اور $\frac{۶۲۵}{۴}$ اور $\frac{۹۶۱}{۴}$ اور اگر اعداد صحیح مطلوب ہوں تو وہ یہہ ہونگی ۲۸۹ اور ۶۲۵ اور ۹۶۱ اور انمین فرق عام ۳۳۶ ہی کیونکہ

۲۸۹ + ۳۳۶ = ۶۲۵ اور ۶۲۵ + ۳۳۶ = ۹۶۱ پس تین قیمتین اعداد مجذور مطلوبہ کی
اعداد صحیح سے یہ ہین ۱ ، ۲۵ ، ۴۹ اور ۴۹ ، ۱۶۹ ، ۲۸۹ اور ۲۸۹ ، ۶۲۵ ، ۹۶۱ اور اسیطور سی اور
بہی اعداد معلوم ہو سکتے ہین یہہ طریقہ حل کرنی سوال گذشتہ کا بالکل نیا ہی اور بہت سہل ہی اور اسسے بیشمار
اعداد مجذور معلوم ہو سکتے ہین اور یہہ اعداد خواہ کسور ہون اور خواہ صحیح

۱۴ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا ایک ایسا عدد مجذور کہ اگر اوسمین سے عدد ۴ کا نکالین اور حاصل
تفریق کو ۷ پر قسمت کرین تو خارج قسمت ایک عدد صحیح نکلتا ہی اور باقی کچہہ نہین نکلتا یہہ سوال مہندس بہاسکرا
چارج نی اپنی مشہور کتاب بیج گنت مین لکہا ہی اوسکا طریقہ حل کرنیکا ذرا پیچیدہ ہی ہم ایک اور آسان طریقہ سی
اسی حل کرتا ہون مثلاً فرض کرو کہ عدد مجذور مطلوبہ لا^{2} ہی اور یہہ بہی فرض کرو کہ خارج قسمت مذکور د ہی پس
اب حاصل ہوگی یہہ مساوات $\frac{\text{لا}^2 - ۴}{۷}$ = د اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت لا^{2} کی لا^{2} = ۷د + ۴
اب لازم ہی کہ کسی ترکیب سے بناوین ہم صورت ۷د + ۴ کو ایک کامل مجذور اور واسطی اسمطلب کی فرض کرو کہ جذر
اسس صورت کا ۲ + ح ہی اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات ۷د + ۴ = ۴ + ۴ح + ح^{2}
اور اسیواسطی ۷د = ۴ح + ح^{2} اور د = $\frac{۴\text{ح} + \text{ح}^2}{۷}$ اب فرض کرو کہ ۷ن = ح اور اسیواسطے
حاصل ہوگی یہہ مساوات د = ۴ن + ۷ن^{2} اور اسجای واسطی ن کے کوئی عدد صحیح فرض کیا جاسکتا ہی
مثلاً فرض کرو کہ ن = ۱ و اسیواسطی لا^{2} = ۷د + ۴ = ۱۱ × ۷ + ۴ = ۷۷ + ۴ = ۸۱ = ۹^{2}
اور اگر ن = ۲ تو د = ۴ × ۲ + ۷ × ۲^{2} = ۸ + ۲۸ = ۳۶ اور اسیواسطی
لا^{2} = ۷د + ۴ = ۷ × ۳۶ + ۴ = ۲۵۲ + ۴ = ۲۵۶ = ۱۶^{2}

۱۵ چاہتی ہین ہم حل کرنا سوال (۱۳) کو ایک اور طریقہ سی جو طریقہ سابق کی سے آسان ہو فرض
کرو کہ دہ تین اعداد مجذور کہ جنمین اول اور دوسرے مین وہی فرق ہی جو مابین دوسرے اور تیسری کی واقع ہی یہ
ہین لا^{2} اور د^{2} اور ع^{2} پس موافق قاعدہ سلسلہ جمع او تفریق کے یہہ بات ظاہر ہی کہ لا^{2} + ع^{2} = ۲د^{2}
اب فرض کرو کہ لا = ف + ق اور ع = ف − ق اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات
لا^{2} + ع^{2} = (ف + ق)^{2} + (ف − ق)^{2} = ۲ف^{2} + ۲ق^{2} = ۲د^{2} اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ
مساوات ف^{2} + ق^{2} = د^{2} اب تاکہ ہو جاوے صورت ف^{2} + ق^{2} ایک مجذور تو فرض کرو کہ ف = ۲م
اور ق = م^{2} − ۱ اور اسیواسطی ف^{2} + ق^{2} = ۴م^{2} + م^{4} − ۲م^{2} + ۱ = م^{4} + ۲م^{2} + ۱ = (م^{2} + ۱)^{2}
اور یہانسی یہہ معلوم ہوا کہ د^{2} = (م^{2} + ۱)^{2} اور جسوقت لیتی ہین ہم جذر دونون طرفون اسس مساوات کا تو حاصل
ہوتی ہی یہہ مساوات د = م^{2} + ۱ پس اس صورت مین حاصل ہونگی یہہ قیمتین لا اور د اور ع کی

مثلاً فرض کرو کہ م = ۱ تو لا = ۴ م + م۲ − ۱ اور ع = ۲ م − م۲ + ۱ اور ر = م۲ + ۱
اور ر۲ = ۴ اور ع۲ = ۴ اور ظاہر ہی کہ فرق ان مجذورونمین صفر ہی پس اب فرض کرو کہ م = ۲ اور اسیواسطے
حاصل ہونگی سیے مساواتین لا = ۷ اور ر = ۵ اور ع = ۱ اور اسی سببسے لا۲ = ۴۹ اور
ر۲ = ۲۵ اور ع۲ = ۱ اور یہان سے یہہ معلوم ہوا کہ تین اعداد مجذور مطلوبہ سیے ہین ۱ اور ۲۵ اور ۴۹
اب فرض کرو کہ م = ۳ اور موافق اسکے لا = ۱۴ اور ر = ۱۰ اور ع = −۲ اور اسیواسطے
لا۲ = ۱۹۶ اور ر۲ = ۱۰۰ اور ع۲ = ۴ اور یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ تین اعداد مجذور مطلوبہ سیے ہین
۴ اور ۱۰۰ اور ۱۹۶ اور اسیطورسی اور اعداد بہی معلوم ہوسکتی ہین

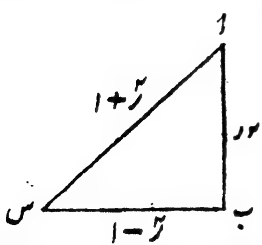
۱۰۶ حاصل تفریق دو شخصونکی عمرون کے مجذورونمین ایک خاص وقت مین ۴۵ برس تہا اور ایک
دوسرے وقت مین ۱۵۹ بتادیا تہی عمران دو شخصون کی علیحدہ علیحدہ فرض کرو کہ دو شخصون کی عمرین وقت اول
مین لا اور ر تہین اور وقت دوسرے مین لا اور ر پس اب حاصل ہونگی سیے مساواتین لا۲ − ر۲ = ۴۵ ہی یا
(لا − ر) (لا + ر) = ۴۵ اور لا۲ − ر۲ = ۱۵۹ یا (لا − ر) (لا + ر) = ۱۵۹ اور چونکہ
۴۵ = لا − ر اور ۴۵ اور ۱۵۹ ایک ضربی مشترک ۱ اور ۳ ہین تو ضرور ہی کہ ہو وینگے مساواتین
لا − ر = ۱ یا لا − ر = ۳ اور لا + ر = ۴۵ یا لا + ر = ۱۵ اور ان مساواتون سیے حاصل ہوتے
ہی یہہ مساوات لا = ۲۳ اور ر = ۲۲ یا لا = ۹ اور ر = ۶ اور یہہ ہی ظاہر ہی کہ لا − ر = ۱
یا لا − ر = ۳ اور لا + ر = ۱۵۹ یا لا + ر = ۵۳ اور اسیواسطے حاصل ہونگی سیے مساواتین
لا = ۸۰ اور ر = ۷۹ اور لا = ۲۸ اور ر = ۲۵ اور یہان سے یہہ بات معلوم ہوتی ہی کہ وقت اول مین
ان شخصون سیے عمرین ۹ اور ۶ برس تہین اور وقت دوسرے مین ۲۸ اور ۲۵ یا وقت اول مین اونکی
عمرین ۲۳ اور ۲۲ برس تہین اور وقت دوسرے مین ۸۰ اور ۷۹ اب ہم تمام کرتی ہین اس فصل کو
اور امید ہی کہ جو طالب علم یہہ چاہے کہ مجذورون کے سوالون سیے حل کرنی مینا مجہی ایک سہولت حاصل
ہو جاوے وہ الکو بہت توجہ سی پڑہیگا واضح ہو کہ اس قسم کی سوالات کو سوالات دیوفنطس کہتے ہین کسواسطے
کہ دیوفنطس ایک مہندس یونانی تہا اور اوسنی اس قسم کی سوالات بہت سی حل کیے اور اونمین اپنا
عقل اور ذہن بہت دکہایا

فصل پانچوین بیچ دریافت کرنے ایسی مثلثون سیے کہ جنکی اضلاع اور ارتفاع اور مساحت اور دو اقسام قاعدہ کی جہان عمود قاعدہ سے ملتا ہی اعداد صحیح ہوتی ہین

یہہ بات اون اشخاص کو جو جبر اور مساحت سے واقف ہین معلوم ہوگی کہ جسوقت ہم کسی مثلث کی اضلاع مقرر کرتے ہین تو اوسکی مساحت اور عمود اوسکے قاعدہ پر اور دو جزء اوس قاعدہ کے جو پیدا ہوتی ہین بسبب ملنے اس عمود کی قاعدہ سے مقداریں نزدلی کبھی نزدلی کبھی نہین نکل سکتے ہین یا کسور ہوتی ہین اور جسوقت ہم مساحت کسی مثلث کی مقرر کرتے ہین تو اضلاع اوسکے مقداریں نزدلی یا کسور ہوتی ہین اور جسوقت دو ضلعے ایک مثلث قایم الزاویہ کے مقرر کرتے ہین تو اکثر وتر اوسکا ایک مقدار نزدلی ہوتا ہے اوسکا جذر پورا نہین نکل سکتا ہے پس اے طالب علم جبر و مقابلہ کا (کہ اسمین سب قسم کی مقداروں کی بحث ہوتی ہے) یہہ سوال کر سکتا ہے کہ کیونکر دریافت کرلین ہم پہلے سے کہ دو ضلعے ایک مثلث قایم الزاویہ کی اس مقدار کے فرض کرنے چاہئین تاکہ اوسکا وتر ایک مقدار غیر نزدلی ہو یا یہہ کہ کیسی کیسی اعداد واسطے کسی مثلث کے مقرر کئے جائین کہ اوسکے مساحت اور عمود اوسکے قاعدہ پر اور دو جزء قاعدہ کی مقداریں غیر نزدلی ہون حل کرنا اس سوال کا بعض صورتوں مین بہت سہل ہوتا ہے مثلاً جسوقت کہ مقرر کئے جائین ایسی اعداد واسطے دو ضلعوں ایک مثلث قایم الزاویہ کی کہ وتر اوسکا ایک مقدار غیر نزدلی ہو ایک امر مشکل نہین ہے اور یہہ بات معلوم ہو سکتی ہے بوسیلہ اس سوال کے ہم دریافت کیا چاہتے ہین دو ایسی مجذور کہ اونکا حاصل جمع ایک مجذور ہووے اور یہہ سوال مجذوروں کے بیان مین حل کیا گیا ہے اور وہان یہہ بات ثابت کی گئی ہے کہ اگر ہووے تا برابر ر^2 − ۱ اور لا = ۲ر اور اگر ر کی واسطے کوئی عدد فرض کیا جاوے تو جو قیمتین واسطے تا اور لا کے حاصل ہونگی وے ایسی ہونگی کہ حاصل جمع اونکی مجذوروں کا یعنے لا^2 + تا^2 ایک مجذور ہوگا اور فی الحقیقت

چونکہ لا^2 = (۲ر)^2 = ۴ر^2 اور تا^2 = (ر^2 − ۱)^2 = ر^4 − ۲ر^2 + ۱ تو

لا^2 + تا^2 = ۴ر^2 + ر^4 − ۲ر^2 + ۱ = ر^4 + ۲ر^2 + ۱ = (ر^2 + ۱)^2 تو معلوم ہوا کہ لا^2 + تا^2 ہمیشہ ایک عدد مجذور ہوگا اگر فرض کیجاوے واسطے لا کے صورت ۲ر اور واسطے تا کی صورت ر^2 − ۱ اب چونکہ فیثاغورس نے ثابت کر دیا ہے کہ حاصل جمع مجذوروں ان دو ضلعوں ایک مثلث قایم الزاویہ کا جو محیط ہین قایمہ کی مساوی ہوتا ہے مجذور وتر قائمہ کے پس اگر فرض کرین ہم واسطے ایک ضلع کی صورت جبریہ ۲ر اور واسطے دوسرے ضلع کے صورت ر^2 − ۱ اور واسطے وتر قایمہ کی صورت ر^2 + ۱ تو خواہ کچھہی قیمت ر کے فرض کرین ہر صورت مین ایسی قیمتین اعداد صحیح اضلاع اس مثلث کے حاصل ہونگی کہ حاصل جمع مجذوروں دو ضلعون کا مساوی ہوگا مجذور وتر قائمہ کے فرض کرو مثلث ا ب س مین

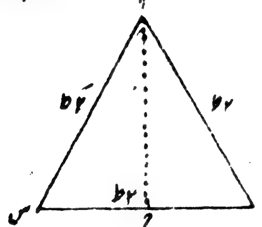


ا ب = ۲ر اور ب س = ر^2 − ۱ اور اسواسطے وتر قایمہ کا ا س = ر^2 + ۱ اب فرض کرو کہ ر = ۲ اور موافق اس فرض کے حاصل ہونگی یہ قیمتین

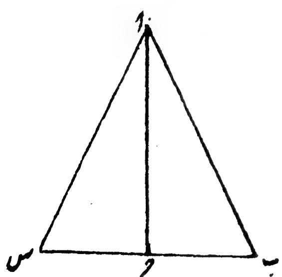
ضلعون اس مثلث کی اب = ۲ ر = ۲ × ۲ = ۴ اور ب س = ر^{2} − ۱ = ۲^{2} − ۱ = ۴ − ۱ = ۳ اور
ا س = ر^{2} + ۱ = ۲^{2} + ۱ = ۴ + ۱ = ۵ اور امتحان اس مثال خاص کا اسطرحسی ہوتا ہی ۳^{2} + ۴^{2} =
۹ + ۱۶ = ۲۵ = ۵^{2} اب فرض کرو کہ ر = ۳ اور موافق اس فرض سیکے حاصل ہونگی یے مساواتین
اب = ۲ ر = ۲ × ۳ = ۶ اور ب س = ر^{2} − ۱ = ۳^{2} − ۱ = ۹ − ۱ = ۸ اور
ا س = ر^{2} + ۱ = ۳^{2} + ۱ = ۹ + ۱ = ۱۰ اور امتحان اس مثال کا اسطورسی ہوتا ہی
۶^{2} + ۸^{2} = ۳۶ + ۶۴ = ۱۰۰ = ۱۰^{2} اب فرض کرو کہ ر = ۴ اور موافق اس فرض سیکے حاصل
ہونگی یے مساواتین اب = ۲ ر = ۲ × ۴ = ۸ اور ب س = ر^{2} − ۱ = ۴^{2} − ۱ = ۱۶ − ۱ = ۱۵
اور ر^{2} + ۱ = ۴^{2} + ۱ = ۱۶ + ۱ = ۱۷ اور امتحان اس شکل کا یون ہوتا ہی ۸^{2} + ۱۵^{2} =
۶۴ + ۲۲۵ = ۲۸۹ = ۱۷^{2} اب فرض کرو کہ ر = ۵ اور موافق اس فرض سیکے حاصل ہونگے
سیے مساواتین اب = ۲ ر = ۲ × ۵ = ۱۰ اور ب س = ر^{2} − ۱ = ۵^{2} − ۱ = ۲۵ − ۱ = ۲۴
اور ا س = ر^{2} + ۱ = ۵^{2} + ۱ = ۲۵ + ۱ = ۲۶ اور امتحان اس مثال کا یہہ ہی ۱۰^{2} + ۲۴^{2} =
۱۰۰ + ۵۷۶ = ۶۷۶ = ۲۶^{2} اب فرض کرو کہ ر = ۶ اور موافق اس فرض سیکے حاصل ہونگی یے
مساواتین اب = ۲ ر = ۲ × ۶ = ۱۲ اور ب س = ر^{2} − ۱ = ۶^{2} − ۱ = ۳۶ − ۱ = ۳۵ اور
ا س = ر^{2} + ۱ = ۶^{2} + ۱ = ۳۶ + ۱ = ۳۷ اور امتحان اس مثال کا اسطرحسی ہوتا ہی ۱۲^{2} + ۳۵^{2} =
۱۴۴ + ۱۲۲۵ = ۱۳۶۹ = ۳۷^{2} اور اسیطرحسی اور اعداد دریافت ہوسکتی ہین اور یہہ اعداد
صحیح ہونگی اگر جمع کرین ہم قیمتون گذشتہ حروف ر اور ۲ ر اور ر^{2} − ۱ اور ر^{2} + ۱ کو ایک جا ترتیب سیے تو
بنجاینگا نقشہ اسکے کہ اوسکی ذریعہ سیے بغیر علوم جبر مقابلہ کی کئی مثلث قائمہ الزاویہ ایسی معلوم ہوسکتے
ہین کہ اونکی اضلاع اعداد صحیح ہون

قیمتین ر کی	قیمتین ۲ ر کی	قیمتین ر^{2} − ۱ کی	قیمتین ر^{2} + ۱ کی
۲	۴	۳	۵
۳	۶	۸	۱۰
۴	۸	۱۵	۱۷
۵	۱۰	۲۴	۲۶
۶	۱۲	۳۵	۳۷

یہہ بات بہت ظاہر ہی کہ جب ضلعی کسی مثلث قائمہ الزاویہ کی اعداد صحیح ہوتے ہین تو اوسکی مساحت بیشک ایک
عدد صحیح ہوگی کیونکہ مساحت کسی مثلث قائمہ الزاویہ کی مساوی نصف اوس حاصل ضرب کی ہوتی ہی جو حاصل
ہوتا ہی ضرب دینی سے دو ضلعون کو جو سوای وتر قائمہ کی ہین اور چونکہ یہہ ضلعی اعداد صحیح ہین تو حاصل ضرب انکا
یعنی مساحت مثلث عدد صحیح ہوگی اب ہم دریافت کرینگی اعداد صحیح اور مقادیر غیر نزدولی واسطی اور قسم کی مثلثون کے
سوای مثلث قائمہ الزاویہ کے اب ہم دریافت کیا چاہتی ہین ایسی مثلثیں مساوی الاضلاع کہ اوسکی اضلاع اور عمود
اوسکی قاعدہ دو برابر اجزا اون قاعدون کے کہ پیدا ہوتی ہین بسبب ملنے عمودون مذکور کی مقادیر غیر نزدولی اور اعداد
صحیح ہون فرض کرو کہ مثلث ا ب س ایک مثلث مساوی الاضلاع ہی کہ ہر ضلع اسکا ۲ ط ہی اسیجاے
ظاہر ہی کہ واسطی ط کے کوئی عدد صحیح اور جفت فرض کیا جاوے تو اجزای قاعدہ کے اعداد صحیح ہونگی لیکن
اب دیکھا چاہیے کہ ارتفاع ا ح بھی اس قسم کی مثلثون مین مقدار غیر نزدولی اور صحیح ہوتی ہی یا نہین
اب ظاہر ہی کہ ا ح² = (۲ ط)² - ط² = ۴ ط² - ط² =



۳ ط² اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی ا ح² = ۳ ط²
اور اسیواسطی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ا ح یعنی
ارتفاع = ط √۳ پس معلوم ہوتا ہی مساوات
ا ح = ط √۳ سی کہ جسوقت ضلعی کسی مثلث مساوی الاضلاع کے اعداد صحیح ہون تو نہین
ہی ممکن کہ ارتفاع اس مثلث کی کوئی مقدار غیر نزدولی ہو اور اسیواسطی اس قسم کی مثلثون کی مساحت بھی مقدار
غیر نزدولی نہین ہوسکتی اور پوری نہین دریافت ہوسکتی کیونکہ جذر عدد ۳ کا کبھی پورا نہین نکل سکتا ہی
پس جو اعداد صحیح ہم چاہتی ہین وہ غیر ممکن ہین اب دریافت کیا چاہتی ہین ہم ایسی مثلث مساوی الساقین
کہ اوسکی اضلاع اور ارتفاع اور اجزا قاعدہ کی اعداد صحیح ہون واضح ہو کہ یہہ بات بسہولت عمل مین آسکتی
ہی بذریعہ قاعدہ مثلثون قایم الزاویہ کی کہ اوسکا پہلی بیان ہوچکا کیونکہ ہم خیال کرسکتی ہین کہ ہر مثلث
مساوی الساقین مرکب ہی دو مثلثون قائمہ الزاویہ سی کہ ارتفاع مشترک ان دونو کا ارتفاع اوس مثلث مساوی
الساقین کا ہی مثلاً فرض کرو کہ ا ب س ایک مثلث مساوی الساقین ہی



اور ا ح اوسکا ارتفاع ہی اور ا ح ب اور ا ح س دو
مثلث قائمہ الزاویہ اوسمین واقع ہین اور ان مثلثون قایم الزاویہ
کے قاعدی اور ارتفاع مساوی ہین پس اب موافق قاعدہ مثلثون
قائمہ الزاویہ کی فرض کرو کہ ب ح یا ح س کو مساوی ۲ ت کے

اور آ م کو مساوی ر٢ - ا کے اور موافق اس فرض کے حاصل ہونگی یہہ قیمتیں خطوں اب اور اس کی ر٢ + ١ اور ر٢ + ١ اور یہان سے یہہ معلوم ہوا کہ تین ضلعی مثلث مساوی الساقین کے سیے ہین ر٢ + ١ اور ر٢ + ١ اور ۴ ر اور ارتفاع اس مثلث کی ر٢ - ا ہی اور جسوقت فرض کیجائی کوئی خاص قیمت واسطی ر کے اعداد صحیح مین تو حاصل ہونگی ایسی مثلث مساوی الساقین کہ اونکی اضلاع اور ارتفاع اور مساحت اعداد صحیح ہونگی مثلاً فرض کرو کہ ر = ٢ تو ر٢ + ١ = ۴ + ١ = ۵ اور ۴ ر = ۴ × ٢ = ۸ اور ر٢ - ١ = ۴ - ١ = ٣ بس معلوم ہوا کہ دو ساقین مثلث مطلوب کی ۵ اور ۵ ہین اور قاعدہ اوسکا ۸ ہے اور ارتفاع اوسکا ٣ ہی اور مساحت اوسکی $=\frac{٣ \times ٨}{٢} = \frac{٢۴}{٢} = ١٢$ اور یہ سب اعداد صحیح ہین اب ہم دریافت کرینگی ایسی مثلثین مختلف الاضلاع کہ اونکی اضلاع اور ارتفاع اور اجزاء قاعدہ اور مساحت اعداد صحیح اور مقادیر غیر جذری ہون فرض کرو کہ ارتفاع مثلث اب س کی یعنے خط ا م

٢ ط ہی اور یہہ بہی فرض کرو کہ ایک جزء قاعدہ اس مثلث کا مثلاً خط ب م = لا اب ظاہر ہی کہ لا٢ + ۴ ط٢ = اب٢ پس اب ضرور ہی کہ لا٢ + ۴ ط٢ ایک کامل مجذور ہو اور اسیواسطے فرض کرو کہ جذر لا٢ + ۴ ط٢ کا لا + ٢ ف ہی اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات $\sqrt{لا^٢ + ۴ ط^٢} = لا + ٢ ف$ اور جسوقت مجذور کرسیتے ہین ہم دونو طرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات لا٢ + ۴ ط٢ = لا٢ + ۴ ف لا + ۴ ف٢ اور اس مساوات سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۴ ط٢ = ۴ ف لا + ۴ ف٢ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ قیمت لا کی

$$لا = \frac{۴ ط^٢ - ۴ ف^٢}{۴ ف} = \frac{ط^٢ - ف^٢}{ف} = \frac{ط^٢}{ف} - ف$$ اب فرض کرو کہ

ط = ن ف اور اسیواسطے ط٢ = ن٢ ف٢ اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات جس سے قیمت لا کی معلوم ہوجایگی $لا = \frac{ط^٢}{ف} - ف = \frac{ن^٢ ف^٢}{ف} - ف = ن^٢ ف - ف = (ن^٢ - ١) ف$

اب جس جای قیمت لا کی مین ف پایا جاتا ہی لکہو اوس جای حرف ن کا اور جس جای ن پایا جاتا ہی لکہو اوس جای حرف ف کا اور اس تبدیل اور تغیر سی جو قیمت حاصل ہوگی وہ ایک دوسری قیمت لا کی ہوگی پس ایک قیمت لا کی تعبیر کرسکتی ہی جزء ب م کو اور دوسری قیمت لا کی جزء قاعدہ م س کو اور اسیواسطی دو قیمتین لا کی سے ہونگی لا = (ن٢ - ١) ف = ب م اور لا = (ف٢ - ١) ن = م س اور یہہ بہی مرقومہ بالا سی ظاہر ہے کہ ارتفاع اس مثلث کا یعنے خط ا م = ٢ ن ف اور اسیواسطی حاصل ہونگی سیے مساواتین

ا ب^۲ = ب ح^۲ + ا ح^۲ = (ن^۲ − ۱)^۲ ف^۲ + (۲ن ف)^۲ = ن^۴ ف^۲ − ۲ن^۲ ف^۲ + ف^۲ + ۴ن^۲ ف^۲ =
ن^۴ ف^۲ + ۲ن^۲ ف^۲ + ف^۲ = (ن^۲ ف + ف)^۲ اور یہاں سے یہہ معلوم ہوتا ہی ا ب = ن^۲ ف + ف =
(ن^۲ + ۱) ف اور اسیطور سے ا س^۲ = ح س^۲ + ا ح^۲ = (ف^۲ − ۱)^۲ ن^۲ = ف^۴ ن^۲ − ۲ف^۲ ن^۲ + ن^۲ +
۴ن^۲ ف^۲ = ف^۴ ن^۲ + ۲ن^۲ ف^۲ + ن^۲ = (ف^۲ ن + ن)^۲ اور یہاں سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ
ا س = ف^۲ ن + ن = (ف^۲ + ۱) ن اور چونکہ ب ح = (ن^۲ − ۱) ف اور ح س =
(ف^۲ − ۱) ن تو معلوم ہوا کہ ب س جو مساوی ہی حاصل جمع ب ح اور ح س کے مساوی ہوگا اس
حاصل جمع کی (ن^۲ − ۱) ف + (ف^۲ − ۱) ن اب اگر اکھٹا کریں ہم ان مساواتوں کو تو بن جائیگی فہرست انکی

(۱) ا ب = (ن^۲ + ۱) ف
(۲) ا س = (ف^۲ + ۱) ن
(۳) ا ح = ۲ن ف
(۴) ب ح = (ن^۲ − ۱) ف
(۵) ح س = (ف^۲ − ۱) ن
(۶) ب س = (ن^۲ − ۱) ف + (ف^۲ − ۱) ن

اب فرض کرو کہ ن = ۲ اور ف = ۳ اور اسیواسطے حاصل ہونگی یے مساواتیں

(۱) ا ب = (ن^۲ + ۱) ف = (۲^۲ + ۱) × ۳ = (۴ + ۱) × ۳ = ۵ × ۳ = ۱۵
(۲) ا س = (ف^۲ + ۱) ن = (۳^۲ + ۱) × ۲ = (۹ + ۱) × ۲ = ۱۰ × ۲ = ۲۰
(۳) ا ح = ۲ن ف = ۲ × ۲ × ۳ = ۴ × ۳ = ۱۲
(۴) ب ح = (ن^۲ − ۱) ف = (۲^۲ − ۱) ۳ = (۴ − ۱) × ۳ = ۳ × ۳ = ۹
(۵) ح س = (ف^۲ − ۱) ن = (۳^۲ − ۱) × ۲ = (۹ − ۱) × ۲ = ۸ × ۲ = ۱۶
(۶) ب س = (ن^۲ − ۱) ف + (ف^۲ − ۱) ن = ۹ + ۱۶ = ۲۵

اور مساحت مثلث کی = (ب س × ا ح) / ۲ = (۲۵ × ۱۲) / ۲ = ۲۵ × ۶ = ۱۵۰

اب فرض کرو کہ ن = ۳ اور ف = ۴ اور موافق اس فرض کی حاصل ہونگی یے مساواتیں

(۱) ا ب = (ن^۲ + ۱) ف = (۳^۲ + ۱) × ۴ = (۹ + ۱) × ۴ = ۱۰ × ۴ = ۴۰
(۲) ا س = (ف^۲ + ۱) ن = (۴^۲ + ۱) × ۳ = (۱۶ + ۱) × ۳ = ۱۷ × ۳ = ۵۱
(۳) ا ح = ۲ن ف = ۲ × ۳ × ۴ = ۶ × ۴ = ۲۴
(۴) ب ح = (ن^۲ − ۱) ف = (۳^۲ − ۱) × ۴ = (۹ − ۱) × ۴ = ۸ × ۴ = ۳۲
(۵) ح س = (ف^۲ − ۱) ن = (۴^۲ − ۱) × ۳ = (۱۶ − ۱) × ۳ = ۱۵ × ۳ = ۴۵

(۶) ب س = (ن² − ۱) ف + (ف² − ۱) ن = ۳۲ × ۴۵ = ۷۷ اور مساحت

مثلث کی اد × ب س / ۲ = (۲۴ × ۷۷) / ۲ = ۱۲ × ۷۷ = ۹۲۴

اس مثال مین تین ضلعی مثلث مفروض کے سیے اعداد صحیح نکلتی ہین ۴۰ ۵۱ ۷۷ اور
اگر دریافت کیا چاہین ہم مساحت اس مثلث کی بذریعہ اون ضلعون کے موافق اوس قاعدہ کی تعبیر ہوتا ہی
مساوات (۱) سے کہ واقع ہی بیان اشکال ہندسی مین تو بہی یہہ بات دریافت ہوجائیگی کہ مساحت مثلث
کی ایک صحیح عدد اور مقدار غیر نزولی ہوگی مثلاً فرض کرو کہ ج = ۴۰ اور س = ۵۱ اور

ط = ۷۷ اور ص = (ج + س + ط) / ۲ = (۴۰ + ۵۱ + ۷۷) / ۲ = ۱۶۸ / ۲ = ۸۴

اور اسی واسطے حاصل ہونگی یہ مساواتین ص − ج = ۸۴ − ۴۰ = ۴۴ اور
ص − س = ۸۴ − ۵۱ = ۳۳ اور ص − ط = ۸۴ − ۷۷ = ۷

اور اسی واسطے مساحت مثلث کی √(ص (ص − ج) (ص − س) (ص − ط))

= √(۸۴ × ۴۴ × ۳۳ × ۷) = √(۲۳۱ × ۳۶۹۶) =
√۸۵۳۷۷۶ = ۹۲۴ اور یہہ وہی مساحت ہی جو پہلی ثابت ہوئی تہی پس قاعدہ کلیہ کہ جسکی ذریعہ سے
ہم بہت سی مثلثین مختلف الاضلاع دریافت کرسکتے ہین کہ اونکی ضلعے اور ارتفاع اور اجزای یعنی بازو اونکی قاعدون
کے اور مساحت اونکی اعداد صحیح اور مقدارین غیر نزولی ہون الفاظ مین اسطرح سی بیان ہوسکتا ہی قاعدہ فرض کرو
کوئی دو ایسی عدد کہ ہر واحد اونمین کا زیادہ ہو عدد ایک کی سے اور دو چند حاصل ضرب انکا ارتفاع مثلث
مطلوب کی ہوگی اور اگر ایک کو عددون مفروض مین سے مجذور کرکے اوسمین سے عدد ایک گھٹالین اور حاصل تفریق کو دوسرے
عدد مفروض مین ضرب کرین تو حاصل ضرب ایک جز قاعدہ مثلث مفروض کا ہوگا اور اگر اسی مجذور پر زیادہ کرین
ہم عدد ایک کا اور حاصل جمع کو دوسرے عدد مذکور مین ضرب کرین تو حاصل ضرب وہ ضلع ہوگا جو ملا ہوا ہی اوسی
بازو قاعدہ مثلث سی جو ابہی دریافت ہوا ہی اب اگر مجذور کرین ہم دوسرے عدد کو اور اوسمین سے عدد ایک کا تفریق
کرین اور حاصل تفریق کو عدد اولین ضرب کرین تو حاصل ضرب ہوگا دوسرا جز یا بازو قاعدہ مثلث مفروض کا
اور اگر مجذور عدد دوسرے پر زیادہ کرین عدد ایک کا اور حاصل جمع کو ضرب کرین عدد اولین تو حاصل ضرب
ہوگا وہ ضلع جو ملا ہوا ہی بازو دوسرے سی اور ظاہر ہی کہ حاصل جمع دونو بازونکا ہوگا قاعدہ مثلث کا یہہ
قاعدہ کلیہ کسی جبر و مقابلہ یا کسی حساب کی کتاب مین مینی اب تک نہین پایا ہی بلکہ یہہ ایجاد ہی مخدومی ماسٹر رامچندر کا

فصل چھٹے بیچ بیان سوالات مختلفہ کے

اب جونکہ ہم اس کتاب کو تمام کیا چاہتے ہین تو لازم ہی کہ چند سوالات مطالب مختلفہ کی اسمین بیان کرین

سوال ۱ ای دوست کہ تو ذہانت مین لاثانی ہی بتادی مجھی چار اعداد غیر مساوی ایسی کہ اگر اونکو جمع کرین تو حاصل جمع مساوی ہو حاصل جمع اونکی مجذورونکی یہہ سوال کتاب بیج گنت مین سے کہ مصنف اوسکا بہاسکر جاریہ تہا لیا گیا ہی اور طریقہ اوسکی حل کرنیکا یہہ ہی فرض کرو کہ چار اعداد مطلوبہ لا اور ۲لا اور ۳لا اور ۴لا ہین پس حاصل جمع انکا ۱۰لا ہوگا اور موافق شرط سوال کی یہہ مساوی ہونا چاہیے لا² + ۴لا² + ۹لا² + ۱۶لا² یعنے ۳۰لا² کی کہ حاصل جمع مجذورون چار اعداد مذکور کا ہی پس اب حاصل ہوگی یہہ مساوات ۱۰لا = ۳۰لا² اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات لا = $\frac{۱}{۳}$ اور اسیواسطی چار اعداد مطلوبہ یہ ہین $\frac{۱}{۳}$ اور $\frac{۲}{۳}$ اور $\frac{۳}{۳}$ اور $\frac{۴}{۳}$ اور امتحان اس مثال کا اسطرح سی ہوسکتا ہی

$$\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۳}+\frac{۴}{۳}=\frac{۱۰}{۳}$$ اور حاصل جمع انکی مجذورونکا یہہ ہی

$$\frac{۱}{۹}+\frac{۴}{۹}+\frac{۹}{۹}+\frac{۱۶}{۹}=\frac{۳۰}{۹}=\frac{۱۰}{۳}$$

سوال ۲ چاہتے ہین دریافت کرنا چار ایسے اعداد کہ حاصل جمع انکی مجذورونکا مساوی ہی حاصل جمع اونکے مکعبون کے یہہ بہی سوال بیج گنت مین سے لیا گیا ہی اور یہہ یون حل ہوتا ہی فرض کرو کہ چار اعداد مطلوبہ لا اور ۲لا اور ۳لا اور ۴لا ہین اور ظاہر ہی کہ حاصل جمع انکی مجذورونکا ۳۰لا² ہی اور موافق شرط سوال کے یہہ حاصل جمع مساوی ہونا چاہیے حاصل جمع ان اعداد کے مکعبون کی جو یہہ لا³ + ۸لا³ + ۲۷لا³ + ۶۴لا³ یعنی یہہ ۱۰۰لا³ ہی پس اب حاصل ہوگی یہہ مساوات ۳۰لا² = ۱۰۰لا³ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ قیمت لا کی لا = $\frac{۳}{۱۰}$ اور یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ چار اعداد مطلوبہ یہ ہین $\frac{۳}{۱۰}$ اور $\frac{۶}{۱۰}$ اور $\frac{۹}{۱۰}$ اور $\frac{۱۲}{۱۰}$ اور امتحان اس مثال کا بطور مرقومہ بالا کی ہوسکتا ہی

سوال ۳ چاہتی ہین ہم دریافت کرنا ایک مثلث قائمۃ الزاویہ کہ سطح اوسکی مساوی ہو اوس عدد سے کہ جو تعبیر کرتا ہی اوسی مثلث کی وتر قائمہ کو مثلاً فرض کرو کہ وتر قائمہ اس مثلث کا ۵لا ہی اور دو باقی ضلعی اوسکی ۳لا اور ۴لا ہین جیسا شکل مین لکھا ہوا ہی اور اس سے ظاہر ہی کہ مساحت اس مثلث کی

۵لا
۳لا
۴لا

یہہ ہی ۴ لا × ۳ لا / ۲ = ۱۲ لا^۲ / ۲ = ۶ لا^۲ اور موافق شرط سوال سے ضرور ہی کہ ہووے مساحت اس مثلث کی سیعنے ۶ لا^۲ مساوی وتر قایہ یعنی ۵ لا کے پس حاصل ہوگی یہہ مساوات ۵ لا = ۶ لا^۲ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات لا = ۵/۶ پس اس سے سب ضلعی مثلث کی معلوم ہوجائینگی

سوال ۴ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا اضلاع ایک ایسی مثلث قایمہ الزاویہ کی کہ مساحت اوسکی مساوی ہو حاصل ضرب اوسکی تینون ضلعون کے مثلا فرض کرو کہ وتر قائیہ الزاویہ مثلث کا ۵ لا اور دو باقی اوسکی ضلعی ۴ لا اور ۳ لا ہین پس موافق شرط سوال سے ضرور ہی کہ ہووی یہہ مساوات ۶ لا^۲ = ۶۰ لا^۳ اور اسیواسطی حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت لا کی لا = ۱/۱۰ اور اسیواسطی ضلعی مثلث مطلوب کے سیے ہین ۳/۱۰ اور ۱/۲ اور ۴/۱۰ سیے ؛ دو سوال اخیر بیج گنت مین سے لی گیے ہین

سوال ۵ اگر تجھی کچھہ حساب آتا ہو تو بتادی مجھی جلد دو اعداد ایسی کہ حاصل جمع اور حاصل تفریق اونکا علیحدہ علیحدہ اعداد مجذور ہوویں اور اگر اونکو آپسمین ضرب کرین تو حاصل ضرب اونکا مکعب ہووے فرض کرو کہ اعداد مطلوبہ ۴ لا^۲ اور ۵ لا^۲ ہین اور اسیواسطی ۵ لا^۲ + ۴ لا^۲ = ۹ لا^۲ = ایک عدد مجذور کی اور ۵ لا^۲ − ۴ لا^۲ = لا^۲ = ایک عدد مجذور سے پس پوری ہوئین دو شرطین اور باقی رہی تیسری شرط جو یہہ ہی کہ حاصل ضرب دونو اعداد مطلوب کا ایک عدد مکعب ہو سیعنے ۲۰ لا^۴ ایک عدد مکعب ہووی فرض کرو کہ جذر کعبی سیعنے تیسری مرتبہ کا جذر ۲۰ لا^۴ کا ۱۰ لا ہی اور موافق اس فرض کی حاصل ہوگی یہہ مساوات ۲۰ لا^۴ = (۱۰ لا)^۳ = ۱۰۰۰ لا^۳ اور اسیواسطی لا = ۵۰ اور یہان سے معلوم ہوا کہ دو عدد مطلوب سیے ہین ۱۰۰۰۰ اور ۱۲۵۰۰ (سوال بیج گنت)

سوال ۶ ای دوست اگر تو بتادیگا مجھی ایسی دو عدد کہ حاصل جمع اونکی مکعبون کا ایک مجذور ہو اور حاصل جمع اونکی مجذورون ایک عدد مکعب ہووے تو مین تجھی بڑا ریاضی دان جانونگا فرض کرو کہ اعداد مطلوبہ لا^۲ اور ۲ لا^۲ ہین ظاہر ہی کہ حاصل جمع انکی مکعبونکا ۹ لا^۶ ہے اور یہہ ایک عدد مجذور ہی جیسیکہ منظور ہی اور اسکا جذر ۳ لا^۳ ہی اب حاصل جمع مجذورون اعداد مفروض کا ۵ لا^۴ ہی اور موافق دوسری شرط سوال کی ضرور ہے کہ ۵ لا^۴ ایک مکعب ہووے پس اسیواسطی فرض کرو کہ کعب ۵ لا^۴ کا ۵ لا^۳ سے اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات ۵ لا^۴ = ۱۲۵ لا^۳ اور اس مساوات سی حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت لا کی لا = ۲۵ اور یہان سی معلوم ہوا کہ اعداد مطلوبہ سیے ہین ۶۲۵ اور ۱۲۵۰ (سوال بیج گنت)

سوال ۷ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا دو ایسی عداد کہ حاصل جمع اونکا مساوی ہو اونکی حاصل تفریق کے مجذور کی اب چونکہ حاصل جمع دو اعداد مطلوب کا موافق شرط سوال سے مجذور ہونا چاہیے

تو فرض کرو کہ $ل + د = ط^۲$ اور چونکہ $ل + د = (ل - د)^۲$ تو معلوم ہوا کہ $ل - د = ط$ اور اسیواسطے
اگر جمع کریں ہم ان دونو مساواتوں کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $۲ل = ط^۲ + ط$ اور اس سے
$ل = \frac{ط^۲ + ط}{۲} = \frac{ط(ط + ۱)}{۲}$ اور اگر تفریق کریں انہیں دو مساواتوں کو ایک دوسرے میں سے
تو حاصل ہوگا یہہ $۲د = ط^۲ - ط$ اور اس سے یہہ $د = \frac{ط(ط - ۱)}{۲}$ اب فرض کرو کہ $ط = ۲ص$
اور اسیواسطے حاصل ہونگی یے مساواتیں $ل = ص(۲ص + ۱)$ اور $د = ص(۲ص - ۱)$
مثلاً فرض کرو کہ $ص = ۱$ پس اب حاصل ہونگی یے قیمتیں ل اور د کی $ل = ۳$ اور $د = ۱$ اور
اور امتحان اسکا یوں ہوتا ہی کہ $ل + د = ۳ + ۱ = ۴$ اور $(ل - د)^۲ = ۲^۲ = ۴$ اور اگر ہووے $ص = ۲$
تو $ل = ۲ \times (۲ \times ۲ + ۱) = ۲ \times ۵ = ۱۰$ اور $د = ۲ \times (۲ \times ۲ - ۱) = ۲ \times ۳ = ۶$
اور امتحان اسطرحسی ہوتا ہی $ل + د = ۱۰ + ۶ = ۱۶$ اور $(ل - د)^۲ = ۴^۲ = ۱۶$ اور یہہ طریقہ حل کرنیکے
سوال گذشتہ کا بہت خوب ہی

سوال ۸ چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا ایسی دو اعداد کہ اگر ایک کو ان میں سی مکعب کریں اور زیادہ کریں اسی مجذور دوسرے کی پر تو حاصل جمع ایک عدد مجذور ہووے فرض کرو کہ اعداد مطلوبہ م اور د ہیں اور موافق شرط سوال کے ضرور ہی کہ حاصل جمع $م^۳ + د^۲$ ایک مجذور ہونا چاہئی پس فرض کرو کہ $م^۳ + د^۲ = ل^۲$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $م^۳ = ل^۲ - د^۲ = (ل + د)(ل - د)$ اور چونکہ موافق سوال گذشتہ کی ہم فرض کر سکتے ہیں کہ $ل + د = (ل - د)^۲$ تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $م^۳ = (ل - د)(ل - د)^۲$ اب موافق سوال گذشتہ کی ضروری کہ ہووین یے مساواتیں $د = \frac{ط^۲ - ط}{۲}$ اور $ل = \frac{ط^۲ + ط}{۲}$ اور چونکہ $م^۳ = (ل - د)^۳$ تو معلوم ہوا کہ $م = ل - د$ اور اسیواسطے

$م = \frac{ط^۲ + ط}{۲} - \frac{ط^۲ - ط}{۲} = \frac{۲ط}{۲} = ط$ پس معلوم ہوا کہ دو اعداد مطلوبہ یے ہیں $ط$ و $\frac{ط^۲ - ط}{۲}$ اور اسیواسطے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $ل^۲ = ط^۳ + \frac{(ط^۲ - ط)^۲}{۴} = \frac{۴ط^۳ + ط^۴ - ۲ط^۳ + ط^۲}{۴} =$

$\frac{ط^۴ + ۲ط^۳ + ط^۲}{۴} = \frac{(ط^۲ + ط)^۲}{۴}$ اور اسیواسطے $ل = \frac{ط^۲ + ط}{۲}$

مثلاً فرض کرو $ط = ۲$ تو اعداد مطلوبہ یے ہونگی ۲ اور ۱ اور امتحان اس مثال کا یوں ہوتا ہی
$۲^۳ + ۱^۲ = ۸ + ۱ = ۹ = ۳^۲$ اور اگر $ط = ۳$ تو دو عدد یے ہونگی ۳ اور ۳ اور اسیواسطے
$۳^۳ + ۳^۲ = ۲۷ + ۹ = ۳۶ = ۶^۲$ اور اگر $ط = ۴$ تو عدد مطلوبہ یے ہونگی ۴ اور ۶ اور

اسیواسطی $8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 = 10^2$ اور اسیطور سے اور مثالین بہی حل ہو سکتی ہین اور اونکا امتحان ہو سکتا ہی

سوال ۹ ایک گہر مین سے چار چور دانے سو موتی اور پانچ الماس اور دس یاقوت اور ۸ لعل چرا لیئے اور بلحاظ اسکے کہ ہر چور کو برابر مال حاصل ہوا اونہون نی اس جواہرات کو اپسمین اسطرحسی تقسیم کیا کہ ایک چور کو تو پانچ لعل اور ۱ یاقوت اور ۱ الماس اور ۱ موتی ہاتہہ لگی اور دوسرے کو ۱ لعل اور ۷ یاقوت اور ۱ الماس اور ۱ موتی اور تیسری چور کو ۱ لعل اور ۱ یاقوت اور ۲ الماس اور ۱ موتی ہات لگے اور چوتہی چور کو ۱ لعل اور ۱ یاقوت اور ۱ الماس اور ۹۷ موتی ہات لگی فرض کرو کہ لا ہی قیمت ایک لعل کی اور ی ایک یاقوت کی اور ع ایک الماس کی اور ف ایک موتی کی پس موافق شرایط سوال کے حاصل ہونگی سے مساواتین کہ ہر واحد انمین سے چار چار مقدارین مجہول پائی جاتی ہین

۵ لا + ی + ع + ف = لا + ۷ی + ع + ف = لا + ی + ۲ع + ف = لا + ی + ع + ۹۷ ف

اب ظاہر ہی کہ اول اور دوسری مساواتون سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۴ لا = ۶ ی اور دوسری اور تیسری مساوات سی یہہ مساوات حاصل ہوتی ہی ۶ ی = ع اور تیسری اور چوتہی مساواتون سے یہہ مساوات حاصل ہوتی ہی ع = ۹۶ ف اب تاکہ قیمتین جواہرات مذکور کی اعداد صحیح ہون ضروری ہی کہ ع کم سی کم ۹۶ ہو پس جسوقت ع = ۹۶ تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ۶ ی = ۹۶ اور اسیواسطی ہوگی یہہ مساوات ی = $\frac{۹۶}{۶}$ = ۱۶ اور اسیواسطے ۴ لا = ۶ ی = ۹۶ اور لا = ۲۴ پس یہانسی معلوم ہوا کہ قیمت ہر موتی کی ۱ روپیہ ہی اور ہر یاقوت کی ۱۶ روپیے اور ہر الماس کے ۹۶ اور ہر لعل کی ۲۴ روپیے اور امتحان اس مثال کا اسطرح سی ہو سکتا ہی ۵ لا + ی + ع + ف = ۱۲۰ + ۱۶ + ۹۶ + ۱ = ۲۳۳

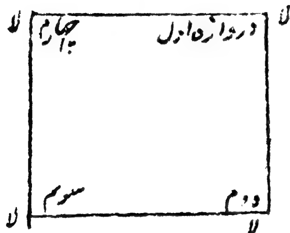
لا + ۷ی + ع + ف = ۲۴ + ۱۱۲ + ۹۶ + ۱ = ۲۳۳

لا + ی + ۲ع + ف = ۲۴ + ۱۶ + ۱۹۲ + ۱ = ۲۳۳

لا + ی + ع + ۹۷ف = ۲۴ + ۱۶ + ۹۶ + ۹۷ = ۲۳۳

سوال ۱۰ ایک شہر کی ۴ چار دروازے ہین اور چارون دروازون پر کچہہ کچہہ فوج واسطے مقابلہ غنیم کے موجود ہی جسوقت غنیم دروازہ اول پر آیا تو اوس دروازہ کی فوج کے حاکم نی یہہ بات دریافت کر کے کہ میری فوج واسطے مقابلہ دشمن کے کفایت نہین کریگی اتنی اتنی فوج ہر دروازہ سے واسطے اپنی مدد کے منگوائی جتنی فوج اوسکے پاس موجود تہی پس اس ترکیب سے دشمن نے دروازہ اول پر شکست کہائی اور اوسنی حملہ دوسرے دروازہ پر کیا اور اوس دروازہ کی حاکم نے بہی یہہ بات دریافت

گرگئی کہ اوسکی فوج واسطی مقابلہ کی کفایت نہین کرینگی اتنے آدمی ہر دروازہ سے بلوائی جتنی آدمی اوسکے پاس تہے پس یہانسی بہی دشمن سے نے شکست کہائی اور یہی حال دونو باقی دروازون پر ہوا اور اسطور سی چارون دروازون پر دشمن سے نے شکست کہا کر اپنی ملک کی طرف مراجعت کی اور بعد اسکی جو شمار فوج کی چارون دروازون پر کی گئی تو معلوم ہوا کہ ہر دروازہ پر فوج مساوی ہی اب بتاؤ کہ اول مین ہر دروازہ پر کتنی کتنی فوج تہی حل کرنی اس سوال سے کئی ترکیبون ہین اول ترکیب یہہ ہی فرض کرو کہ بعد مراجعت دشمن سے کے ہر واحد پر چار دروازون مین سے



لا آدمی تہی اب اگر دروازہ اول کا حاکم جتنے جتنے آدمیونکو اپنے تین باقی دروازون سے بلوایا تہا اونہین پہر واپس اپنے اپنی مقام پر کرسے تو ظاہر ہی کہ اس صورت مین دروازہ اول پر یہہ فوج $\frac{\text{لا}}{۴}$ ہوگی اور دروازہ دوم پر اور سوم پر اور چہارم پر سے فوجین ہونگی $\text{لا} + \frac{\text{لا}}{۴}$ اور $\text{لا} + \frac{\text{لا}}{۴}$ اور $\text{لا} + \frac{\text{لا}}{۴}$ یعنی اب چارون دروازون پر اتنے اتنی آدمی ہونگی $\frac{\text{لا}}{۴}$ اور $\frac{\text{۵لا}}{۴}$ اور $\frac{\text{۵لا}}{۴}$ اور $\frac{\text{۵لا}}{۴}$ اب دروازہ دوم کی حاکم نی بہی باقی تین دروازون کے آدمیونکو اپنی اپنی مقام پر واپس کیا اسصورت مین ظاہر ہی کہ چار دروازون مذکور پر اتنی اتنی آدمی باقی رہینگی

دروازۂ اول $\frac{\text{لا}}{۴} + \frac{\text{۵لا}}{۱۶}$ اور دروازہ دوم $\frac{\text{۵لا}}{۱۶}$ دروازہ سوم $\frac{\text{۵لا}}{۴} + \frac{\text{۵لا}}{۱۶}$

اور دروازہ چہارم $\frac{\text{۵لا}}{۴} + \frac{\text{۵لا}}{۱۶}$ یعنی اتنی اتنی آدمی دروازون مذکور پر رہینگے $\frac{\text{۹لا}}{۱۶}$ اور $\frac{\text{۵لا}}{۱۶}$ اور $\frac{\text{۲۵لا}}{۱۶}$ اور $\frac{\text{۲۵لا}}{۱۶}$ اب فرض کرو کہ تیسری دروازہ کی حاکم سے نے بہی باقی تین دروازونکی سپاہیونکو واپس اپنے اپنی مقامون کو کیا پس بعد اسکے چار دروازون پر اتنی اتنے آدمی رہینگے

$\frac{\text{۹لا}}{۱۶} + \frac{\text{۲۵لا}}{۶۴}$ اور $\frac{\text{۵لا}}{۱۶} + \frac{\text{۲۵لا}}{۶۴}$ اور $\frac{\text{۲۵لا}}{۶۴}$ اور $\frac{\text{۲۵لا}}{۱۶} + \frac{\text{۲۵لا}}{۶۴}$

یعنی اتنی اتنی $\frac{\text{۶۱لا}}{۶۴}$ اور $\frac{\text{۴۵لا}}{۶۴}$ اور $\frac{\text{۲۵لا}}{۶۴}$ اور $\frac{\text{۱۲۵لا}}{۶۴}$ اب فرض کرو کہ چوتہی دروازہ کی حاکم سے نے بہی باقی تین دروازون کے آدمیون کو اپنی اپنی مقامون پر واپس کیا پس اس صورت مین چار دروازون مذکور پر اتنی آدمی رہینگی

$\frac{\text{۶۱لا}}{۶۴} + \frac{\text{۱۲۵لا}}{۲۵۶}$ اور $\frac{\text{۴۵لا}}{۶۴} + \frac{\text{۱۲۵لا}}{۲۵۶}$ اور $\frac{\text{۲۵لا}}{۶۴} + \frac{\text{۱۲۵لا}}{۲۵۶}$

اور $\frac{\text{۱۲۵لا}}{۲۵۶}$ یعنی اتنی اتنی $\frac{\text{۳۶۹لا}}{۲۵۶}$ اور $\frac{\text{۳۰۵لا}}{۲۵۶}$ اور $\frac{\text{۲۲۵لا}}{۲۵۶}$ اور $\frac{\text{۱۲۵لا}}{۲۵۶}$

پس معلوم ہوا کہ ایسے چار اعداد کہ بشکل کسور کے لکھی ہوئی ہیں یہی تعدادین اون آدمیون کی جو چار دروازون
مذکور پر شروع مین موجود تہی اور چونکہ آدمیون کا نصف اور چوتہائی یا کوئی اور کسر نہین ہوسکتی ہی تو لازم ہی کہ
مقرر کرین ہم کوئی ایسا عدد واسطی لا کی کہ چارون کسرین مذکورہ بالا اعداد صحیح ہوجائین ایسی اعداد واسطی
لا کی بیشمار ہوسکتی ہین لیکن چہوٹی سے چہوٹا ایسا عدد اس مثال مین ۲۵۶ ہی پس صریحی معلوم ہوا کہ شروع
مین چار دروازون پر اتنی اتنی آدمی موجود تہی

دروازہ اول	دروازہ دوم	دروازہ سوم	دروازہ چہارم	اور امتحان اس
۱۲۵	۲۲۵	۳۰۵	۳۶۹	

سوال کا اسطرحسی ہوسکتا ہی اگر عدد ۱۲۵ کو کہ اول دروازہ پر ہین باقی تینون دروازہ کی آدمیون سے نکالین اور اول
دروازہ پر جمع کرین تو ہونگی ایسے چار اعداد ۵۰۰ اور ۱۰۰ اور ۱۸۰ اور ۲۴۴ اور اگر دوسرے دروازہ
پر ہی یہی عمل کرین تو چار اعداد ہونگی ۴۰۰ اور ۴۰۰ اور ۸۰ اور ۱۴۴ اب تیسری دروازہ پر اتنی
اتنی آدمی باقی دروازون سے بلوای جائین جتنی اوسی دروازہ پر موجود تہی تو چار اعداد ایسے ہونگی
۳۲۰ اور ۳۲۰ اور ۳۲۰ اور ۶۴ اور اگر یہی عمل چوتہی دروازہ پر تو حاصل ہونگی ایسے اعداد مساوی
۲۵۶ اور ۲۵۶ اور ۲۵۶ اور ۲۵۶ اور یہی ثابت کرنا تہا واضح ہو کہ جو چار اعداد اوپر نکالی گئے
ہین وے چہوٹی سی چہوٹی ہین اور اگر زیادہ بڑی اعداد دریافت کیا چاہین تو فقط یہہ بات لازم ہی کہ فرض کرین ہم
واسطی لا کی کوئی ضعف ۲۵۶ کا اب ہم لکھتے ہین دوسری ترکیب حل کرنی سوال گذشتہ کی جو برعکس ہی پہلی ترکیب
کے یعنی اوسمین شروع کرتی ہین اس بات کو فرض کرکے کہ ہر دروازہ پر آدمی مساوی رہنگی ہین اور اس ترکیب
مین یہہ بات فرض کیجائیگی کہ ہر دروازہ پر مختلف تعداد آدمیون کی ہی اب فرض کرو کہ اول دروازہ پر لا آدمی ہین اور
دوسرے پر و اور تیسری پر ع اور چوتہی پر ت پس اب موافق شرایط سوال کی بعد اول شکست دشمن سے کے چار دروازون
مذکور پر اتنی باقی رہینگے ۲ لا اور و ــ لا اور ع ــ لا اور ت ــ لا اور بعد دوسری شکست کی اتنی اتنی آدمی
رہینگی ۵ لا ــ و اور ۲ و ــ ۲ لا اور ع ــ و اور ت ــ و اور بعد تیسری شکست کی اتنی اتنی ۵ لا ــ ع
اور ۵ و ــ ۲ لا ــ ع اور ۲ ع ــ ۲ و اور ت ــ ع اور بعد چوتہی شکست کی ہر دروازہ پر اتنی اتنی
فوج باقی رہیگی ۵ لا ــ ت اور ۵ و ــ ۲ ل ــ ت اور ۵ ع ــ ۲ و ــ ت اور ۲ ت ــ ۲ ع ایسے
چارون صورتین جبریہ موافق شرط سوال کی مساوی ہونی چاہئین پس اول اور دوسری صورت سی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات
۵ لا ــ ت = ۵ و ــ ۲ لا ــ ت اور اس مساوات سی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۵ و = ۹ لا اور دوسری اور
تیسری صورتون سے حاصل یہہ ۵ و ــ ۲ لا ــ ت = ۵ ع ــ ۲ و ــ ت اور اس سے حاصل ہوگا یہہ مساوات

۹ د = ۵ ع + ۴ لا اور چونکہ لا = ۵ د/۴ تو حاصل ہوگی مساوات ۹ د = ۵ ع + ۲۰ د/۹ یا ۸۱ د = ۴۵ ع + ۲۰ د
اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۶۱ د = ۴۵ ع اور تیسری اور چوتھی صورتون سیے یہہ مساوات حاصل ہوتی ہی
۵ ع − ۴ د − ف = ۴ ف − ۴ ع اور اس مساوات سی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۹ ع − ۴ د = ۵ ف
لیکن د = ۴۵ ع/۶۱ تو ۹ ع − ۱۸۰ ع/۶۱ = ۵ ف اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات
۵۴۹ ع − ۱۸۰ ع = ۳۰۵ ف یا ۳۶۹ ع = ۳۰۵ ف اب ضرور ہی کہ ہووی کم سی عدد واسطی ف کی یہہ ۳۶۹ اور اسیواسطی ع = ۳۰۵ اور چونکہ د = ۴۵ ع/۶۱ تو معلوم ہوا کہ

د = ۳۰۵ × ۴۵/۶۱ = ۵ × ۴۵ = ۲۲۵ اور لا = ۱۵/۹ = ۲۲۵ × ۵/۹ =

۵ × ۲۵ = ۱۲۵ پس معلوم ہوا کہ چار اعداد مطلوبہ سیے ہین ۱۲۵ اور ۲۲۵ اور ۳۰۵ اور ۳۶۹ اور سیے وہیے ہین جو پہلی ثابت ہوئی تھے

سوال ۱۱ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا چار ایسی اعداد صحیح مجذوردن کا کہ اگر کوئی سیے کو اونمین سیے عدد مجذور ۱۴۴ پر زیادہ کرین تو ہر صورت مین حاصل جمع ایک مجذور رہوتا ہی پس فرض کرو کہ لا تعبیر کرتا ہی متواتر چارون اعداد مجذوردن کی جذرون کو اور اسیواسطی لازم ہی کہ ہووی ۱۴۴ + لا^۲ ایک کامل مجذور ہر صورت مین فرض کرو کہ جذر اس صورت کا لا + ۲ ف ہی پس حاصل ہوگی یہہ مساوات
لا^۲ + ۱۴۴ = (لا + ۲ ف)^۲ = لا^۲ + ۴ ف لا + ۴ ف^۲ اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات
لا = ۳۶/ف − ف پس اب تا کہ چار قیمتین واسطی لا کی مقرر ہون فرض کرو چار مختلف قیمتین واسطی ف سیے ایسی کہ ۳۶ اون سب پر علیحدہ علیحدہ تقسیم ہوسکی اور ظاہر ہی سیے اعداد ۱ اور ۲ اور ۳ اور ۴ ہین پس اب حاصل ہونگی متواتر سیے قیمتین واسطی لا کی لا = ۳۶/۱ − ۱ = ۳۵ اور
لا = ۳۶/۲ − ۲ = ۱۶ اور لا = ۳۶/۳ − ۳ = ۹ اور لا = ۳۶/۴ − ۴ = ۵
پس معلوم ہوا کہ تین اعداد صحیح مجذور مطلوبہ سیے ہین ۳۵^۲ اور ۱۶^۲ اور ۹^۲ اور ۵^۲ اور امتحان اس اسس سوالمین اسطرح سی ہوسکتا ہی

۱۴۴ + ۳۵^۲ = ۱۴۴ + ۱۲۲۵ = ۱۳۶۹ = ۳۷^۲ اور
۱۴۴ + ۱۶^۲ = ۱۴۴ + ۲۵۶ = ۴۰۰ = ۲۰^۲ اور
۱۴۴ + ۹^۲ = ۱۴۴ + ۸۱ = ۲۲۵ = ۱۵^۲ اور
۱۴۴ + ۵^۲ = ۱۴۴ + ۲۵ = ۱۶۹ = ۱۳^۲

سوال ۱۲ دریافت کیا چاہتے ہین ہم دو ایسی اعداد کہ اگر ضرب کرین ہم اونہین علیحدہ علیحدہ عددون ۴ اور ۳ مین اور ان حاصل ضربون کو جمع کرکے زیادہ کرین ہم حاصل جمع پر عدد ۲ کا تو یہہ حاصل جمع مساوی ہووے حاصل ضرب دو اعداد مذکورہ سے فرض کرو کہ دو اعداد مطلوبہ لا اور د ہین پس موافق شرایط سوال سے حاصل ہوگی یہہ مساوات ۴ لا + ۳ د + ۲ = لا د اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات لا (د − ۴) = ۳ د + ۲ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات لا = (۳ د + ۲)/(د − ۴)
اب فرض کرو کہ د = ۶ تو لا = (۱۸ + ۲)/۲ = ۱۰ اور ظاہر ہی کہ ۴ لا + ۳ د + ۲ = ۴۰ + ۱۸ + ۲ = ۶۰ = لا د = ۱۰ × ۶ یہہ سوال بیچ گنت مین لکہا گیا ہی اور بہاسکر اچارج اوسی اور طرح حل کرتا ہی وہ یہہ کہتا ہی کہ جس وقت دو مقدارین مجہول کسی ایک مساوات مین پائی جاوین تو مقرر کرو کچہہ مقدار واسطی ایک مجہول سے اور دوسری مقدار مجہول کی قیمت بعد ازان معلوم ہوجایگی مثلاً مساوات گذشتہ مین یعنی اسمین ۴ لا + ۳ د + ۲ = لا د اوسنی فرض کیا ہی د کو برابر ۵ سے اور موافق اس فرض کے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۴ لا + ۱۵ + ۲ = ۵ لا مین یعنی لا = ۱۷ واضح ہو کہ اس ترکیب اور ترکیب گذشتہ مین چندان فرق نہین کیونکہ ترکیب اول بعد جدا کرنی مقدار دون مجہول سے واسطی د کے کوئی قیمت مقرر کی اور ترکیب دوسری مین پہلی ہی سے د کی واسطی کوئی عدد مقرر کرلیا ہی

سوال ۱۳ ای دوست میری بتادی مجہی چار ایسی اعداد کہ حاصل ضرب اونکا مساوی اوس حاصل ضرب کے ہو جو پیدا ہوتا ہی ضرب دینی سے انہین اعداد کی حاصل جمع کو عدد ۲۰ مین فرض کرو کہ اول اعداد مطلوبہ مین سے لا ہی اور واسطی باقی تین اعداد مطلوبہ کی کوئی سی اعداد مثل ۵ ۴ ۲ کے مقرر کرو پس اس صورت مین ظاہر ہی کہ حاصل ضرب ان چار اعداد کا ۴۰ لا ہوگا اور حاصل جمع انکا لا + ۱۱ پس موافق شرایط سوال کے حاصل ہوگی یہہ مساوات ۴۰ لا = ۲۰ (لا + ۱۱) = ۲۰ لا + ۲۲۰ اور یہان سی یہہ معلوم ہوا کہ ۲۰ لا = ۲۲۰ اور اس سے لا = ۱۱ اور یہان سے معلوم ہوا کہ چار اعداد مطلوبہ ۱۱ ۵ ۴ ۲ ہین اور اگر اعداد واسطی تین اعداد مطلوب کی اور فرض کی جاتے تو چار اعداد مطلوبہ کچہہ اور ہونی واضح ہو کہ ان سوالو مین موافق بعض فرضون کے اعداد صحیح حاصل نہونگے بلکہ کسور مثلاً اگر واسطی تین اعداد مطلوبہ کے سوای اول سے کہ اوسکی واسطی ایک مقدار مجہول یعنی ایک حرف فرض کیا گیا تہا بجای ان اعداد ۵ ۴ ۲ کے اعداد ۳ اور ۵ اور ۷ فرض کئے جاتے تو حاصل ہوتی یہہ مساوات ۱۰۵ لا = ۲۰ (۳ + ۵ + ۷) = ۳۰۰ اور اسی واسطی

لا = ۳۰۰/۱۰۵ = ۶۰/۲۱ = ۲۰/۷ جو ایک کسر ہی

سوال ۱۴ چار مسافر چند روٹیان باندہ کر سفر کو چلی اور ایک خاص جا پہونچکر مقام کیا اور وہان سو رہی بعد تہوڑی دیر کی ایک کی ان میں سے آنکہہ کہل گئے اور اوسنی روٹیون مذکور کی چار مساوی حصہ کئی اور ایک روٹی بچی اوس روٹی کو کتی کو دیا اور اپنا حصہ روٹیون کا کہا گیا اور سو رہا دوسرا مسافر اوٹہا اور اسیطرح سے جتنی روٹیان تہین انکی چار مساوی حصہ کئے اور ایک روٹی جو باقی تہی اوسنی کتی کو دی اور اپنا ایک حصہ کہا گیا اور اسیطور سی تیسرا اور چوتہا مسافر بہی اوٹہا اور روٹیون کو اسیطور سی تقسیم کیا اور ایک ایک روٹی کتی کو دی پس اتنی مین صبح ہو گئی اور چارون مسافر جاگی اور باقی روٹیون کو چار مساوی حصون مین تقسیم کیا کوئی روٹی ہتین ٹوٹی سے کوئی روٹی زاید نہ نکلی کہ اوسکی ٹکڑی کرنی پڑین یا وہ کتی کو دیجائی پس بتاؤ کتنی روٹیان مسافران مذکور اپنی گہرون سے لیکر چلی تہے فرض کرو کہ لا ہی تعداد روٹیون کی پس موافق شرایط سوال کے ظاہر ہی کہ جسوقت ایک روٹی کتی کو دیگئی تو باقی روٹیون کا چوتہائی یعنے $\frac{\text{لا}-۱}{۴}$ وہ حصہ ہوگا جو اول مسافر نے اوٹہکر کہایا پس اب باقی رہینگی اتنی روٹیان $\text{لا} - \frac{\text{لا}-۱}{۴} - ۱ = \frac{۴\text{لا} - \text{لا} + ۱ - ۴}{۴} = \frac{۳\text{لا} - ۳}{۴}$ اب ظاہر ہی کہ دوسرے مسافر نی اوٹہکر اتنی روٹیان کہائین ہونگی

$$\frac{\frac{۳\text{لا}-۳}{۴} - ۱}{۴} = \frac{۳\text{لا} - ۷}{۱۶}$$

اور چونکہ ایک روٹی کتی کو اب بہی دیگئی تہی تو باقی رہینگی اتنی روٹیان $\frac{۳\text{لا}-۳}{۴} - \frac{۳\text{لا}-۷}{۱۶} - ۱ = \frac{۱۲\text{لا}-۱۲}{۱۶} - \frac{۳\text{لا}-۷}{۱۶} - \frac{۱۶}{۱۶} =$

$\frac{۹\text{لا}-۲۱}{۱۶}$ اب ظاہر ہی کہ تیسری مسافر نی اتنی روٹیان کہائین ہونگے $\frac{\frac{۹\text{لا}-۲۱}{۱۶} - ۱}{۴} = \frac{۹\text{لا}-۳۷}{۶۴}$

اور چونکہ کتی کو اس صورت مین بہی ایک روٹی ملی ہی تو باقی رہین گی اتنی روٹیان $\frac{۹\text{لا}-۲۱}{۱۶} - \frac{۹\text{لا}-۳۷}{۶۴} - ۱ =$

$\frac{۳۶\text{لا}-۸۴}{۶۴} - \frac{۹\text{لا}-۳۷}{۶۴} - \frac{۶۴}{۶۴} = \frac{۲۷\text{لا}-۱۱۱}{۶۴}$ اب ظاہر ہی کہ چوتہی مسافر نی اتنی روٹیان

کہائی ہونگی $\frac{\frac{۲۷\text{لا}-۱۱۱}{۶۴} - ۱}{۴} = \frac{۲۷\text{لا}-۱۷۵}{۲۵۶}$ اور بعد ازان باقی رہینگی اتنی روٹیان

$$\frac{۲۷\text{لا}-۱۱۱}{۶۴} - \frac{۲۷\text{لا}-۱۷۵}{۲۵۶} - ۱ = \frac{۱۰۸\text{لا}-۴۴۴}{۵۲۶} - \frac{۲۷\text{لا}-۱۷۵}{۲۵۶} - \frac{۲۵۶}{۲۵۶}$$

$= \frac{۸۱\text{لا}-۵۲۵}{۲۵۶}$ اور چونکہ سوال سی یہہ بات ظاہر ہی کہ ان باقی روٹیون کو چارون مسافرون نے برابر بانٹ کر کہا لیا اور کوئی روٹی ٹوٹی نہین اور نہ کوئی ٹکڑی کتے کو دیگئی تو ضرور ہی کہ چوتہائی اس باقیات کی ایک عدد صحیح ہو یعنے صورت $\frac{۸۱\text{لا}-۵۲۵}{۱۰۲۴}$ ایک عدد صحیح ہو واسطی دریافت کرنی کے کوئی ایسی قیمت لا کی کہ صورت

مذکور ایک عدد صحیح ہوجاوئ فرد ہی کو فرض کرو اس صورت کو مساوی ت کے اور موافق اس فرض کی حاصل ہوگی یہہ

مساوات ۸۱ لا − ۵۲۵ = ۱۰۲۴ ی اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

لا = (۵۲۵ + ۱۰۲۴ی)/۸۱ = ۱۲ی + ۶ + (۳۹ + ۵۲ی)/۸۱ اب فرض کرو کہ (۳۹ + ۵۲ی)/۸۱ = ع

اور اس مساوات سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ی = (۸۱ع − ۳۹)/۵۲ = ع + (۲۹ع − ۳۹)/۵۲ اب فرض کرو کہ

(۲۹ع − ۳۹)/۵۲ = ف اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ع = (۵۲ف + ۳۹)/۲۹ = ف + ۱ + (۲۳ف + ۱۰)/۲۹

اب فرض کرو کہ (۲۳ف + ۱۰)/۲۹ = ل ∴ ف = (۲۹ل − ۱۰)/۲۳ = ل + (۶ل − ۱۰)/۲۳

اب فرض کرو کہ (۶ل − ۱۰)/۲۳ = م اور ∴ ل = (۲۳م + ۱۰)/۶ = ۳م + ۱ + (۵م + ۴)/۶

اب فرض کرو کہ (۵م + ۴)/۶ = ن اور اس سے م = (۶ن − ۴)/۵ = ن + (ن − ۴)/۵ اب فرض کرو کہ

(ن − ۴)/۵ = د اور ∴ ن = ۵د + ۴ اب چونکہ مطلوب ہی ایسی کم سی کم تعداد روپیوں کی جس سے شرائط

سوال کی پوری ہوجائیں تو فرض کرو د = ۰ اور موافق اس فرض سے کے حاصل ہونگی یہہ مساواتیں

ن = ۴ اور م = ۴ اور ل = (۲۳م + ۱۰)/۶ = (۹۲ + ۱۰)/۶ = ۱۰۲/۶ = ۱۷

اور ف = (۲۹ل − ۱۰)/۲۳ = ۲۱ اور ع = (۵۲ف + ۳۹)/۲۹ = ۳۹ اور ی = (۸۱ع − ۳۹)/۵۲ = ۶۰

اور لا = (۵۲۵ + ۱۰۲۴ی)/۸۱ = (۵۲۵ + ۶۱۴۴۰)/۸۱ = ۶۱۹۶۵/۸۱ = ۷۶۵ اور امتحان

اس مثال کا اس طرح ہوتا ہی (۷۶۵ − ۱)/۴ = ۷۶۴/۴ = ۱۹۱ اور اس سے باقیات اول یہہ

ہی ۷۶۵ − ۱۹۱ − ۱ = ۵۷۳ اور (۵۷۳ − ۱)/۴ = ۵۷۲/۴ = ۱۴۳ اور

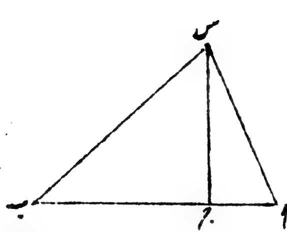
۵۷۳ − ۱۴۳ − ۱ = ۴۲۹ = باقیات دوم اور (۴۲۹ − ۱)/۴ = ۴۲۸/۴ = ۱۰۷

اور ۴۲۹ − ۱۰۷ − ۱ = ۳۲۱ = باقیات سوم اور (۳۲۱ − ۱)/۴ = ۳۲۰/۴ = ۸۰

اور ۳۲۱ − ۸۰ − ۱ = ۲۴۰ = باقیات چہارم اور ۲۴۰/۴ = ۶۰ = ایک عدد صحیح کے

سوال ۱۵ جاننے میں ہم ثابت کرنا شکل عروسی بوسیلہ جبر و مقابلہ کے بطریق مہندسین بہاسکراچارج کے

فرض کرو کہ ا ب س ایک مثلث قائم الزاویہ ہی اور س قائمہ ہی اور ا ب وتر قائمہ اور س ج عمود وتر قائمہ پر



اور یہہ بھی فرض کرو کہ ا س = ط اور ب س = ص اور ا ب = س اور ا ج = لا اور ج ب = س − لا اور چونکہ دو چھوٹی مثلث ا ج س اور ب ج س اور بڑا مثلث ب س ا متشابہ یعنی شکل مین یکسان ہین گو اونکی مساحت اور اضلاع مین فرق ہو پس ضرور ہی کہ انکی اضلاع متناسب ہوں اور اسیواسطی حاصل ہوگا یہہ تناسب س : ص :: ص : س − لا اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $ص^2$ = س (س − لا) = $س^2$ − س لا ...... (۱)

اور اسیطور بھی حاصل ہوتا ہی یہہ تناسب س : ط :: ط : لا اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $ط^2$ = س لا .... (۲)

اور اگر جمع کرین ہم مساواتون (۱) اور (۲) کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $ط^2$ + $ص^2$ = $س^2$ − س لا + س لا = $س^2$ یعنے $ط^2$ + $ص^2$ = $س^2$ اور یہی ثابت کرنا تھا اسجای پڑھنی والا اقلیدس کا یہہ اعتراض کرسکتا ہی کہ متشابہ ہونا مثلثونکا بسبب مساوی ہونی اونکی زوایا کی چھٹی مقالہ اقلیدس کی سے ثابت ہوتا ہی پس یہہ طریقہ ثابت کرنی شکل عروسی کا بذریعہ جبر و مقابلہ کی کچھہ کام کا نہین کیونکہ وہ موقوف ہی اوپر چھٹی مقالہ اقلیدس کے لیکن جواب اسکی یہہ کہا جاسکتا ہی کہ متشابہ ہونا مثلثہ کا اس صورت مین قریب بہ بدیہی ہی اور چندان محتاج دلیل کا نہین ہی لیکن مساوی ہونا حاصل جمع مجذورون دو ضلعون مثلث قائم الزاویہ کا مجذور وتر قائمہ سے بالکل خیال مین نہین آتا ہی

سوال ۱۶ چاہیے ہین ہم بنانا ایک بڑی سی بڑا مستطیل درمیان ایک نصف دائرہ مفروض کے مثلاً فرض کرو کہ نصف دائرہ مفروض ب ا د ہی اور اسمین ف ج مستطیل مطلوب ہی اور یہہ بھی فرض کرو کہ ص مرکز نصف دائرہ کا ہی اب تعبیر کرو نصف قطر ط ص کو ط سے اور ج ص کو لا سے اور مساحت مستطیل ف ج کو ی سے پس ہوگی سے مساواتین ط ج = $\sqrt{ط^2 - لا^2}$ اور ج ن = ۲ لا اور اسیواسطی حاصل ضرب ط ج × ج ن یعنے مساحت مستطیل مطلوبہ مساوی ہوگی ۲ لا $\sqrt{ط^2 - لا^2}$ کے یعنی حاصل ہوگی یہہ مساوات ی = ۲ لا $\sqrt{ط^2 - لا^2}$ اور اسیواسطی جبوقت مجذور کرسینے ہین ہم دونون طرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۴ $لا^4$ − ۴ $ط^2$ $لا^2$ = − $ی^2$

اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $\text{لا}^4 - \text{ط}^2 \times \text{لا}^2 = -\frac{\text{ر}^2}{4}$

اور جسوقت جاری کرتی ہین اس مساوات پر قاعدہ مساوات درجہ دوم کا تو اوسوقت حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

$$\text{لا}^4 - \text{ط}^2\,\text{لا}^2 + \frac{\text{ط}^4}{4} = \frac{\text{ط}^4}{4} - \frac{\text{ر}^2}{4} = \frac{\text{ط}^4 - \text{ر}^2}{4}$$

اور اسیواسطی $\text{لا}^2 = \frac{\text{ط}^2}{2} + \frac{\sqrt{\text{ط}^4 - \text{ر}^2}}{2}$ اب ظاہر ہی کہ ر^2 کو بڑی سے بڑا فرض کرین تو وہ مساوی ط^2 کے ہونا چاہیے اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات $\text{لا}^2 = \frac{\text{ط}^2}{2}$ اور اسیواسطی $\text{لا} = \sqrt{\frac{\text{ط}^2}{2}}$ اور $\text{ر} = \text{ط}^2$

سوال ۱۷ ایک مثلث مفروض مین ایک مستطیل بنا ہوا ہی اور مساحت اس مستطیل کی معلوم ہی پس چاہتی ہین ہم دریافت کرنا ضلعون اس مستطیل کو علیحدہ علیحدہ فرض کرو کہ مثلث مفروض سیکے تین ضلعے ط اور ص اور س ہین اور ن مساحت مستطیل کی ہی اور یہہ موافق شرط سوال کی معلوم ہی اب فرض کرو کہ دو ضلعی مستطیل سیکے کہ مقدارین مجہول ہین لا اور ر ہین اب چونکہ تینون ضلعی اس مثلث کے معلوم ہین تو موافق سوال چہارم اشکال ہندسی کے سیکے ہم دریافت کرسکتے ہین اس مثلث کا ارتفاع پس فرض کرو کہ یہہ ارتفاع معلوم م ہی پس اب متشابہ ہونی مثلثون کی سی حاصل ہوگا

یہہ تناسب $\text{س} : \text{ر} :: \text{م} : \text{م} - \text{لا}$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $\text{ر}\,\text{م} = \text{س}\,\text{م} - \text{س}\,\text{لا}$

اور موافق شرط سوال سیکے یہہ بات ظاہر ہی کہ $\text{ر}\,\text{لا} = \text{ن}$ پس اس سے حاصل ہوگی یہہ مساوات $\text{ر} = \frac{\text{ن}}{\text{لا}}$ اور جسوقت رکھین ہم اس قیمت ر کو مساوات $\text{ر}\,\text{م} = \text{س}\,\text{م} - \text{س}\,\text{لا}$ مین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

$\frac{\text{م}\,\text{ن}}{\text{لا}} = \text{س}\,\text{م} - \text{س}\,\text{لا}$ اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $\text{م}\,\text{ن} = \text{س}\,\text{م}\,\text{لا} - \text{س}\,\text{لا}^2$

اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $\text{س}\,\text{لا}^2 - \text{س}\,\text{م}\,\text{لا} = -\text{م}\,\text{ن}$ اور اسسے یہہ $\text{لا}^2 - \text{م}\,\text{لا} = -\frac{\text{م}\,\text{ن}}{\text{س}}$

اور جسوقت موافق قاعدہ مساوات درجہ دوم کی زیادہ کرین ہم دونو طرفون اس مساوات پر مجذور $\frac{\text{م}}{2}$ کا تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $\text{لا}^2 - \text{م}\,\text{لا} + \frac{\text{م}^2}{4} = \frac{\text{م}^2}{4} - \frac{\text{م}\,\text{ن}}{\text{س}} = \frac{\text{س}\,\text{م}^2 - 4\,\text{م}\,\text{ن}}{4\,\text{س}}$ اور اسسے

یہہ مساوات حاصل ہوتی ہی $\text{لا} - \frac{\text{م}}{2} = \pm\sqrt{\frac{\text{س}\,\text{م}^2 - 4\,\text{م}\,\text{ن}}{4\,\text{س}}}$ اور $\text{لا} = \frac{\text{م}}{2} \pm \sqrt{\frac{\text{س}\,\text{م}^2 - 4\,\text{م}\,\text{ن}}{4\,\text{س}}}$

اور $\text{ر} = \frac{\text{ن}}{\frac{\text{م}}{2} \pm \sqrt{\frac{\text{س}\,\text{م}^2 - 4\,\text{م}\,\text{ن}}{4\,\text{س}}}}$

مثلاً فرض کرو کہ تین ضلعے مثلث مفروض کی سیے ہین

ق = ۲۱ اور ط = ۱۰ اور ص = ۱۷ پس ظاہر ہی کہ ارتفاع اس مثلث کی ۸ ہوگی اور

$$لا = ۴ \pm \sqrt{\frac{۲۰ \times ۸ \times ۴ - ۸^{۲} \times ۲۱}{۲۱ \times ۴}} = ۴ \pm \sqrt{\frac{۷۰۴}{۸۴}}$$

سوال ۱۸

معلوم ہین ہمین ارتفاع اور قاعدہ ایک مثلث کا اور نسبت اوسکی دو باقی کی ضلعون کی اور چاہتی ہین ہم دریافت کرنا ہر ضلع اس مثلث کو علیحدہ علیحدہ فرض کرو کہ قاعدہ مثلث مذکور کا = ق اور ارتفاع اوسکی = ا اور دو باقی اوسکی ضلعے آپسمین وہی نسبت رکھتی ہین جو عدد ا کا رکھتا ہی ن سے پس اسصورت مین ضرور ہی کہ اگر فرض کیا جاے ایک ضلع بقدر لا کے تو دوسرا ضلع ن لا ہوگا اب فرض کرو کہ ایک بازو قاعدہ مثلث مذکور کا د ہی اور اسیواسطی دوسرا بازو اوسکا ق − د ہوگا پس موافق شکل عروسی سے حاصل ہونگی یہ مساواتین $لا^{۲} = د^{۲} + ا^{۲}$ اور $ن^{۲} لا^{۲} = (ق - د)^{۲} + ا^{۲}$ اور اس مساوات سی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $لا^{۲} = \frac{(ق - د)^{۲} + ا^{۲}}{ن^{۲}}$ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات $د^{۲} + ا^{۲} = \frac{(ق - د)^{۲} + ا^{۲}}{ن^{۲}}$

اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $ن^{۲} د^{۲} + ا^{۲} ن^{۲} = ق^{۲} - ۲ ق د + د^{۲} + ا^{۲}$ اور اس سے یہہ $(ن^{۲} - ۱) د^{۲} + ۲ ق د = ق^{۲} - (ن^{۲} - ۱) ا^{۲}$ اور اس سے یہہ $د^{۲} + \frac{۲ ق}{ن^{۲} - ۱} د = \frac{ق^{۲} - (ن^{۲} - ۱) ا^{۲}}{ن^{۲} - ۱}$ اور اگر حل کرین ہم اس مساوات درجہ دوم کو موافق قاعدہ کے تو حاصل ہوگی یہہ قیمت د کی

$$د = - \frac{ق}{ن^{۲} - ۱} \pm \sqrt{\frac{ق^{۲}}{(ن^{۲} - ۱)^{۲}} + \frac{ق^{۲} - (ن^{۲} - ۱) ا^{۲}}{ن^{۲} - ۱}}$$

اور جسوقت معلوم ہوئے قیمت د کی اوسوقت معلوم ہوجائیگی ہمین قیمت لا کی مساوات $لا = \sqrt{د^{۲} + ا^{۲}}$ سی اور جسوقت معلوم ہوئے قیمت لا کی یعنی ایک ضلع کی تو معلوم ہوجائیگی ہمین قیمت ن لا کی کہ دوسرا ضلع ہی مثلاً فرض کرو کہ قاعدہ مثلث مذکور کا = ۲۱ اور ارتفاع اوسکی = ۸ اور نسبت درمیان دو ضلعون مطلوبہ کی وہ ہی جو ا رکھتا ہی طرف $\frac{۱۷}{۱۰}$ کی یعنی $ن = \frac{۱۷}{۱۰}$ پس اب حاصل ہوگی قیمت د کی اس مساوات سی $د = - \frac{ق}{ن^{۲} - ۱} \pm \sqrt{\frac{ق^{۲}}{(ن^{۲} - ۱)^{۲}} + \frac{ق^{۲} - (ن^{۲} - ۱) ا^{۲}}{ن^{۲} - ۱}}$

$$= - \frac{۲۱۰۰}{۱۸۹} + \frac{۳۲۳۴}{۱۸۹} = \frac{۱۱۳۴}{۱۸۹} = ۶$$ پس معلوم ہوا کہ د = ۶

اور اسیواسطے $لا^{۲} = د^{۲} + ا^{۲} = ۶^{۲} + ۸^{۲} = ۳۶ + ۶۴ = ۱۰۰$ اور اسیواسطی حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت لا کی

لا = ۱۰ جو ایک ضلع مثلث کا ہی اور ظاہر ہی کہ دوسرا ضلع =

√((۲۱−۶)² + ۸²) = √(۱۵² + ۸²) = √(۲۲۵ + ۶۴) = √۲۸۹ = ۱۷

سوال ۱۹ چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا دو ایسی اعداد کہ اگر انکی مجذوروں کو ایک دفعہ تو ایک دوسرے سے تفریق کریں اور دوسری بار ان دونوں کو جمع کریں اور حاصل تفریق اور حاصل جمع پر عدد ۱ کا علیحدہ علیحدہ زیادہ کریں تو سیے دونوں مجموعی اعداد مجذور رہویں فرض کرو کہ ۴ لا² عدد اول ہی اور ۵ لا² − ۱ دوسرا عدد ہی اس صورت میں ظاہر ہی کہ ۴ لا² + ۵ لا² − ۱ + ۱ = ۹ لا² = (۳ لا)² = ایک عدد مجذور ہے اور ۵ لا² − ۱ − ۴ لا² + ۱ = لا² = ایک مجذور ہے پس پورے ہوئیں دونوں شرطیں سوال کے مثلاً فرض کرو کہ لا = ۲ تو اعداد مطلوبہ سیے ہونگی ۱۶ اور ۱۹ امتحان اس مثال کا اسطور پر ہو سکتا ہی ۱۶ + ۱۹ + ۱ = ۳۶ = ۶² = ایک عدد مجذور ہے اور ۱۹ − ۱۶ + ۱ = ۴ = ۲² = ایک مجذور ہے اگر فرض کریں ہم لا = ۳ تو اعداد مطلوبہ سیے ہونگی ۳۶ اور ۴۴ اور امتحان اسطور پر نکلا سکتا ہی ۴۴ + ۳۶ + ۱ = ۸۱ = ۹² = ایک عدد مجذور ہے اور ۴۴ − ۳۶ + ۱ = ۹ = ۳² = ایک عدد مجذور ہے

سوال ۲۰ بتاؤ وہ کونسا عدد ہی کہ اگر اسکی مجذور سے عدد ۴ کا تفریق کریں اور حاصل تفریق کو عدد ۷ پر قسمت کریں تو خارج قسمت ایک عدد صحیح ہوتا ہی فرض کرو لا ہی عدد مطلوب پس موافق شرایط سوال کے ضرور ہی کہ ہووی (لا² − ۴)/۷ ایک عدد صحیح فرض کرو کہ (لا² − ۴)/۷ = د اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات لا² = ۷ د + ۴ اور لا = √(۷ د + ۴) اب فرض کرو کہ √(۷ د + ۴) = ۲ + ع اور جسوقت مجذور کرتے ہیں ہم دونوں طرفوں اس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۷ د + ۴ = ۴ + ۴ ع + ع² اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ د = ع (ع + ۴)/۷ اب فرض کرو کہ ع = ۷ ف اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات د = (۴ + ۷ ف) ف مثلاً فرض کرو کہ ف = ۱ تو د = ۱۱ اور لا = √(۷ د + ۴) = √(۷ × ۱۱ + ۴) = √(۷۷ + ۴) = √۸۱ = ۹ = عدد مطلوبہ کی اب فرض کرو کہ ف = ۲ اور موافق اس فرض کے حاصل ہوگی یہہ مساوات

د = (۴ + ۱۴) × ۲ = ۳۶ اور

لا = √(۴ + ۷ × ۳۶) = √(۴ + ۲۵۲) = √۲۵۶ = ۱۶ اور امتحان ان دونوں مثالوں کا یوں ہوتا ہی کہ (۹² − ۴)/۷ = ۷۷/۷ = ۱۱ = ایک عدد صحیح ہے اور

(۱۶² − ۴)/۷ = ۲۵۲/۷ = ۳۶ = ایک عدد صحیح کی فقط

ضمیمہ مساواتوں کا اسمین نہایت مشکل مساواتین حل کی گئی ہین

١

$$\frac{١٧-ل٤}{٩}-\frac{٣-\frac{ل}{٣}-٢٢ل}{٣٣}=ل-\frac{٦}{ل}\left(١-\frac{ل}{٣٣}\right)$$

$$\therefore \frac{ل}{٩}+\frac{٦}{ل}-ل=\frac{ل٢}{٣}+\frac{١}{٩}-\frac{١٧}{٩}-\frac{ل٤}{٩}$$

$$\therefore \frac{١٨}{٩}+\frac{٦}{ل}-ل=ل\left(\frac{١}{٩}-\frac{٦}{٩}+\frac{٤}{٩}\right)$$

$$\therefore ٢+\frac{٦}{ل}-ل=ل \;\text{یا}\; \frac{ل٩}{٩}$$

$$\therefore ٢=\frac{٦}{ل}$$

$$\therefore ل=٣$$

٢

$$\frac{٤-ل٥}{١-ل}+\frac{٣٠-ل٨}{٧-ل٢}=\frac{١٣-ل١٠}{٣-ل٢}+\frac{١٧-ل٤}{ل-٤}$$

$$\therefore \frac{١-(١-ل)٥}{١-ل}+\frac{٢-(٧-ل٢)٤}{٧-ل٢}=\frac{٢+(٣-ل٢)٥}{٣-ل٢}+\frac{١-(٤-ل)٤}{٤-ل}$$

$$\therefore \frac{١}{١-ل}+٥+\frac{٢}{٧-ل٢}-٤=\frac{٢}{٣-ل٢}+٥+\frac{١}{٤-ل}-٤$$

$$\therefore \frac{٢}{٧-ل٢}-\frac{١}{١-ل}=\frac{١}{٤-ل}-\frac{٢}{٣-ل٢}$$

$$\therefore \frac{-٥}{٧+ل٩-ل^٢٢}=\frac{-٥}{١٢+ل١١-ل^٢٢}$$

$$\therefore ١٢+ل١١-ل^٢٢=٧+ل٩-ل^٢٢$$

$$\therefore ل٢=٥$$

$$ل=\frac{٥}{٢}=٢\frac{١}{٢}$$

٣

$$\frac{ل٣}{٢}-\frac{٩-ل١٨}{(٣+ل)(١-ل٣)}=ل٣-\frac{٣}{٢}\times\frac{١-ل^٢٣}{٣+ل}-\frac{٥٧-ل٣}{٢}$$

$$\therefore \frac{ل٣}{٢}-\frac{٩(ل٣+١)}{٣+ل}=ل٣-\frac{\frac{٣}{٢}-ل^٢٣}{٣+ل}-\frac{٥٧}{٢}+\frac{ل٣}{٢}$$

$$\therefore \frac{٢(ل^٢-\frac{١}{٢})-٩(ل٣+١)}{٣+ل}=ل٣-\frac{١٩\times٣}{٢}$$

$$\therefore \frac{ل^٢-\frac{١}{٢}-ل٩-٣}{٣+ل}=ل-٩\frac{١}{٢}$$

$$\therefore ل^٢-ل٩-٣\frac{١}{٢}=ل^٢-ل٩\frac{١}{٢}\times ل-٢٨\frac{١}{٢}$$

$$\therefore ٢\frac{١}{٢}ل=٢٥$$

$$\therefore ل=١٠$$

٤

$$\frac{٢}{١٩}\left(\sqrt{٨(ل^٢+ل٩+٢٧)}-\sqrt{٨(ل^٢+ل٢٠+٥١)}\right)=\sqrt{\frac{ل+٢٢}{ل+١٧}}$$

$$\therefore \sqrt{٨(ل^٢+ل٩+٢٧)}-\frac{١٩}{٢}\times\sqrt{\frac{ل+٢٢}{ل+١٧}}=\sqrt{٨(ل^٢+ل٢٠+٥١)}$$

چونکہ $ل^٢+ل٩+٢٧=(ل+٢٢)(ل+١٧)$ تو وہ مجذور ہوسکی

$$\therefore ل^٢+ل٩+٢٧-١٩(ل+٢٢)+\frac{٣٦١}{٤}\times\frac{ل+٢٢}{ل+١٧}=ل^٢+ل٢٠+٥١$$

$$\therefore \frac{۳۶۱}{۴} \times \frac{\text{ل}+۲۲}{\text{ل}+۱۷} = ۵۱ + (۱۹-۱۷) \times ۲۲ = ۹۵$$

$$\therefore \frac{\text{ل}+۲۲}{\text{ل}+۳} = \frac{۴}{۳۶۱} \times ۹۵ = \frac{۲۰}{۱۹}$$

طرفین مساوات پر ا زیادہ کیا اور پھر ا کم کیا اور ان دونوں مساواتوں میں سے اول کو دوسرے پر تقسیم کیا اور اس عمل کو آئندہ کی مساواتوں میں ہم اسطرح (بحکم ۴) تعبیر کرینگے

$$\therefore \frac{۲\text{ل}+۳۹}{۵} = \frac{۳۹}{۱}$$

$$\therefore ۲\text{ل} = ۳۹ \times ۴$$

$$\therefore \text{ل} = ۷۸$$

۵

$$\text{ص}^۲ = \frac{\text{ط}+\text{ل}+\sqrt{۲\text{ط}\text{ل}+\text{ل}^۲}}{\text{ط}+\text{ل}-\sqrt{۲\text{ط}\text{ل}+\text{ل}^۲}}$$

$$\therefore \frac{\text{ط}+\text{ل}}{\sqrt{۲\text{ط}\text{ل}+\text{ل}^۲}} = \frac{\text{ص}^۲+۱}{\text{ص}^۲-۱} \quad \text{بحکم (۴) مساوات}$$

$$\therefore \frac{\text{ط}^۲+۲\text{ط}\text{ل}+\text{ل}^۲}{۲\text{ط}\text{ل}+\text{ل}^۲} = \left(\frac{\text{ص}^۲+۱}{\text{ص}^۲-۱}\right)^۲$$

$$\therefore \frac{\text{ط}^۲}{۲\text{ط}\text{ل}+\text{ل}^۲} + ۱ = \left(\frac{\text{ص}^۲+۱}{\text{ص}^۲-۱}\right)^۲$$

$$\therefore \frac{\text{ط}^۲}{۲\text{ط}\text{ل}+\text{ل}^۲} = \left(\frac{\text{ص}^۲+۱}{\text{ص}^۲-۱}\right)^۲ - ۱ = \frac{۴\text{ص}^۲}{(\text{ص}^۲-۱)^۲}$$

$$\therefore \frac{۲\text{ط}\text{ل}+\text{ل}^۲}{\text{ط}^۲} = \frac{(\text{ص}^۲-۱)^۲}{۴\text{ص}^۲}$$

$$\therefore ۱ + \frac{۲\text{ط}\text{ل}+\text{ل}^۲}{\text{ط}^۲} = \left(\frac{\text{ط}+\text{ل}}{\text{ط}}\right)^۲ = ۱ + \frac{(\text{ص}^۲-۱)^۲}{۴\text{ص}^۲} = \frac{(\text{ص}^۲+۱)^۲}{۴\text{ص}^۲}$$

$$\therefore \frac{\text{ط}+\text{ل}}{\text{ط}} = \frac{\text{ص}^۲+۱}{۲\text{ص}}$$

$$\therefore \frac{\text{ل}}{\text{ط}} = \frac{\text{ص}^۲+۱}{۲\text{ص}} - ۱ = \frac{\text{ص}^۲-۲\text{ص}+۱}{۲\text{ص}} = \frac{(\text{ص}-۱)^۲}{۲\text{ص}}$$

$$\therefore \text{ل} = \frac{\text{ط}}{۲\text{ص}}(\text{ص}-۱)^۲$$

۶

$$\text{ص} = \frac{\text{ط}-\text{ل}+\sqrt{۲\text{ط}\text{ل}-\text{ل}^۲}}{\text{ط}-\text{ل}}$$

$$\therefore ۱ + \frac{\sqrt{۲\text{ط}\text{ل}-\text{ل}^۲}}{\text{ط}-\text{ل}} = \text{ص}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{۲\text{ط}\text{ل}-\text{ل}^۲}}{\text{ط}-\text{ل}} = \text{ص}-۱ \quad \therefore \frac{۲\text{ط}\text{ل}-\text{ل}^۲}{(\text{ط}-\text{ل})^۲} = (\text{ص}-۱)^۲$$

$$\therefore \frac{۲\text{ط}\text{ل}-\text{ل}^۲}{\text{ط}^۲-۲\text{ط}\text{ل}+\text{ل}^۲} = (\text{ص}-۱)^۲$$

$$\therefore \left(\frac{\text{ط}}{\text{ط}-\text{ل}}\right)^۲ - ۱ = (\text{ص}-۱)^۲ \quad \therefore \left(\frac{\text{ط}}{\text{ط}-\text{ل}}\right)^۲ = (\text{ص}-۱)^۲ + ۱$$

$$\therefore \frac{\text{ط}}{\text{ط}-\text{ل}} = \sqrt{(\text{ص}-۱)^۲+۱} \quad \therefore \frac{\text{ط}-\text{ل}}{\text{ط}} = \frac{۱}{\sqrt{(\text{ص}-۱)^۲+۱}}$$

$$\therefore \frac{\text{ل}}{\text{ط}} = ۱ - \frac{۱}{\sqrt{(\text{ص}-۱)^۲+۱}}$$

$$\therefore \text{ل} = \text{ط} - \frac{\text{ط}}{\sqrt{(\text{ص}-۱)^۲+۱}}$$

۷

$$\frac{۲۴۳ + ۳۲۴\sqrt{۳\text{ل}}}{۱۶\text{ل}-۳} = \left(۴\sqrt{\text{ل}} - \sqrt{۳}\right)^۲$$

$$\therefore \frac{۸۱\sqrt{۳}\left(\sqrt{۳} + ۴\sqrt{\text{ل}}\right)}{\left(۴\sqrt{\text{ل}}+\sqrt{۳}\right)\left(۴\sqrt{\text{ل}}-\sqrt{۳}\right)} = \left(۴\sqrt{\text{ل}} - \sqrt{۳}\right)^۲$$

∴ ۱۸√۳ / (۴√ل − √۳) = (۴√ل − √۳)^۲

∴ ۱۸√۳ = (۴√ل − √۳)^۳

∴ ۲√۳ = ۴√ل − √۳

∴ ۴√ل = ۴√۳

∴ ل = ۳

۸ ∛(ط+ل) + ∛(ط−ل) = ص

یہہ بات ظاہر ہی کہ

(∛(ط+ل) + ∛(ط−ل))^۳ = ۲ط + ۳ ∛(ط^۲ − ل^۲) (∛(ط+ل) + ∛(ط−ل))

اور ∛(ط+ل) + ∛(ط−ل) = ص ہی سوال مکعب مساوات مفروضہ کا یہہ ہی

۲ط + ۳ ∛(ط^۲ − ل^۲) × ص = ص^۳

∴ ۳ص ∛(ط^۲ − ل^۲) = ص^۳ − ۲ط

∴ ∛(ط^۲ − ل^۲) = ص^۲/۳ − ۲ط/۳ص

∴ ط^۲ − ل^۲ = (ص^۲/۳ − ۲ط/۳ص)^۳

∴ ل^۲ = ط^۲ − (ص^۲/۳ − ۲ط/۳ص)^۳

∴ ل = √(ط^۲ − (ص^۲/۳ − ۲ط/۳ص)^۳)

۹ ل^۲ − ۳ل = ۲

∴ ل^۲ − ل = ۲ + ۲ل

∴ ل (ل^۲ − ۱) = ۲ (ل + ۱)

∴ ل (ل − ۱)(ل + ۱) = ۲ (ل + ۱)

چونکہ یہہ مساوات (ل+۱) پر تقسیم ہوسکتی ہی تو موافق خواص مساوات کی ل+۱ = ۰ ∴ ل = −۱ اور بعد تقسیم کرنیکی ل+۱

ل (ل − ۱) = ۲

∴ ل^۲ − ل = ۲ ∴ ل^۲ − ل + ۱/۴ = ۹/۴

∴ ل − ۱/۲ = ± ۳/۲ ∴ ل = ۲ یا −۱

۱۰ ل^۲ − ۲/۳ل = ۱ ۷/۹

∴ ل^۲ − ۴/۹ = ۱ + ۲/۳ل = ۱/ل (ل + ۲/۳)

∴ (ل − ۲/۳)(ل + ۲/۳) = ۱/ل (ل + ۲/۳)

∴ ل + ۲/۳ = ۰ ∴ ل = − ۲/۳

اور ل − ۲/۳ = ۱/ل

∴ ل^۲ − ۲ل/۳ = ۱

∴ ل^۲ − ۲ل/۳ + ۱/۹ = ۱۰/۹

∴ ل − ۱/۳ = ± √۱۰/۳

∴ ل = (۱ ± √۱۰)/۳

۱۱

$$\left(لا+ط+\sqrt{لا^2+۲طلا+ص^2}\right)^۳+\left(لا+ط-\sqrt{لا^2+۲طلا+ص^2}\right)^۳=۱۴\,(لا+ط)^۳$$

چونکہ $(ا+ب)^۳+(ا-ب)^۳=۲ا^۳+۶اب^۲$ اس واسطے مساوات مفروضہ سے حاصل ہوتا ہے

$$۲(لا+ط)^۳+۶(لا+ط)(لا^2+۲طلا+ص^2)=۱۴(لا+ط)^۳$$

$$\therefore لا+ط=۰ \quad \therefore لا=-ط$$

$$اور\ ۶(لا^2+۲طلا+ص^2)=۱۲(لا+ط)^2$$

$$\therefore لا^2+۲طلا+ص^2=۲لا^2+۴طلا+۲ط^2$$

$$\therefore لا^2+۲طلا+ط^2=ص^2-ط^2$$

$$\therefore لا+ط=\pm\sqrt{ص^2-ط^2}$$

$$\therefore لا=\pm\sqrt{ص^2-لا^2}-ط$$

۱۲

$$(۱+لا+لا^2)^2=\frac{ط+۱}{ط-۱}(۱+لا^2+لا^4)$$

$$\therefore ۱+لا+لا^2=\frac{ط+۱}{ط-۱}\cdot\frac{۱+لا^2+لا^4}{۱+لا+لا^2}$$

$$=\frac{ط+۱}{ط-۱}\cdot\frac{۱+لا+لا^2-لا(۱-لا^2)}{۱+لا+لا^2}$$

$$=\frac{ط+۱}{ط-۱}\left(۱-لا(۱-لا)\right)$$

$$\therefore \frac{۱+لا+لا^2}{۱-لا+لا^2}=\frac{ط+۱}{ط-۱}$$

$$\therefore \frac{۱+لا^2}{لا}=\frac{ط}{۱}$$ بحکم (۴) مساوات

$$\therefore ۱+لا^2=طلا$$

$$\therefore لا^2-طلا=-۱$$

$$\therefore لا^2-طلا+\frac{ط^2}{۴}=\frac{ط^2}{۴}-۱$$

$$\therefore لا-\frac{ط}{۲}=\pm\sqrt{\frac{ط^2}{۴}-۱}$$

$$لا=\frac{ط}{۲}\pm\sqrt{\frac{ط^2}{۴}-۱}$$

۱۳

$$ص\left(\frac{ط-ص}{لا^2}+۱\right)\left(\frac{ط-۲ص}{لا}+۱\right)=\frac{ط^2}{لا}-ط$$

$$\therefore ص(ط-ص+لا)(ط-۲ص+لا)=ط^2لا-طلا^2$$

$$\therefore (ط+ص)لا^2-(ط^2-۲طص+۳ص^2)لا+ص(ط-ص)(ط-۲ص)=۰$$

$$\therefore (ط+ص)لا^2-\left\{(ط-ص)(ط-۲ص)+ص(ط+ص)\right\}لا+ص(ط-ص)(ط-۲ص)=۰$$

$$\therefore لا\left\{(ط+ص)لا-(ط-ص)(ط-۲ص)\right\}-ص\left\{(ط+ص)لا-(ط-ص)(ط-۲ص)\right\}=۰$$

$$\therefore \text{جزو مشترک}\ (ط+ص)لا-(ط-ص)(ط-۲ص)=۰$$

$$\therefore لا=\frac{ط-ص}{ط+ص}(ط-۲ص)$$

اور بھی $لا=ص$ بسبب تقسیم کرنے کی جزو مشترک پر

۱۴

$$\left(\frac{لا+ط}{لا+ص}\right)^{\frac{۱}{۲}}-\frac{ط-ص}{۲(لا+س)}=۱$$

$$\therefore \frac{لا+ط}{لا+ص}=۱+\frac{ط-ص}{لا+س}+\frac{(ط-ص)^2}{۴(لا+س)^2}$$

$$\therefore \frac{لا+ط}{لا+ص}-۱=\frac{ط-ص}{لا+س}+\frac{(ط-ص)^2}{۴(لا+س)^2}$$

$$\therefore \frac{ط-ص}{لا+ص} = \frac{ط-ص}{لا+س} + \frac{(ط-ص)^۲}{۴(لا+س)^۲}$$

$$\therefore \frac{۱}{لا+ص} = \frac{۱}{لا+س} + \frac{ط-ص}{۴(لا+س)^۲}$$

$$\therefore \frac{س-ص}{(لا+ص)(لا+س)} = \frac{ط-ص}{۴(لا+س)^۲}$$

$$\therefore \frac{س-ص}{لا+ص} = \frac{ط-ص}{۴(لا+س)}$$

$$\therefore \left\{ط-ص-۴(س-ص)\right\} لا = ۴س(س-ص) - ص(ط-ص)$$

$$\therefore لا = \frac{۴س(س-ص) - ص(ط-ص)}{ط+۳ص-۴س}$$

۱۵
$$\frac{لا+ط}{لا+ص} = \left(\frac{۲لا+ط+س}{۲لا+ص+س}\right)^۲$$

$$\therefore ۱+\frac{ط-ص}{لا+ص} = \left(۱+\frac{ط-ص}{۲لا+ص+س}\right)^۲$$

$$= ۱+\frac{۲(ط-ص)}{۲لا+ص+س} + \frac{(ط-ص)^۲}{(۲لا+ص+س)^۲}$$

$$\therefore \frac{۱}{لا+ص} - \frac{۲}{۲لا+ص+س} = \frac{ط-ص}{(۲لا+ص+س)^۲}$$

$$\therefore \frac{س-ص}{لا+ص} = \frac{ط-ص}{۲لا+ص+س}$$

$$\therefore ۲س\,لا - ۲ص\,لا - ص^۲ + س^۲ = (ط-ص)لا + ص(ط-ص)$$

$$\therefore (ط+ص-۲س)\,لا = س^۲ - طص$$

$$\therefore لا = \frac{س^۲ - طص}{ط+ص-۲س}$$

۱۶
$$\sqrt[م]{(۱+لا)^۲} - \sqrt[م]{(۱-لا)^۲} = \sqrt[م]{۱-لا^۲}$$

اس مساوات کو اسطرح بھی لکھ سکتے ہیں

$$(۱+لا)^{\frac{۲}{م}} - (۱-لا)^{\frac{۲}{م}} = (۱-لا^۲)^{\frac{۱}{م}}$$

$$= (۱-لا)^{\frac{۱}{م}}(۱+لا)^{\frac{۱}{م}}$$

طرفین کو $(۱-لا)^{\frac{۲}{م}}$ پر تقسیم کیا

$$\therefore \left(\frac{۱+لا}{۱-لا}\right)^{\frac{۲}{م}} - ۱ = \left(\frac{۱+لا}{۱-لا}\right)^{\frac{۱}{م}}$$

$$\therefore \left(\frac{۱+لا}{۱-لا}\right)^{\frac{۲}{م}} - \left(\frac{۱+لا}{۱-لا}\right)^{\frac{۱}{م}} = ۱$$

$$\therefore \left(\frac{۱+لا}{۱-لا}\right)^{\frac{۲}{م}} - \left(\frac{۱+لا}{۱-لا}\right)^{\frac{۱}{م}} + \frac{۱}{۴} = ۱+\frac{۱}{۴} = \frac{۵}{۴}$$

$$\therefore \left(\frac{۱+لا}{۱-لا}\right)^{\frac{۱}{م}} - \frac{۱}{۲} = \pm\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

$$\therefore \left(\frac{۱+لا}{۱-لا}\right)^{\frac{۱}{م}} = \frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

$$\therefore \frac{۱+لا}{۱-لا} = \frac{(۱\pm\sqrt{۵})^م}{۲^م}$$

$$\therefore لا = \frac{(۱\pm\sqrt{۵})^م - ۲^م}{(۱\pm\sqrt{۵})^م + ۲^م}$$ بحکم (۴) مساوات

۱۷
$$\frac{۱+لا^۴}{(۱+لا)^۴} = ط$$

$$\therefore ۱+لا^۴ = ط(۱+لا)^۴ = ط(۱+۴لا+۶لا^۲+۴لا^۳+لا^۴)$$

$$\therefore (۱-ط)(۱+لا^۴) = ۴ط(لا+لا^۳) + ۶ط\,لا^۲$$

طرفین کو $لا^۲$ پر تقسیم کیا اسیواسطے

(١ − ط)(ل٢ + ١/ل٢) = ٢ط(ل + ١/ل) + ٤ط

∴ (ل٢ + ١/ل٢) − ٢ط/(ط − ١) (ل + ١/ل) = ٤ط/(ط − ١)

∴ (ل٢ + ٢ + ١/ل٢) − ٢ط/(ط − ١) (ل + ١/ل) = ٤ط/(ط − ١) + ٢

یا (ل + ١/ل)٢ − ٢ط/(ط − ١) (ل + ١/ل) = (٤ط + ٢)/(ط − ١)

∴ (ل + ١/ل)٢ − ٢ط/(ط − ١) (ل + ١/ل) + (ط/(ط − ١))٢ = (ط + ١)٢ / (ط − ١)٢

∴ ل + ١/ل − ط/(ط − ١) = ± √((ط + ١)٢) / (ط − ١)

∴ ل + ١/ل = (ط ± √((ط + ١)٢)) / (ط − ١) = ٢ق فرض تسہیلاً

∴ ل٢ − ٢ق ل = −١

∴ ل٢ − ٢ق ل + ق٢ = ق٢ − ١

∴ ل − ق = ± √(ق٢ − ١)

∴ ل = ق ± √(ق٢ − ١)

١٨

ل + ط + ٣ ∛(ط ص ل) = ص

فرض کرو کہ ∛ل + ∛ط = ∛د اور اسکا مکعب کرو تو

ل + ط + ٣ ∛(ط ل) (∛ل + ∛ط) = د

∴ ل + ط + ٣ ∛(ط د ل) = د

اب اگر اس مساوات کو مساوات مفروض سے مقابلہ کریں تو معلوم ہوتا ہے کہ

د = ص ∴ ∛ل + ∛ط = ∛ص

∴ ∛ل = ∛ص − ∛ط

∴ ل = (∛ص − ∛ط)٣

١٩ ل٣ − ١ = ٠

چونکہ ل٣ − ١ = (ل − ١)(ل٢ + ل + ١) = ٠

∴ ل − ١ = ٠ اور ∴ ل = ١

اور ل٢ + ل + ١ = ٠

∴ ل٢ + ل = −١

∴ ل٢ + ل + ١/٤ = ١/٤ − ١ = −٣/٤

∴ ل + ١/٢ = ± √−٣ / ٢

ل = (−١ ± √−٣) / ٢

٢٠ ل٤ + ١ = ٠ طرفین کو ل٢ پر تقسیم کیا

∴ ل٢ + ١/ل٢ = ٠ طرفین پر ٢ زیادہ کیے

∴ ل٢ + ٢ + ١/ل٢ = ٢

∴ ل + ١/ل = ± √٢

∴ ل٢ ∓ √٢ ل = −١

∴ ل٢ ∓ √٢ ل + ١/٢ = ١/٢ − ١ = −١/٢

∴ ل ∓ ١/√٢ = ± √−١ / √٢

∴ ل = (± ١ ± √−١) / √٢

واضح ہو کہ جسطرح ١٩ اور ٢٠ مثالیں حل کی گئی ہیں اسیطرح
ل٥ − ١ = ٠ اور ل٥ + ١ = ٠ اور ل٦ + ١ = ٠ اور علی ہذا القیاس

اور مثالیں باسانی حل ہو سکتی ہیں

۲۱

$(\text{لا}-\text{ط})\sqrt{\text{ص}} = \text{ص}(\sqrt{\text{لا}}-\sqrt{\text{ص}})(\text{لا}+\text{ط}) - \sqrt{\text{لا}}$

$\therefore \sqrt{\text{لا}}\,\text{لا} - \text{ط}\sqrt{\text{لا}} - \text{لا}\sqrt{\text{ص}} - \text{ط}\sqrt{\text{ص}} = \text{ص}(\sqrt{\text{لا}}-\sqrt{\text{ص}})$

$\therefore \text{ط}(\sqrt{\text{لا}}+\sqrt{\text{ص}}) = (\text{لا}-\text{ص})(\sqrt{\text{لا}}-\sqrt{\text{ص}})$

$= (\sqrt{\text{لا}}+\sqrt{\text{ص}})(\sqrt{\text{لا}}-\sqrt{\text{ص}})^2$

اور بسبب مشترک ہونے کے

$\sqrt{\text{لا}}+\sqrt{\text{ص}} = \dots \therefore \sqrt{\text{ص}} = \sqrt{\text{لا}} \therefore \text{لا} = \text{ص}$

اور بعد تقسیم کرنیکے جزو مشترک پر

$\sqrt{\text{لا}}-\sqrt{\text{ص}} = \sqrt{\text{ط}} \therefore \text{لا} = (\sqrt{\text{ط}}+\sqrt{\text{ص}})^2$

۲۲

$\text{ط}+\text{لا}+\sqrt{\text{ط}^2+\text{ط لا}+\text{لا}^2} = \sqrt{\text{ط لا}-\text{لا}^2} + \sqrt{\text{لا}^2-\text{ط لا}-\text{ط}^2}$

$\text{ط}+\text{لا}-\sqrt{\text{ط}-\text{لا}^2} = \sqrt{\text{ط}^2-\text{ط لا}-\text{لا}^2} - \sqrt{\text{ط}^2+\text{ط لا}+\text{لا}^2}$

$= \sqrt{\text{ط}^2+\text{ط لا}}\,(\sqrt{\text{ط}-\text{لا}} - \sqrt{\text{لا}})$

$\therefore \text{ط}^2+\text{ط لا}\,2-2(\text{ط}+\text{لا})\sqrt{\text{ط لا}-\text{لا}^2} =$

$(\text{ط}+\text{لا}2)(\text{ط}-2\sqrt{\text{ط لا}-\text{لا}^2})$

$\therefore 2\text{ط}\sqrt{\text{ط لا}-\text{لا}^2} = \text{ط}^2 - 2\text{ط لا}$

$\therefore 2\sqrt{\text{ط لا}-\text{لا}^2} = \text{ط}-2\text{لا}$

$\therefore 4\text{ط لا}-4\text{لا}^2 = \text{ط}^2 - 4\text{ط لا} + 4\text{لا}^2$

$\therefore 8\text{لا}^2 - 8\text{ط لا} = -\text{ط}^2$

$\therefore \text{لا}^2 - \text{ط لا} = -\frac{\text{ط}^2}{8}$ اور

$\text{لا}^2-\text{ط لا}+\frac{\text{ط}^2}{4} = \frac{\text{ط}^2}{4}-\frac{\text{ط}^2}{8} = \frac{2\text{ط}^2}{16}$

$\therefore \text{لا}-\frac{\text{ط}}{2} = \pm\frac{\text{ط}}{4}\sqrt{2}$

$\therefore \text{لا} = \frac{\text{ط}}{2}(1\pm\frac{1}{2}\sqrt{2})$

۲۳

$\text{ط}+(\text{ص}+\sqrt{\text{لا}})\sqrt{\text{لا}} = (\text{ص}-\sqrt{\text{لا}})\sqrt{2\text{ط لا}-\text{لا}^2}$ [illegible]

$\therefore \text{ط}+\text{لا}+\sqrt{2\text{ط لا}+\text{لا}^2} = \text{ص}(\sqrt{2\text{ط لا}+\text{لا}} - \sqrt{\text{لا}})$

$\therefore (\text{ط}+\text{لا}+\sqrt{2\text{ط لا}+\text{لا}^2})^2 = \text{ص}^2(2\text{ط}+2\text{لا}-2\sqrt{2\text{ط لا}+\text{لا}^2})$

$= 2\text{ص}^2(\text{ط}+\text{لا}-\sqrt{2\text{ط لا}+\text{لا}^2})$

$(\text{ط}+\text{لا}+\sqrt{2\text{ط لا}+\text{لا}^2})^3 = 2\text{ص}^2\big((\text{ط}+\text{لا})^2-(2\text{ط لا}+\text{لا}^2)\big)$

$= 2\text{ص}^2\text{ط}^2$

$\therefore \text{ط}+\text{لا}+\sqrt{2\text{ط لا}+\text{لا}^2} = \sqrt[3]{2\text{ص}^2\text{ط}^2}$

$\therefore \sqrt{2\text{ط لا}+\text{لا}^2} = \sqrt[3]{2\text{ص}^2\text{ط}^2} - (\text{ط}+\text{لا})$

$2\text{ط لا}+\text{لا}^2 = \text{ط ص}\sqrt[3]{4\text{ط ص}} - 2\sqrt[3]{2\text{ص}^2\text{ط}^2}(\text{ط}+\text{لا}) +$

$\text{ط}^2 + 2\text{ط لا} + \text{لا}^2$

$\therefore \text{ط}+\text{لا} = \frac{\text{ط}^2}{2\sqrt[3]{2\text{ط}^2\text{ص}^2}} + \frac{\text{ط ص}}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{\text{ط ص}}}$

$\therefore \text{لا} = \frac{\text{ط}}{2}\sqrt[3]{\frac{\text{ط}}{2\text{ص}^2}} + \frac{\text{ط ص}}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{\text{ط ص}}} - \text{ط}$

۲۴

$$\frac{۲ط\sqrt{۱+لا^۲}}{۱-لا+\sqrt{۱+لا^۲}} = ط+ص$$

$$\therefore\ ۲ط\sqrt{۱+لا^۲} = (ط+ص)(۱-لا) + (ط+ص)\sqrt{۱+لا^۲}$$

$$\therefore\ (ط-ص)\sqrt{۱+لا^۲} = (ط+ص)(۱-لا)$$

$$\therefore\ \frac{\sqrt{۱+لا^۲}}{۱-لا} = \frac{ط+ص}{ط-ص}$$

$$\therefore\ \frac{۱+لا^۲-۲لا}{۱+لا^۲} = \left(\frac{ط-ص}{ط+ص}\right)^۲$$

$$\therefore\ \frac{۲لا}{۱+لا^۲} = ۱-\frac{(ط-ص)^۲}{(ط+ص)^۲} = \frac{۴طص}{(ط+ص)^۲}$$

$$\frac{(۱+لا)^۲}{(۱-لا)^۲} = \frac{(ط+ص)^۲+۴طص}{(ط+ص)^۲-۴طص} = \frac{(ط-ص)^۲+۸طص}{(ط-ص)^۲}$$

$$\therefore\ \frac{۱+لا}{۱-لا} = \sqrt{۱+\frac{۸طص}{(ط-ص)^۲}}$$

$$لا = \frac{\sqrt{۱+\frac{۸طص}{(ط-ص)^۲}}-۱}{\sqrt{۱+\frac{۸طص}{(ط-ص)^۲}}+۱} = \frac{(ط-ص)^۲}{۸طص}\left\{\sqrt{۱+\frac{۸طص}{(ط-ص)^۲}}-۱\right\}^۲$$

۲۵

$$\sqrt{\frac{لا-\sqrt{لا^۲-ط^۲}}{لا+\sqrt{لا^۲-ط^۲}}} = \sqrt[۴]{لا^۲-ط^۲}\left\{\sqrt{لا^۲+طلا}-\sqrt{لا^۲-طلا}\right\}$$

$$\frac{\left(لا-\sqrt{لا^۲-ط^۲}\right)^۲}{لا+\sqrt{لا^۲-ط^۲}} = \sqrt{لا^۲-ط^۲}\times ۲لا\left(لا-\sqrt{لا^۲-ط^۲}\right)$$

$$\therefore\ \frac{لا-\sqrt{لا^۲-ط^۲}}{لا+\sqrt{لا^۲-ط^۲}} = ۲لا\sqrt{لا^۲-ط^۲}$$

شمار کنندہ میں کسر کو ضرب کیا

$$\therefore\ \frac{\left(لا-\sqrt{لا^۲-ط^۲}\right)^۲}{ط^۲} = ۲لا\sqrt{لا^۲-ط^۲}$$

$$\therefore\ ۲لا^۲-ط^۲-۲لا\sqrt{لا^۲-ط^۲} = ۲ط^۲لا\sqrt{لا^۲-ط^۲}$$

$$\therefore\ ۲لا^۲-ط^۲ = ۲لا(ط^۲+۱)\sqrt{لا^۲-ط^۲}$$

اب اگر طرفین کا مجذور کریں تو یہ حاصل ہوتا ہے

$$۴لا^۴-۴ط^۲لا^۲+ط^۴ =$$

$$۴ط^۴لا^۴+۸ط^۲لا^۴+۴لا^۴-۴ط^۶لا^۲-۸ط^۴لا^۲-۴ط^۲لا^۲$$

$$\therefore\ ط^۴ = ۴ط^۴لا^۴+۸ط^۲لا^۴-۴ط^۶لا^۲-۸ط^۴لا^۲$$

اب اگر طرفین پر عدد ۴ کا زیادہ کریں اور ۴ تیکم بھی کریں طرفین کو $ط^۲ = ۴(ط^۲+۲)لا^۴-۴ط^۲(ط^۲+۲)لا^۲$

$$\therefore\ لا^۴-ط^۲لا^۲ = \frac{ط^۲}{۴(ط^۲+۲)}$$

$$\therefore\ لا^۴-ط^۲لا^۲+\frac{ط^۴}{۴} = \frac{ط^۲}{۴}\times\frac{ط^۴+۲ط^۲+۱}{ط^۲+۲}$$

$$\therefore\ لا^۲ = \frac{ط}{۲}\left(ط\pm\frac{ط^۲+۱}{\sqrt{ط^۲+۲}}\right)$$

$$\therefore\ لا = \sqrt{\frac{ط}{۲}}\left(ط\pm\frac{ط^۲+۱}{\sqrt{ط^۲+۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

۲۶

$$لا-۲\sqrt{لا+۲} = ۱+\sqrt[۴]{لا^۳-۳لا+۲}$$

$$\therefore\ لا-۱-۲\sqrt{لا+۲} = (لا^۲-۲لا+۱)^{\frac{۱}{۴}}(لا+۲)^{\frac{۱}{۴}}$$

$$= \sqrt{لا-۱}\,(لا+۲)^{\frac{۱}{۴}}$$

$$\therefore لا-۱-{}^{۴}\sqrt{لا+۲}={}^{۴}\sqrt{لا+۲}\left({}^{۴}\sqrt{لا-۱}+{}^{۴}\sqrt{لا+۲}\right)$$

اب چونکہ طرفین مساوات $\left({}^{۴}\sqrt{لا-۱}+{}^{۴}\sqrt{لا+۲}\right)$ پر تقسیم ہو سکتی ہین اسواسطے موافق خواص مساوات کی یہہ دو مساواتین حاصل ہوتی ہین

$${}^{۴}\sqrt{لا-۱}+{}^{۴}\sqrt{لا+۲}=۰\quad\ldots\ldots(۱)$$

$${}^{۴}\sqrt{لا-۱}-{}^{۴}\sqrt{لا+۲}={}^{۴}\sqrt{لا+۲}\quad\ldots\ldots(۲)$$

اب ہم مساوات (۱) سے لا کی قیمت دریافت کرتی ہین

ظاہر ہے کہ ${}^{۴}\sqrt{لا-۱}=-{}^{۴}\sqrt{لا+۲}$

$$\therefore (لا-۱)^{۲}=لا+۲$$

$$\therefore لا^{۲}-۲لا+۱=لا+۲$$

$$\therefore لا^{۲}-۳لا+\left(\frac{۳}{۲}\right)^{۲}=\frac{۱۳}{۴}$$

$$\therefore لا-\frac{۳}{۲}=\pm\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$$

$$\therefore لا=\frac{۳\pm\sqrt{۱۳}}{۲}$$

اب مساوات (۲) کو حل کرین تو ظاہر ہے کہ

$${}^{۴}\sqrt{لا-۱}=۲\,{}^{۴}\sqrt{لا+۲}$$

$$\therefore لا^{۲}-۲لا+۱=۱۶لا+۳۲$$

$$\therefore لا^{۲}-۱۸لا+۸۱=۱۱۲$$

$$\therefore لا-۹=\pm۴\sqrt{۷}$$

$$\therefore لا=۹\pm۴\sqrt{۷}$$

۲۷

$$ط=\frac{۲لا^{۲}+۱+لا\,۲\sqrt{۴لا^{۲}+۳}}{۲لا^{۲}+۳+لا\,۲\sqrt{۴لا^{۲}+۳}}$$

طرفین کو عدد ۱ سے کم کیا

$$\therefore ۱-ط=\frac{۲}{۲لا^{۲}+۳+لا\,۲\sqrt{۴لا^{۲}+۳}}$$

$$\therefore ۲لا^{۲}+۳+لا\,۲\sqrt{۴لا^{۲}+۳}=\frac{۲}{۱-ط}$$

$$\therefore لا\,۲\sqrt{۴لا^{۲}+۳}=\frac{۲}{۱-ط}-۳-۲لا^{۲}=\frac{۳ط-۱}{۱-ط}-۲لا^{۲}$$

$$\therefore ۴لا^{۲}(۴لا^{۲}+۳)=\left(\frac{۳ط-۱}{۱-ط}\right)^{۲}-۴\times\frac{۳ط-۱}{۱-ط}لا^{۲}+۴لا^{۴}$$

$$\therefore لا^{۲}\left(۳+\frac{۱۲ط-۴}{۱-ط}\right)=\left(\frac{۳ط-۱}{۱-ط}\right)^{۲}$$

$$\therefore لا^{۲}(۹ط-۱)=\frac{(۳ط-۱)^{۲}}{۱-ط}$$

$$\therefore لا=\pm\frac{۳ط-۱}{\sqrt{(۹ط-۱)(۱-ط)}}$$

۲۸

$$=\frac{ط(۱-ط^{۲})+ط^{۲}لا-لا\sqrt{۲(۱-ط^{۲})}}{ط(۱-ط^{۲})+ط^{۲}لا+لا\sqrt{۲(۱-ط^{۲})}}$$

شمارکنندہ اور نسب نما کو نسب نما مین ضرب کیا اور اسیواسطے بعد ضرب کرنیکی شمار کنندہ یہہ ہوجاتا ہے

$$\left(ط(۱-ط^{۲})+ط^{۲}لا\right)^{۲}-لا^{۲}\,۲(۱-ط^{۲})$$

$$یا\ ط^{۲}(۱-ط^{۲})^{۲}+۲ط^{۳}(۱-ط^{۲})لا+ط^{۴}لا^{۲}-۲ط^{۲}لا^{۲}+لا^{۲}$$

$$یا\ ط^{۲}(۱-ط^{۲})^{۲}+۲ط^{۳}(۱-ط^{۲})لا+(۱-ط^{۲})^{۲}لا^{۲}$$

یا (ط^۲ - ۱) { (ط^۲ - ۱) ل + ل^۲ ط^۲ + (ط^۲ - ۱) ط^۲ }

یا (ط^۲ - ۱) { ل^۲ - ط^۲ - ل^۲ ط^۲ + ۲ ل ط^۳ + ط^۴ }

یا (ط^۲ - ۱) ((ل^۲ + ط^۲) - (ل + ط)^۲ ط^۲)

اور اسی طرح مساوات کا دوسری شکل میں تبدیل ہو سکتا ہے یعنی

(ط - ۱) (ل + ط)^۲ - ۲ ط ل = (ل + ط)^۲ - ۲ ل ط - ط^۲ (ل + ط)^۲

= ط^۲ + ل^۲ - ط^۲ (ل + ط)^۲

= - (ط^۲ (ل + ط)^۲ - (ل^۲ + ط^۲))

پس معلوم ہوا کہ (ط^۲ - ۱) / (نسب ۲)^۲ = - ۱

∴ نسب ۲ = ± √(۱ - ط^۲)

یعنی (ط^۲ - ۱) ط + ل ط^۲ + ل √(۲ ل ط - ۱) = ± √(۱ - ط^۲)

∴ (ط^۲ + √(۲ ط^۲ - ۱)) ل = ± √(۱ - ط^۲) (۱ + ط) √(۱ - ط^۲)

∴ ل = ± √(۱ - ط^۲) × (۱ ± ط √(۱ - ط^۲)) / (ط^۲ + √(۲ ط^۲ - ۱))

۲۹

ط = (۱ - ط ل + √(۱ + ل^۲) - ط √(۱ + ط^۲)) / (۱ - ط ل + √(۱ + ل^۲) - ل √(۱ + ط^۲))

کسر دور کی ∴ ۱ - ط ل + √(۱ + ط^۲) - ط √(۱ + ل^۲) =

ط (۱ - ط ل) + ط √(۱ + ل^۲) - ط ل √(۱ + ط^۲) ا سوا

اب تخفیف کی

(۱ - ط ل) (ط - ۱) + (۱ + ل ط) √(۱ + ط^۲) = ۲ ط √(۱ + ل^۲)

(۱ + ۲ ل ط - ل^۲ ط^۲) (ط - ۱)^۲ + ۲ (ط - ۱) √(۱ + ط^۲) (ط ل - ۱)^۲

+ (ط^۲ ل^۲ + ۲ ل ط + ۱) (۱ + ط^۲) = ۴ ط^۲ + ۴ ط^۲ ل^۲

∴ ۲ (ط^۲ ل^۲ + ۱) - (۱ + ط^۲) (ط ل - ۱)^۲ + ۲

۲ (ط - ۱) √(۱ + ط^۲) (ط^۲ ل^۲ - ۱) = ۴ ط^۲ + ۴ ط^۲ ل^۲

∴ (ط^۲ ل^۲ + ۱) (۱ + ط^۲) - ط (ط ل - ۱)^۲ + ۱

(ط - ۱) √(۱ + ط^۲) (ط^۲ ل^۲ - ۱) = ۲ ط^۲ + ۲ ط^۲ ل^۲

∴ (ط ل - ۱) + ط^۲ ل^۲ + ۱ + ط^۲ - ط (ط ل - ۱)^۲ +

(ط - ۱) √(۱ + ط^۲) (ط^۲ ل^۲ - ۱) = ۲ ط^۲ + ۲ ط^۲ ل^۲

∴ (ط^۲ - ۱) - (ل^۲ ط^۲ - ۱) - ط (ط ل - ۱)^۲ +

(ط - ۱) √(۱ + ط^۲) (ط^۲ ل^۲ - ۱) = ۰

∴ (ط^۲ - ۱) - (ط^۲ ل^۲ - ۱) - ط (ط ل - ۱)^۲ +

(ط - ۱) √(۱ + ط^۲) (ط^۲ ل^۲ - ۱) = چونکہ ط ل - ۱ مشترک ہے

∴ ط ل - ۱ = ۰ ∴ ل = ۱/ط اور بعد تقسیم کرنے کے ط ل - ۱ پر

(ط^۲ - ۱) - (ط ل + ۱) - ط (ط ل - ۱)^۲ + √(۱ + ط^۲) (ط - ۱) (ط ل + ۱) =

یا { ط^۲ - ۱ + (ط - ۱) √(۱ + ط^۲) - ط } ط ل =

- { ط^۲ - ۱ + (ط - ۱) √(۱ + ط^۲) + ط } اور اسی واسطے

- ط ل = (ط^۲ + ط - ۱ + (ط - ۱) √(۱ + ط^۲)) / (ط^۲ - ط - ۱ + (ط - ۱) √(۱ + ط^۲))

= ۱ + ۲ ط / (ط^۲ - ط - ۱ + (ط - ۱) √(۱ + ط^۲))

= ۱ + ۲ ط ((ط - ۱) √(۱ + ط^۲) - (ط^۲ - ط - ۱)) / ((ط - ۱)^۲ (۱ + ط^۲) - (ط^۲ - ط - ۱)^۲)

= ۱ + ۲ ط ((ط - ۱) √(۱ + ط^۲) - (ط^۲ - ط - ۱)) / (ط (۲ - ۳ ط))

∴ لا = ۲/(ط(۴-۳ط)) {ط - ۱ ± √(۱ - ط) √(۱ - ط - ۲ط^۲ ...)} - ۱/ط

۳۰ ۲لا √(۱ - لا^۲) = ط (۱ + لا^۲) مجذور کیا

∴ ۴لا^۲ - ۴لا^۴ = ط^۲ + ۲ط^۲لا^۲ + ط^۲لا^۴

طرفین کو ط^۲ لا^۲ پر تقسیم کیا

∴ ۴/(ط^۲ لا^۲) - ۴لا^۲/ط^۲ = ۱/لا^۲ + ۲ + لا^۲

یعنی ۴/ط^۲ (۱/لا^۲ - لا^۲) = (لا^۲ + ۱/لا^۲)^۲

∴ (لا^۲ + ۱/لا^۲)^۲ + ۴/ط^۲ (لا^۲ - ۱/لا^۲) = طرفین سے ۴ کم کیے

∴ (لا^۲ - ۱/لا^۲)^۲ + ۴/ط^۲ (لا^۲ - ۱/لا^۲) = -۴

∴ (لا^۲ - ۱/لا^۲)^۲ + ۴/ط^۲ (لا^۲ - ۱/لا^۲) + ۴/ط^۴ = ۴/ط^۴ - ۴

∴ لا^۲ - ۱/لا^۲ + ۲/ط^۲ = ± ۲/ط^۲ √(۱ - ط^۴)

∴ لا^۲ - ۱/لا^۲ = ۲/ط^۲ (∓۱ √(۱ - ط^۴)) = ۲ص فرض کیا

∴ لا^۴ - ۲ص لا^۲ = ۱

∴ لا^۴ - ۲ص لا^۲ + ص^۲ = ۱ + ص^۲

∴ لا^۲ = ص ± √(۱ + ص^۲)

∴ لا = ± √(ص ± √(۱ + ص^۲))

لیکن ص = - ۱/ط^۲ (۱ ∓ √(۱ - ط^۴)) اسیواسطے

۱ + ص^۲ = ۱ + ۱/ط^۴ (۲ - ط^۴ ∓ ۲√(۱ - ط^۴)) = ۲/ط^۴ (۱ ∓ √(۱ - ط^۴))

∴ لا = ± √(۱/ط ± √(۱ - ط^۲) ± √(۲(۱ ∓ √(۱ - ط^۴))))

۳۱ (لا - ۱/۳)^۲ - ۲۵/۹ = (۳لا^۲ + ۴/۹) / (۲(لا - ۱/۳) + √(لا(لا - ۸/۳)))

اس مساوات کی دوسری طرف کو (یعنی شمار کنندہ اور نسب نما کو) نسب نما میں ضرب کیا علامت بدلی کر جو علامت کہ جذر سے پہلی ہو

لا^۲ - ۲/۳ لا - ۲۴/۹ = (۳لا^۲ + ۴/۹)(۲(لا - ۱/۳) + √(لا(لا - ۸/۳))) / (۴(لا^۲ - ۲/۳ لا + ۱/۹) - لا^۲ + ۸لا/۳)

= شمار کنندہ / (۳لا^۲ + ۴/۹) = ۲(لا - ۱/۳) + √(لا(لا - ۸/۳))

∴ لا^۲ - ۸لا/۳ + √(لا^۲ - ۸لا/۳) = ۲

∴ لا^۲ - ۸لا/۳ + √(لا^۲ - ۸لا/۳) + ۱/۴ = ۹/۴

∴ √(لا^۲ - ۸لا/۳) = -۱/۲ ± ۳/۲ = ۱ یا -۲

اسیواسطے دو مساواتین حاصل ہوتی ہین

√(لا^۲ - ۸لا/۳) = ۱ .... (۱) اور √(لا^۲ - ۸لا/۳) = -۲ .... (۲)

اول مساوات سے قیمت لا کی اسطرح معلوم ہوتی ہے

لا^۲ - ۸لا/۳ = ۱ ∴ لا^۲ - ۸لا/۳ + ۱۶/۹ = ۲۵/۹

∴ لا - ۴/۳ = ± ۵/۳ ∴ لا = ۳ یا -۱/۳

اور دوسرے مساوات سے اسطرح لا^۲ - ۸لا/۳ = ۴

∴ لا^۲ - ۸لا/۳ + ۱۶/۹ = ۱۶/۹ + ۴ = ۵۲/۹

$$\therefore\ لا - \frac{۴}{۳} = \pm \frac{\sqrt{۵۲}}{۳} = \pm \frac{۲\sqrt{۱۳}}{۳}$$

$$\therefore\ لا = \frac{۴ \pm ۲\sqrt{۱۳}}{۳}$$

۳۲

$$\frac{(ن-۱)(ط^۴+ط^۲لا^۲+لا^۴)}{(ن+۱)(ط^۴-ط^۲لا^۲+لا^۴)} = (۲ - \frac{۱}{ن})\left(\frac{ط}{ط^۲-لا^۲}\ \frac{لا}{}\right)^۲$$

$$\frac{ط^۴+ط^۲لا^۲+لا^۴}{ط^۴-ط^۲لا^۲+لا^۴} = \left(\frac{ط^۲-لا^۲}{ط لا}\right)^۲ = \frac{۲ن-۱}{ن} \times \frac{ن+۱}{ن-۱}$$

$$\frac{\frac{ط^۲}{لا^۲}+۱+\frac{لا^۲}{ط^۲}}{\frac{ط^۲}{لا^۲}-۱+\frac{لا^۲}{ط^۲}} \left(\frac{ط}{لا} - \frac{لا}{ط}\right)^۲ = \frac{۲ن-۱}{ن} \times \frac{ن+۱}{ن-۱} = ص$$

$$\therefore\ \frac{\left(\frac{ط}{لا}-\frac{لا}{ط}\right)^۲+۳}{\left(\frac{ط}{لا}-\frac{لا}{ط}\right)^۲+۱} \left(\frac{ط}{لا}-\frac{لا}{ط}\right)^۲ = ص$$

اب فرض کرو کہ $\frac{ط}{لا} - \frac{لا}{ط} = ی$ اسیواسطے مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\frac{ی^۲+۳}{ی^۲+۱} \times ی^۲ = ص$$

$$\therefore\ ی^۴ + ۳ی^۲ = ص ی^۲ + ص$$

$$\therefore\ ی^۴ + (۳ - ص) ی^۲ = ص$$ اور یہہ مساوات درجہ دوم کی ہی اسسے قیمت ی کی معلوم ہو سکتی ہی اب فرض کرو کہ قیمت ی کی جو معلوم ہوئی س ہی اسیواسطے

$$\frac{ط}{لا} - \frac{لا}{ط} = س \quad \therefore\ ط^۲ - لا^۲ = ط س لا$$ اور اسسے قیمت لا کی دریافت ہو سکتی ہی

۳۳

$$\left(\frac{۳+۲لا}{۳-۲لا}\right)^{\frac{۱}{۳}} + \left(\frac{۳-۲لا}{۳+۲لا}\right)^{\frac{۱}{۳}} = \frac{۸}{۱۳} \times \frac{۹+۴لا^۲}{۹-۴لا^۲}$$

طرفین مساوات کا مکعب کیا اسیواسطے یہہ حاصل ہوا

$$\frac{۳+۲لا}{۳-۲لا} + \frac{۳-۲لا}{۳+۲لا} + ۳\ \frac{۸}{۱۳}\ \frac{۹+۴لا^۲}{۹-۴لا^۲} = \left(\frac{۸}{۱۳}\right)^۳ \left(\frac{۹+۴لا^۲}{۹-۴لا^۲}\right)^۳$$

$$= \frac{۲(۹+۴لا^۲) + \frac{۲۴}{۱۳}(۹+۴لا^۲)}{۹-۴لا^۲}$$

$$= \frac{۵۰}{۱۳}\ \frac{۹+۴لا^۲}{۹-۴لا^۲}$$

$$\therefore\ \left(\frac{۹+۴لا^۲}{۹-۴لا^۲}\right)^۲ = \frac{۵۰(۱۳)^۲}{(۸)^۳} = \frac{۲۵(۱۳)^۲}{۸^۲}$$

$$\therefore\ \frac{۹+۴لا^۲}{۹-۴لا^۲} = \frac{۵(۱۳)}{۸^۲} = \frac{۶۵}{۱۶}$$

$$\therefore\ \frac{۴لا^۲}{۹} = \frac{۸۱}{۴۹}\ \therefore\ \frac{۲لا}{۳} = \pm \frac{۹}{۷}$$

$$\therefore\ لا = \pm \frac{۲۷}{۱۴} = \pm ۱\frac{۱۳}{۱۴}$$

۳۴

$$ط^۲ لا^۲ - ص^۲ - ۲ لا (ط - س لا) \sqrt{\frac{ط^۲-ص^۲}{۱-لا^۲} + \left(\frac{ط - س لا}{لا}\right)^۲} = ۰$$ اس مساوات کو اسطرح لکھہ سکتے ہیں

$$\frac{۱+لا^۲}{۱-لا^۲} (ط - س لا)^۲ = -\left(ط^۲ لا^۲ (۱-لا^۲) - ص^۲ (۱-لا^۲) + (ط - س لا)^۲ (۱+لا^۲)\right)$$

$$= ۲ لا (ط - س لا) \sqrt{(ط^۲-ص^۲)(۱-لا^۲) + (ط - س لا)^۲}$$ اسیواسطے

$$(ط^۲-ص^۲)(۱-لا^۲) - (ط^۲ - ط^۲ لا^۲)(۱-لا^۲)$$

$$+ (ط - س لا)^۲ + (ط - س لا)^۲ لا^۲ -$$

۲ لا (ط − س لا) √ (ط۲ − ص۲)(۱ − لا۲) + (ط − س لا)۲ = ۰

∴ (ط۲ − ص۲)(۱ − لا۲) + (ط − س لا)۲ −

۲ لا (ط − س لا) √ (ط۲ − ص۲)(۱ − لا۲) + (ط − س لا)۲ +

لا۲ (ط − س لا)۲ = ط۲ (۱ − لا۲)۲ طرفین کا جذر لیا ∴

√ (ط۲ − ص۲)(۱ − لا۲) + (ط − س لا)۲ −

لا (ط − س لا) = ± ط (۱ − لا۲) جذر کو ایکطرف

رکھکر طرفین کا مجذور کیا اسیو اسطی

(ط۲ − ص۲)(۱ − لا۲) + (ط − س لا)۲ =

لا۲ (ط − س لا)۲ + ط۲ (۱ − لا۲)۲

± ۲ ط لا (ط − س لا)(۱ − لا۲) اور اسیواسطی

(ط۲ − ص۲)(۱ − لا۲) + (ط − س لا)۲ (۱ − لا۲) =

ط۲ (۱ − لا۲)۲ ± ۲ ط لا (ط − س لا)(۱ − لا۲)

طرفین کو (۱ − لا۲) پر تقسیم کیا اسیواسطی

(ط۲ − ص۲) + (ط − س لا)۲ = ط۲ (۱ − لا۲) ± ۲ ط لا (ط − س لا)

∴ (ط − س لا)۲ ∓ ۲ ط لا (ط − س لا) + ط۲ لا۲ = ص۲ جذر لیا

∴ ط − س لا ∓ ط لا = ± ص

∴ (س ± ط) لا = ط ∓ ص

∴ لا = (ط ∓ ص) / (س ± ط)

۳۵

(۱ − لا) √ ط (۱ + ۱/لا) − ۲ = √ لا + ۱ + √ ۲ لا − ۱

(۱ − لا) √ ط (۱ + ۱/لا) − ۲ − √ لا + ۱ = √ ۲ لا − ۱

طرفین کا مجذور کیا اسیواسطی

(۱ − لا)۲ (ط (۱ + ۱/لا) − ۲) −

۲ (۱ − لا) √ لا + ۱ √ ط (۱ + ۱/لا) − ۲ +

۱ + لا = ۲ لا − ۱ اور اس سے یہ مساوات حاصل ہوتی ہے

(۱ − لا)۲ (ط (۱ + ۱/لا) − ۲) −

۲ (۱ − لا) √ ۱ + لا √ ط (۱ + ۱/لا) − ۲ + ۲ (۱ − لا) = ۰

طرفین مساوات کو (۱ − لا) پر تقسیم کیا اسیواسطی

(۱ − لا) (ط ((۱ + لا)/لا) − ۲) −

۲ √ ۱ + لا √ ط (۱ + ۱/لا) − ۲ + ۲ = ۰

ط × (۱ − لا۲)/لا + ۲ لا − ۲ √ لا + ۱ √ ط (۱ + ۱/لا) − ۲ = ۰

∴ ط − (ط − ۲) لا − ۲ لا۲ √ لا + ۱ √ ط لا + (ط − ۲) لا۲ = ۰

طرفین پر ط لا زیادہ کیا

اسیواسطی ط لا + (ط − ۲) لا۲ + ۲ √ لا + ۱ √ ط لا + (ط − ۲) لا۲

= ط + ط لا = ط (۱ + لا) اسیواسطی عوض زیادہ کرنی لا + ۱ کے

ط لا + (ط − ۲) لا۲ + ۲ √ لا + ۱ √ ط لا + (ط − ۲) لا۲

+ ۱ + لا = (ط + ۱)(۱ + لا) طرفین کا جذر لیا اسیواسطے

√ ط لا + (ط − ۲) لا۲ + √ لا + ۱ = √ ط + ۱ √ ۱ + لا

√(ط لا + (ط − ۲) لا²) = (± √(ط + ۱) − ۱) √(۱ + لا) ∴

ط لا + (ط − ۲) لا² = (± √(ط + ۱) − ۱)² (۱ + لا) =

(± √(ط + ۱) − ۱)² + ۲ ط لا + ۲ (۱ ∓ √(ط + ۱)) لا اسیواسطی

(ط − ۲) لا² + ۲ (± √(ط + ۱) − ۱) لا = (± √(ط + ۱) − ۱)² ∴

لا² + ۲ لا (± √(ط + ۱) − ۱)/(ط − ۲) = ((± √(ط + ۱) − ۱)/(ط − ۲))² اسیواسطی

((± √(ط + ۱) − ۱)/(ط − ۲))² (۱ + ط − ۲) طرفین کا جذر لیا

لا + (± √(ط + ۱) − ۱)/(ط − ۲) = (± √(ط + ۱) − ۱)/(ط − ۲) (± √(ط − ۱)) ∴

لا = (± √(ط + ۱) − ۱)/(ط − ۲) × (± √(ط − ۱) − ۱)

= (± √(ط + ۱) − ۱)/(۱ − (ط − ۱)) (± √(ط − ۱) − ۱)

= (± √(ط + ۱) − ۱)(± √(ط − ۱) − ۱) / ((√(ط − ۱) − ۱)(√(ط − ۱) + ۱))

= (± √(ط + ۱) − ۱) / (√(ط − ۱) + ۱)

۳۶

لا − ی = ۸

لا⁴ − ی⁴ = ۱۴۵۶۰

فرض کرو کہ لا = د + ر

ی = د − ر

اسیواسطی لا − ی = ۲ ر = ۸ ∴ ر = ۴

اور لا² + ی² = (د + ۴)² + (د − ۴)² = ۲ د² + ۳۲

اور لا² − ی² = (د + ۴)² − (د − ۴)² = ۱۶ د

∴ (لا² + ی²)(لا² − ی²) = لا⁴ − ی⁴

= (۲ د² + ۳۲) × ۱۶ د

= ۱۴۵۶۰

∴ د³ + ۱۶ د = ۴۵۵ طرفین کو د مین ضرب کیا ∴

د⁴ + ۱۶ د² = ۴۵۵ د = ۶۵ × ۷ د

طرفین پر ۴۹ د² زیادہ کیے اسیواسطی

د⁴ + ۶۵ د² + (۶۵/۲)² = ۴۹ د² + ۶۵ × ۷ د + (۶۵/۲)²

∴ د² + ۶۵/۲ = ۷ د + ۶۵/۲

∴ د² = ۷ د ∴ د = ۷

∴ لا = د + ۴ = ۱۱

ی = د − ۴ = ۳

۳۷

لا (ص س − لا ی) = ی (لا ی − ط س) .... (۱)

لا ی (ط ی + ص لا − لا ی) = ط ص س (لا + ی − س) .... (۲)

مساوات (۱) سی یہہ مساوات حاصل ہوتی ہے

س (ص لا + ط ی) = لا ی (لا + ی) طرفین سی لا ی کم کیا

∴ س (ص لا + ط ی − لا ی) = لا ی (لا + ی − س) .... (۴)

مساوات (۲) کو مساوات (۳) پر تقسیم کیا ∴

لا ی / ص = ط ص س / لا ی ∴ لا² ی² = ط ص س²

∴ لا ی = س √(ط ص) اور مساوات (۱) سے ظاہر ہے کہ

لا / ی = (لا ی − ط س) / (ص س − لا ی) = (س √(ط ص) − ط س) / (ص س − س √(ط ص))

= (√(ط ص) − ط) / (ص − √(ط ص))

= √ط (√ص − √ط) / √ص (√ص − √ط)

= √(ط / ص)

∴ لا ی × لا / ی = س √(ط ص) √(ط / ص)

یعنے لا² = س ط

∴ لا = ± √(س ط) اور ی = ± √(ص س)

۳۸

لا³ + ی (لا ی − ۱) = ۰ .... (۱)

ی³ − لا (لا ی + ۱) = ۰ .... (۲)

مساوات (۱) سے لا⁴ + لا² ی² − لا ی = ۰

مساوات (۲) سے ی⁴ − لا² ی² − لا ی = ۰

اسیواسطے لا⁴ − ی⁴ + ۲ لا² ی² = ۰

اسیواسطے لا⁴ + ۲ لا² ی² + ی⁴ = ۲ ی⁴

اسیواسطے لا² + ی² = √۲ ی²

اسیواسطے لا² = (√۲ − ۱) ی²

اسیواسطے لا² / ی² = √۲ − ۱ .... (۵)

اسیواسطے لا / ی = √(√۲ − ۱)

اور پھر مساوات (۱) کو مساوات (۲) پر تقسیم کرنے سے

لا³ / ی³ = (ی / لا) · (۱ − لا ی) / (۱ + لا ی)

∴ (۱ − لا ی) / (۱ + لا ی) = لا⁴ / ی⁴ = ۳ − ۲√۲ بوسیلہ (۵) کے

∴ لا ی = (۲√۲ − ۲) / (۴ − ۲√۲) = ۱ / √۲

∴ لا ی × لا / ی = (۱ / √۲) √(√۲ − ۱)

یعنے لا² = √((√۲ − ۱) / ۲)

∴ لا = ⁴√((√۲ − ۱) / ۲) اور ی = لا / √(√۲ − ۱) = ۱ / ⁴√(۲) √(√۲ − ۱)

۳۹

لا ی = ط (لا + ی) .... (۱)

لا د = ص (لا + د) .... (۲)

ی د = س (ی + د) .... (۳)

مساوات (۱) سے (لا + ی) / لا ی = ۱ / ط

یعنے ۱ / لا + ۱ / ی = ۱ / ط

مساوات (۲) سے $\frac{1}{\text{ى}} + \frac{1}{\text{د}} = \frac{1}{\text{ص}}$

$\therefore \frac{1}{\text{ى}} - \frac{1}{\text{د}} = \frac{1}{\text{ط}} - \frac{1}{\text{ص}}$

مساوات (۳) سے $\frac{1}{\text{ى}} + \frac{1}{\text{د}} = \frac{1}{\text{س}}$

$\therefore \frac{۲}{\text{ى}} = \frac{1}{\text{ط}} + \frac{1}{\text{س}} - \frac{1}{\text{ص}}$

اور اسیطرح $\frac{۲}{\text{د}} = \frac{1}{\text{ص}} + \frac{1}{\text{س}} - \frac{1}{\text{ط}}$

اور $\frac{۲}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{ط}} + \frac{1}{\text{ص}} - \frac{1}{\text{س}}$

$\therefore \text{لا} = \frac{۲\,\text{ط ص س}}{\text{ط س} + \text{ص س} - \text{ط ص}}$

$\text{ى} = \frac{۲\,\text{ط ص س}}{\text{ط ص} + \text{ص س} - \text{ط س}}$

$\text{د} = \frac{۲\,\text{ط ص س}}{\text{ط ص} + \text{ط س} - \text{ص س}}$

۴۰

$\text{لا}\,(\text{لا} + \text{ى} + \text{د}) = \text{ط}^2 \quad \ldots\ldots (۱)$

$\text{ى}\,(\text{لا} + \text{ى} + \text{د}) = \text{ص}^2 \quad \ldots\ldots (۲)$

$\text{د}\,(\text{لا} + \text{ى} + \text{د}) = \text{س}^2 \quad \ldots\ldots (۳)$

سب مساواتون کو جمع کیا اسیواسطے

$(\text{لا} + \text{ى} + \text{د})(\text{لا} + \text{ى} + \text{د}) = \text{ط}^2 + \text{ص}^2 + \text{س}^2$

$\therefore \text{لا} + \text{ى} + \text{د} = \pm\sqrt{\text{ط}^2 + \text{ص}^2 + \text{س}^2}$

مساوات (۱) سے $\text{لا} = \frac{\text{ط}^2}{\pm\sqrt{\text{ط}^2 + \text{ص}^2 + \text{س}^2}}$

مساوات (۲) سے $\text{ى} = \frac{\text{ص}^2}{\pm\sqrt{\text{ط}^2 + \text{ص}^2 + \text{س}^2}}$

مساوات (۳) سے $\text{د} = \frac{\text{س}^2}{\pm\sqrt{\text{ط}^2 + \text{ص}^2 + \text{س}^2}}$

۴۱

$\text{لا}\,(\text{ى} + \text{د})^2 = ۱ + \text{ط}^3 \quad \ldots\ldots (۱)$

$\text{لا} + \text{ى} = \frac{۳}{۲} + \text{د} \quad \ldots\ldots (۲)$

$\text{ى د} = \frac{۳}{۱۶} \quad \ldots\ldots (۳)$

مساوات (۱) سے $(\text{ى} + \text{د})^2 = \frac{۱ + \text{ط}^3}{\text{لا}}$

$\therefore (\text{ى} - \text{د})^2 = \frac{۱ + \text{ط}^3}{\text{لا}} - ۴\,\text{ى د} = \frac{۱ + \text{ط}^3}{\text{لا}} - \frac{۳}{۴}$

اور مساوات (۲) سے $(\text{ى} - \text{د})^2 = \left(\frac{۳}{۲} - \text{لا}\right)^2$

$\therefore \frac{۱ + \text{ط}^3}{\text{لا}} - \frac{۳}{۴} = \frac{۹}{۴} - ۳\,\text{لا} + \text{لا}^2$

$\therefore \frac{۱ + \text{ط}^3}{\text{لا}} = \text{لا}^2 - ۳\,\text{لا} + ۳$

$\therefore ۱ + \text{ط}^3 = \text{لا}^3 - ۳\,\text{لا}^2 + ۳\,\text{لا}$

$\therefore \text{ط}^3 = \text{لا}^3 - ۳\,\text{لا}^2 + ۳\,\text{لا} - ۱$

$\therefore \text{ط} = \text{لا} - ۱$

$\therefore \text{لا} = \text{ط} + ۱$ جب یہہ قیمت مساوات (۱) مین لکھین

تو مساوات (۱) سے $(\text{ط} + ۱)(\text{ى} + \text{د})^2 = ۱ + \text{ط}^3$

$\therefore (\text{ى} + \text{د})^2 = \text{ط}^2 - \text{ط} + ۱$

$\therefore \text{ى} + \text{د} = \pm\sqrt{\text{ط}^2 - \text{ط} + ۱} = \pm\sqrt{(\text{ط} - ۱)^2 + \text{ط}}$

اور ی − د = ۱/۲ − ط بوسیلہ مساوات (۲) کے

$$\therefore\ \text{۲ی} = \tfrac{1}{2} - \text{ط} \pm \sqrt{(\text{ط}-1)^2 + \text{ط}}$$

$$\therefore\ \text{ی} = \tfrac{1}{4} - \tfrac{\text{ط}}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(\text{ط}-1)^2 + \text{ط}}$$

$$\text{اور د} = \tfrac{\text{ط}}{2} - \tfrac{1}{4} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(\text{ط}-1)^2 + \text{ط}}$$

۴۲

$$\text{لا}(\text{ی}+\text{د}) = \text{ط} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\text{ی}(\text{لا}+\text{د}) = \text{ص} \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\text{د}(\text{لا}+\text{ی}) = \text{س} \quad \ldots\ldots (3)$$

ان تینوں مساواتوں سے یہ تین مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

$$\text{لای} + \text{لاد} = \text{ط}$$

$$\text{لای} + \text{ید} = \text{ص}$$

$$\text{لاد} + \text{ید} = \text{س}$$

$$\therefore\ \text{۲ لای} + \text{لاد} + \text{ید} = \text{ط} + \text{ص}$$ اوپر دونوں مساواتوں کو جمع کیا

$$\therefore\ \text{۲ لای} = \text{ط} + \text{ص} - \text{س}$$

اسیطرح $\text{۲ ید} = \text{ص} + \text{س} - \text{ط}$

اور $\text{۲ لاد} = \text{ط} + \text{س} - \text{ص}$

$$\therefore\ \frac{\text{۲لای} \times \text{۲لاد}}{\text{۲ید}} = \text{۲لا}^2 = \frac{(\text{ط}+\text{ص}-\text{س})(\text{ط}+\text{س}-\text{ص})}{\text{ص}+\text{س}-\text{ط}}$$

$$\text{اور}\ \frac{\text{۲لای} \times \text{۲ید}}{\text{۲لاد}} = \text{۲ی}^2 = \frac{(\text{ط}+\text{ص}-\text{س})(\text{ص}+\text{س}-\text{ط})}{\text{ط}+\text{س}-\text{ص}}$$

$$\text{اور}\ \frac{\text{۲لاد} \times \text{۲ید}}{\text{۲لای}} = \text{۲د}^2 = \frac{(\text{ص}+\text{س}-\text{ط})(\text{ط}+\text{س}-\text{ص})}{\text{ط}+\text{ص}-\text{س}}$$

$$\therefore\ \text{لا} = \pm\sqrt{\frac{(\text{ط}+\text{ص}-\text{س})(\text{ط}+\text{س}-\text{ص})}{2(\text{ص}+\text{س}-\text{ط})}}$$

$$\text{ی} = \pm\sqrt{\frac{(\text{ط}+\text{ص}-\text{س})(\text{ص}+\text{س}-\text{ط})}{2(\text{ط}+\text{س}-\text{ص})}}$$

$$\text{د} = \pm\sqrt{\frac{(\text{ص}+\text{س}-\text{ط})(\text{ط}+\text{س}-\text{ص})}{2(\text{ط}+\text{ص}-\text{س})}}$$

۴۳

$$\text{لای} + \text{ن}(\text{لا}+\text{ی}) = \text{ط} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\text{لاد} + \text{ن}(\text{لا}+\text{د}) = \text{ص} \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\text{ید} + \text{ن}(\text{ی}+\text{د}) = \text{س} \quad \ldots\ldots (3)$$

(۱) سے $(\text{لا}+\text{ن})(\text{ی}+\text{ن}) = \text{ط} + \text{ن}^2$

(۲) سے $(\text{لا}+\text{ن})(\text{د}+\text{ن}) = \text{ص} + \text{ن}^2$

(۳) سے $(\text{ی}+\text{ن})(\text{د}+\text{ن}) = \text{س} + \text{ن}^2$

مساوات (۱) اور (۲) کو باہم ضرب کرکے (۳) پر تقسیم کیا

$$\frac{(\text{لا}+\text{ن})^2(\text{ی}+\text{ن})(\text{د}+\text{ن})}{(\text{ی}+\text{ن})(\text{د}+\text{ن})} = \frac{(\text{ط}+\text{ن}^2)(\text{ص}+\text{ن}^2)}{(\text{س}+\text{ن}^2)}$$

$$\therefore\ (\text{لا}+\text{ن})^2 = \frac{(\text{ط}+\text{ن}^2)(\text{ص}+\text{ن}^2)}{(\text{س}+\text{ن}^2)}$$

$$\therefore\ \text{لا}+\text{ن} = \pm\sqrt{\frac{(\text{ط}+\text{ن}^2)(\text{ص}+\text{ن}^2)}{(\text{س}+\text{ن}^2)}}$$

$$\therefore\ \text{لا} = \text{ن} \pm \sqrt{\frac{(\text{ط}+\text{ن}^2)(\text{ص}+\text{ن}^2)}{\text{س}+\text{ن}^2}}$$ اسیطرح

اب اگر مساواتیں (۱) اور (۳) کو باہم ضرب کرکے (۲) پر تقسیم کریں

تو

$$\text{د} = -\text{ن} \pm \sqrt{\frac{(\text{ط}+\text{ن}^2)(\text{س}+\text{ن}^2)}{\text{ص}+\text{ن}^2}}$$

اور اگر مساوات (۲) اور (۳) کو باہم ضرب کر کی (۱) پر تقسیم کرین تو

$$\text{د} = -\text{ن} \pm \sqrt{\frac{(\text{ص}+\text{ن}^2)(\text{س}+\text{ن}^2)}{\text{ط}+\text{ن}^2}}$$

۴۴

$$\text{لا}^{\text{ط}}\,\text{د}^{\text{ص}} = \text{ف} \;\ldots\ldots\ldots\; (۱)$$

$$\text{لا}^{\text{س}}\,\text{د}^{\text{ع}} = \text{ق} \;\ldots\ldots\ldots\; (۲)$$

مساوات (۱) کا ع مرتبہ کا صعود لیا اور (۲) کا ص مرتبہ کا صعود لیا ∴

$$\text{لا}^{\text{طع}}\,\text{د}^{\text{صع}} = \text{ف}^{\text{ع}}$$

$$\text{لا}^{\text{سص}}\,\text{د}^{\text{صع}} = \text{ق}^{\text{ص}}$$

$$\therefore \frac{\text{لا}^{\text{طع}}}{\text{لا}^{\text{سص}}} = \text{لا}^{\text{طع}-\text{سص}} = \frac{\text{ف}^{\text{ع}}}{\text{ق}^{\text{ص}}}$$

$$\therefore \text{لا} = \left(\frac{\text{ف}^{\text{ع}}}{\text{ق}^{\text{ص}}}\right)^{\frac{1}{\text{طع}-\text{سص}}}$$ اور اسیطرح $$\text{د} = \left(\frac{\text{ق}^{\text{ط}}}{\text{ف}^{\text{س}}}\right)^{\frac{1}{\text{طع}-\text{سص}}}$$

۴۵

$$\text{لا}^{\text{لا}+\text{د}} = \text{د}^{۴\text{ط}} \;\ldots\ldots\ldots\; (۱)$$

$$\text{د}^{\text{لا}+۱} = \text{لا}^{\text{ط}} \;\ldots\ldots\ldots\; (۲)$$

مساوات (۱) سے $\text{د} = \text{لا}^{\frac{\text{لا}+\text{د}}{۴\text{ط}}}$

مساوات (۲) سے $\text{د} = \text{لا}^{\frac{\text{ط}}{\text{لا}+\text{د}}}$

$$\therefore \text{لا}^{\frac{\text{ط}}{\text{لا}+\text{د}}} = \text{لا}^{\frac{\text{لا}+\text{د}}{۴\text{ط}}}$$

$$\therefore \frac{\text{ط}}{\text{لا}+\text{د}} = \frac{\text{لا}+\text{د}}{۴\text{ط}} \;\therefore (\text{لا}+\text{د})^2 = ۴\text{ط}^2$$

$$\therefore \text{لا}+\text{د} = ۲\text{ط} \;\ldots\ldots\ldots\; (۳)$$

∴ بوسیلہ مساوات (۱) $\text{لا}^{۲\text{ط}} = \text{د}^{۴\text{ط}}$

∴ $\text{لا} = \text{د}^2$ اور اسیواسطی بوسیلہ مساوات (۳) کے $\text{د}^2+\text{د} = ۲\text{ط}$ اور اس مساوات سی قیمت د کی یہہ نکلتی ہے

$$\text{د} = \tfrac{1}{2}\left(-۱ \pm \sqrt{۸\text{ط}+۱}\right)$$ اور اسیواسطے

$$\text{لا} = \tfrac{1}{2}\left(۴\text{ط}+۱ \mp \sqrt{۸\text{ط}+۱}\right)$$

۴۶

$$\frac{\sqrt{\text{د}^2+۱}+۱}{\text{د}} = \frac{\sqrt{\text{لا}+۹}+۳}{\sqrt{\text{لا}}} \;\ldots\; (۱)$$

$$\text{لا}(\text{د}+۱)^2 = ۳۶\left(\text{د}^3+\frac{۱۶}{۹}\right) \;\ldots\; (۲)$$

مساوات (۱) مین اول طرف کی شمار کنندہ اور نسب نما کو $\sqrt{\text{د}^2+۱}-۱$ مین ضرب کیا اور دوسری طرف کے شمار کنندہ اور نسب نما کو $\sqrt{\text{لا}+۹}-۳$ مین ضرب کیا تو یہہ مساوات حاصل ہوئی

$$\frac{\text{د}}{\sqrt{\text{د}^2+۱}-۱} = \frac{\sqrt{\text{لا}}}{\sqrt{\text{لا}+۹}-۳}$$ اور اس مساوات کو

$$\therefore \text{س}(\text{ص}\,\text{لا}+\text{ط}\,\text{ی}-\text{لا}\,\text{ی})=\text{لا}\,\text{ی}(\text{لا}+\text{ی}-\text{س}) \quad (۴)$$

مساوات (۲) کو مساوات (۴) پر تقسیم کیا ∴

$$\frac{\text{لا}\,\text{ی}}{\text{ص}}=\frac{\text{ط}\,\text{ص}\,\text{س}}{\text{لا}\,\text{ی}} \quad \therefore \text{لا}^۲\,\text{ی}^۲=\text{ط}\,\text{ص}\,\text{س}^۲$$

$\therefore \text{لا}\,\text{ی}=\text{س}\sqrt{\text{ط}\,\text{ص}}$ اور مساوات (۱) سے ظاہر ہے کہ

$$\frac{\text{لا}}{\text{ی}}=\frac{\text{لا}\,\text{ی}-\text{ط}\,\text{س}}{\text{ص}\,\text{س}-\text{لا}\,\text{ی}}=\frac{\text{س}\sqrt{\text{ط}\,\text{ص}}-\text{ط}\,\text{س}}{\text{ص}\,\text{س}-\text{س}\sqrt{\text{ط}\,\text{ص}}}$$

$$=\frac{\sqrt{\text{ط}\,\text{ص}}-\text{ط}}{\text{ص}-\sqrt{\text{ط}\,\text{ص}}}$$

$$=\frac{\sqrt{\text{ط}}\left(\sqrt{\text{ص}}-\sqrt{\text{ط}}\right)}{\sqrt{\text{ص}}\left(\sqrt{\text{ص}}-\sqrt{\text{ط}}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{\text{ط}}{\text{ص}}}$$

$$\therefore \text{لا}\,\text{ی}\times\frac{\text{لا}}{\text{ی}}=\text{س}\sqrt{\text{ط}\,\text{ص}}\sqrt{\frac{\text{ط}}{\text{ص}}}$$

یعنی $\text{لا}^۲=\text{س}\,\text{ط}$

$\therefore \text{لا}=\pm\sqrt{\text{س}\,\text{ط}}$ اور $\text{ی}=\pm\sqrt{\text{ص}\,\text{س}}$

۳۸

$$\text{لا}^۳+\text{ی}=(\text{لا}\,\text{ی}-۱) \quad \ldots\ldots (۱)$$

$$\text{ی}^۳-\text{لا}=(\text{لا}\,\text{ی}+۱) \quad \ldots\ldots (۲)$$

مساوات (۱) سے $\text{لا}^۴+\text{لا}^۲\,\text{ی}^۲-\text{لا}\,\text{ی}=۰$

مساوات (۲) سے $\text{ی}^۴-\text{لا}^۲\,\text{ی}^۲-\text{لا}\,\text{ی}=۰$

اسیواسطے $\text{لا}^۴-\text{ی}^۴+۲\,\text{لا}^۲\,\text{ی}^۲=۰$

اسیواسطے $\text{لا}^۴+۲\,\text{لا}^۲\,\text{ی}^۲+\text{ی}^۴=۲\,\text{ی}^۴$

اسیواسطے $\text{لا}^۲+\text{ی}^۲=\sqrt{۲}\,\text{ی}^۲$

اسیواسطے $\text{لا}^۲=(\sqrt{۲}-۱)\,\text{ی}^۲$

اسیواسطے $\frac{\text{لا}^۲}{\text{ی}^۲}=\sqrt{۲}-۱ \quad \ldots\ldots (۵)$

اسیواسطے $\frac{\text{لا}}{\text{ی}}=\sqrt{\sqrt{۲}-۱}$

اور پھر مساوات (۱) کو مساوات (۲) پر تقسیم کرنی سے

$$\frac{\text{لا}^۳}{\text{ی}^۳}=\frac{\text{ی}}{\text{لا}}\cdot\frac{\text{لا}\,\text{ی}-۱}{\text{لا}\,\text{ی}+۱}$$

$$\therefore \frac{\text{لا}\,\text{ی}-۱}{\text{لا}\,\text{ی}+۱}=\frac{\text{لا}^۴}{\text{ی}^۴}=۳-۲\sqrt{۲}$$ (۱) کے بوسیلہ

$$\therefore \text{لا}\,\text{ی}=\frac{۲\sqrt{۲}-۲}{۴-۲\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$\therefore \text{لا}\,\text{ی}\times\frac{\text{لا}}{\text{ی}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\sqrt{\sqrt{۲}-۱}$$

یعنی $\text{لا}^۲=\sqrt{\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲}}$

$$\therefore \text{لا}=\sqrt[۴]{\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲}} \quad \text{اور} \quad \text{ی}=\frac{\text{لا}}{\sqrt{\sqrt{۲}-۱}}=\frac{۱}{\sqrt[۴]{۲\sqrt{۲}-۲}}$$

۳۹

$$\text{لا}\,\text{ی}=\text{ط}\,(\text{لا}+\text{ی}) \quad \ldots\ldots (۱)$$

$$\text{لا}\,\text{د}=\text{ص}\,(\text{لا}+\text{د}) \quad \ldots\ldots (۲)$$

$$\text{ی}\,\text{د}=\text{س}\,(\text{ی}+\text{د}) \quad \ldots\ldots (۳)$$

مساوات (۱) سے $\frac{\text{لا}+\text{ی}}{\text{لا}\,\text{ی}}=\frac{۱}{\text{ط}}$

یعنی $\frac{۱}{\text{ی}}+\frac{۱}{\text{لا}}=\frac{۱}{\text{ط}}$

مساوات (۲) سی $\frac{1}{د}+\frac{1}{ل}=\frac{1}{ص}$

$\therefore \frac{1}{ی}-\frac{1}{د}=\frac{1}{ط}-\frac{1}{ص}$

مساوات (۳) سے $\frac{1}{ی}+\frac{1}{د}=\frac{1}{س}$

$\therefore \frac{2}{ی}=\frac{1}{ط}+\frac{1}{س}-\frac{1}{ص}$

اور اسیطرح $\frac{2}{د}=\frac{1}{ص}+\frac{1}{س}-\frac{1}{ط}$

اور $\frac{2}{ل}=\frac{1}{ط}+\frac{1}{ص}-\frac{1}{س}$

$$\therefore ل=\frac{2طصس}{طس+صس-طص}$$

$$ی=\frac{2طصس}{طص+صس-طس}$$

$$د=\frac{2طصس}{طص+طس-صس}$$

۴۰

$ل(ل+ی+د)=ط^2$ ...... (۱)

$ی(ل+ی+د)=ص^2$ ...... (۲)

$د(ل+ی+د)=س^2$ ...... (۳)

سب مساواتون کو جمع کیا اسیواسطی

$(ل+ی+د)(ل+ی+د)=ط^2+ص^2+س^2$

$\therefore ل+ی+د=\pm\sqrt{ط^2+ص^2+س^2}$

مساوات (۱) سے $ل=\frac{ط^2}{\pm\sqrt{ط^2+ص^2+س^2}}$

مساوات (۲) سے $ی=\frac{ص^2}{\pm\sqrt{ط^2+ص^2+س^2}}$

مساوات (۳) سے $د=\frac{س^2}{\pm\sqrt{ط^2+ص^2+س^2}}$

۴۱

$ل(ی+د)^2=1+ط^3$ .... (۱)

$ل+ی=\frac{3}{2}+د$ .... (۲)

$ی\,د=\frac{3}{16}$ .... (۳)

مساوات (۱) سے $(ی+د)^2=\frac{1+ط^3}{ل}$

$\therefore (ی-د)^2=\frac{1+ط^3}{ل}-4ید=\frac{1+ط^3}{ل}-\frac{3}{4}$

اور مساوات (۲) سے $(ی-د)^2=(\frac{3}{2}-ل)^2$

$\therefore \frac{1+ط^3}{ل}-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}-3ل+ل^2$

$\therefore \frac{1+ط^3}{ل}=ل^2-3ل+3$

$\therefore 1+ط^3=ل^3-3ل^2+3ل$

$\therefore ط^3=ل^3-3ل^2+3ل-1$

$\therefore ط=ل-1$

$\therefore ل=ط+1$ اب یہہ قیمت مساوات (۱) مین لکہیو

تو مساوات (۱) سی $(ط+1)(ی+د)^2=1+ط^3$

$\therefore (ی+د)^2=ط^2-ط+1$

$\therefore ی+د=\pm\sqrt{ط^2-ط+1}=\pm\sqrt{(ط-1)^2+ط}$

اور ی - د = $\frac{۱}{۲}$ - ط بوسیلہ مساوات (۲) کے

$$\therefore ۲ی = \frac{۱}{۲} - ط \pm \sqrt{(ط-۱)^{۲} + ط}$$

$$\therefore ی = \frac{۱}{۴} - \frac{ط}{۲} \pm \frac{۱}{۲}\sqrt{(ط-۱)^{۲} + ط}$$

$$\text{اور } د = \frac{ط}{۲} - \frac{۱}{۴} \pm \frac{۱}{۲}\sqrt{(ط-۱)^{۲} + ط}$$

۴۲

$$ل(ی+د) = ط \;\ldots\ldots (۱)$$

$$ی(ل+د) = ص \;\ldots\ldots (۲)$$

$$د(ل+ی) = س \;\ldots\ldots (۳)$$

ان تینوں مساواتوں سے یہ تین مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

$$لی + لد = ط$$

$$لی + ید = ص$$

$$لد + ید = س$$

$$\therefore ۲لی + لد + ید = ط + ص$$ اور دونو مساواتونکو جمع کیا

$$\therefore ۲لی = ط + ص - س$$

اسیطرح $۲ید = ص + س - ط$

اور $۲لد = ط + س - ص$

$$\therefore \frac{۲لی \times ۲لد}{۲ید} = ۲ل^{۲} = \frac{(ط+ص-س)(ط+س-ص)}{ص+س-ط}$$

$$\text{اور } \frac{۲لی \times ۲ید}{۲لد} = ۲ی^{۲} = \frac{(ط+ص-س)(ص+س-ط)}{ط+س-ص}$$

$$\text{اور } \frac{۲ید \times ۲لد}{۲لی} = ۲د^{۲} = \frac{(ص+س-ط)(ط+س-ص)}{ط+ص-س}$$

$$\therefore ل = \pm\sqrt{\frac{(ط+ص-س)(ط+س-ص)}{۲(ص+س-ط)}}$$

$$ی = \pm\sqrt{\frac{(ط+ص-س)(ص+س-ط)}{۲(ط+س-ص)}}$$

$$د = \pm\sqrt{\frac{(ص+س-ط)(ط+س-ص)}{۲(ط+ص-س)}}$$

۴۳

$$لی + ن(ل+ی) = ط \;\ldots\ldots (۱)$$

$$لد + ن(ل+د) = ص \;\ldots\ldots (۲)$$

$$ید + ن(ی+د) = س \;\ldots\ldots (۳)$$

(۱) سے $(ل+ن)(ی+ن) = ط + ن^{۲}$

(۲) سے $(ل+ن)(د+ن) = ص + ن^{۲}$

(۳) سے $(ی+ن)(د+ن) = س + ن^{۲}$

مساوات (۱) اور (۲) کو باہم ضرب کرکی (۳) پر تقسیم کیا

$$\frac{(ل+ن)^{۲}(ی+ن)(د+ن)}{(ی+ن)(د+ن)} = \frac{(ط+ن^{۲})(ص+ن^{۲})}{(س+ن^{۲})}$$

$$\therefore (ل+ن)^{۲} = \frac{(ط+ن^{۲})(ص+ن^{۲})}{(س+ن^{۲})}$$

$$\therefore ل+ن = \pm\sqrt{\frac{(ط+ن^{۲})(ص+ن^{۲})}{(س+ن^{۲})}}$$

$$\therefore ل = ن \pm \sqrt{\frac{(ط+ن^{۲})(ص+ن^{۲})}{س+ن^{۲}}}$$ اسیطرح

اب اگر مساوات (۱) اور (۳) کو باہم ضرب کرکے (۲) پر تقسیم کریں

تو

$$د = -ن \pm \sqrt{\frac{(ط+ن^2)(س+ن^2)}{ص+ن^2}}$$

اور اگر مساوات (۲) اور (۳) کو باہم ضرب کر کی (۱) پر تقسیم کریں تو

$$د = -ن \pm \sqrt{\frac{(ص+ن^2)(س+ن^2)}{ط+ن^2}}$$

۴۴

$$ل^{ط} د^{ص} = ف \ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$ل^{س} د^{ع} = ق \ldots\ldots\ldots (۲)$$

مساوات (۱) کا ع مرتبہ کا صعود لیا اور (۲) کا ص مرتبہ کا صعود لیا ∴

$$ل^{طع} د^{صع} = ف^{ع}$$

$$ل^{سص} د^{صع} = ق^{ص}$$

$$∴ \frac{ل^{طع}}{ل^{سص}} = ل^{طع - سص} = \frac{ف^{ع}}{ق^{ص}}$$

$$∴ ل = \left(\frac{ف^{ع}}{ق^{ص}}\right)^{\frac{1}{طع - سص}}$$ اور اسیطرح $$د = \left(\frac{ق^{ط}}{ف^{س}}\right)^{\frac{1}{طع - سص}}$$

۴۵

$$ل^{ل+د} = د^{۴ط} \ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$د^{ل+د} = ل^{ط} \ldots\ldots\ldots (۲)$$

مساوات (۱) سے $د = ل^{\frac{ل+د}{۴ط}}$

مساوات (۲) سے $د = ل^{\frac{ط}{ل+د}}$

$$∴ ل^{\frac{ط}{ل+د}} = ل^{\frac{ل+د}{۴ط}}$$

$$∴ \frac{ط}{ل+د} = \frac{ل+د}{۴ط} \quad ∴ (ل+د)^2 = ۴ط^2$$

$$∴ ل+د = ۲ط \ldots\ldots\ldots (۳)$$

∴ بوسیلہ مساوات (۱) $ل^{۲ط} = د^{۴ط}$

∴ $ل = د^2$ اور اسیواسطی بوسیلہ مساوات (۳) کے $د^2 + د = ۲ط$ اور اس مساوات سی قیمت د کی یہہ نکلتی ہے

$$د = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{۸ط+1}\right)$$ اور اسیواسطے

$$ل = \frac{1}{2}\left(۴ط+1 \mp \sqrt{۸ط+1}\right)$$

۴۶

$$\frac{\sqrt{د^2+1}+1}{د} = \frac{\sqrt{ل+۹}+۳}{\sqrt{ل}} \ldots (۱)$$

$$ل(د+1)^2 = ۳۶\left(د^2 + \frac{۱۶}{۹}\right) \ldots (۲)$$

مساوات (۱) مین اول طرف کی شمار کنندہ اور نسب نما کو $\sqrt{د^2+1}-1$ مین ضرب کیا اور دوسری طرف کے شمار کنندہ اور نسب نما کو $\sqrt{ل+۹}-۳$ مین ضرب کیا تو یہہ مساوات حاصل ہوئی

$$\frac{د}{\sqrt{د^2+1}-1} = \frac{\sqrt{ل}}{\sqrt{ل+۹}-۳}$$ اور اس مساوات کو

مساوات (۱) مین ضرب کیا تو یہہ مساوات حاصل ہوئے

√(۲+۱+۱ یٔ) / √(یٔ+۱−۱) = √(لا+۹+۳) / (√(لا+۹) − ۳) اس سے موافق تناسب

کے یہہ حاصل ہوتا ہی

√(یٔ+۱) = √(لا+۹) / ۳

∴ یٔ+۱ = (لا+۹) / ۹

∴ ۹ یٔ = لا .... (۳)

∴ بوسیلہ مساوات (۲) کی یہہ حاصل ہوتا ہی

۹ یٔ (یٔ+۲ ی+۱) = ۶ ۳ یٔ۳ + ۶۴

اور ۱۰۸ یٔ۳ = ۶ ۳ یٔ۳

بعد تفریق کے ۹ یٔ (یٔ − ۲ ی + ۱) = ۶۴

∴ ۳ ی (ی − ۱) = ± ۸

∴ یٔ − ی = ± ۸/۳

∴ یٔ − ی + ۱/۴ = ۱/۴ ± ۸/۳ = ۳۵/۱۲ یا − ۲۹/۱۲

∴ ی − ۱/۲ = ± ۱/۶ √۱۰۵

∴ ی = ۱/۶ (۳ ± √۱۰۵) اور بوسیلہ (۳) کے

لا = ۹ یٔ = ۳/۲ (۱۹ ± √۱۰۵)

۴۷

√(۲لا + ۲) √(لا۲ − یٔ) = ۱۴/ی (√((لا+ی)/۲) + √((لا−ی)/۲))

اور ((لا+ی)/۲)^(۳/۲) + ((لا−ی)/۲)^(۳/۲) = ۹

فرض کرو کہ (لا+ی)/۲ = ر اور (لا−ی)/۲ = د

∴ ۲ لا = ۲ (ر + د)

اور ی = ر − د اور بوسیلہ ضرب کرنی ان مساواتون مفروضہ کے لا۲ − یٔ = ۴ ر د اگر یہہ قیمتین مساوات (۱) مین لکھین تو

۲ (ر + د) + ۲ √(ر د) = ۱۴/(ر−د) (ر^(۱/۲) + د^(۱/۲)) اور اسیواسطے

∴ ر + د + √(ر د) = ۷ / (ر^(۱/۲) − د^(۱/۲))

∴ ر^(۳/۲) − د^(۳/۲) = ۷ اور بوسیلہ مساوات (۲) کے

ر^(۳/۲) + د^(۳/۲) = ۹

∴ ۲ ر^(۳/۲) = ۱۶ ∴ ر = ۴

اور ۲ د^(۳/۲) = ۲ ∴ د = ۱

اور ∴ لا = ۵ اور ی = ۳

۴۸

ی/(۴لا) + ۲/۳ (ی − √(لا−۱)) / (یٔ − ۲ √(لا۲−۱)) = √(لا+۱) / لا (۱)

۱/۴ ی۴ = یٔ لا − ۱ .... (۲)

مساوات (۲) سے ی۴ − ۴ لا یٔ = ۴۰ −

طرفین پر ۴ لا۲ زیادہ کئے اسیواسطے

ی۴ − ۴ لا یٔ + ۴ لا۲ = ۴ لا۲ − ۴

∴ ی − ۲لا = ±۲√(لا² − ۱)

∴ ی = ۲لا ± ۲√(لا² − ۱)

= لا + ۱ ± ۲√(لا² − ۱) + لا − ۱

∴ ی = ±(√(لا + ۱) ± √(لا − ۱)) ....(۳)

جسوقت مثبت قیمت ی کی مساوات (۱) مین لکھی تو

√(لا+۱)/۴لا + √(لا−۱)/۴لا + ۲√(لا+۱)/۴لا = √(لا+۱)/لا

∴ ۳√(لا − ۱) = √(لا + ۱) مجذور کیا

∴ ۹لا − ۹ = لا + ۱

∴ ۸لا = ۱۰ اور لا = ۱۰/۸ = ۱ ۱/۴

اور ی = √(لا + ۱) + √(لا − ۱) = ۲

اگر مساوات (۳) سے منفی قیمت ی کی لکھی جاوے تو اور قیمتین لا اور ی کی دریافت ہوسکتی ہین

۹۴

لا² ی − ۴ = ۴ ی لا^(۱/۲) − (۱/۴) ی³ ......(۱)

لا^(۳/۲) − ۳ = لا^(۱/۲) ی^(۱/۲) (لا^(۱/۲) − ی^(۱/۲)) ....(۲)

مساوات (۱) سے ی (لا² + ی²/۴) = ۴ ی لا^(۱/۲) + ۴

اس مساوات کی طرفین پر لا ی² زیادہ کیا اسیواسطے

ی (لا² + لا ی + ی²/۴) = لا ی² + ۴ ی لا^(۱/۲) + ۴

∴ ی^(۱/۲) (لا + ی/۲) = ±(لا^(۱/۲) ی + ۲)

اگر اس مساوات مین علامت + کا استعمال کرین تو

لا ی^(۱/۲) − لا^(۱/۲) ی = ۲ − ی^(۳/۲)/۲ اور اسیواسطے

لا^(۱/۲) ی^(۱/۲) (لا^(۱/۲) − ی^(۱/۲)) = ۲ − ی^(۳/۲)/۲ اور بوسیلہ مساوات (۲) کے

لا^(۱/۲) ی^(۱/۲) (لا^(۱/۲) − ی^(۱/۲)) = لا^(۳/۲) − ۳

∴ لا^(۳/۲) − ۳ = ۲ − ی^(۳/۲)/۲

∴ ۲لا^(۳/۲) + ی^(۳/۲) = ۱۰ ....(۳)

اگر مساوات (۲) کو ۳ مین ضرب کرین تو

۳ لا^(۱/۲) ی^(۱/۲) (لا^(۱/۲) − ی^(۱/۲)) = ۳ لا^(۳/۲) − ۹

= لا^(۳/۲) − ی^(۳/۲) + ۱ بوسیلہ (۳) کے

∴ لا^(۳/۲) − ی^(۳/۲) − ۳ لا^(۱/۲) ی^(۱/۲) (لا^(۱/۲) − ی^(۱/۲)) = −۱

طرفین کا کعب لیا اسیواسطے

لا^(۱/۲) − ی^(۱/۲) = −۱ ∴ ی^(۱/۲) = لا^(۱/۲) + ۱ ....(۴)

یہہ قیمت ی^(۱/۲) کے مساوات (۳) مین لکھی اسیواسطے

۲لا^(۳/۲) + لا^(۳/۲) + ۳لا + ۳لا^(۱/۲) + ۱ = ۱۰

∴ ۳لا^(۳/۲) + ۳لا + ۳لا^(۱/۲) = ۹

∴ لا^(۳/۲) + لا + لا^(۱/۲) = ۳

∴ (لا^(۳/۲) − ۱) + (لا − ۱) + (لا^(۱/۲) − ۱) = ۰

∴ (لا^(۱/۲) − ۱){(لا + لا^(۱/۲) + ۱) + (لا^(۱/۲) + ۱) + ۱} = ۰

یعنی (لا^½ − ۱)(لا + ۲ لا^½ + ۳) = ۰

∴ لا^½ − ۱ = ۰ .... (۵)

اور لا + ۲ لا^½ + ۳ = ۰ ...... (۶)

مساوات (۵) سے لا = ۱ اور بوسیلہ (۴) د = ۴

اور مساوات (۶) سے لا + ۲ لا^½ = −۳

∴ لا + ۲ لا^½ + ۱ = −۲

∴ لا^½ + ۱ = ± √−۲

∴ لا^½ = −۱ ± √−۲

اور د = (لا^½ + ۱)^۲ = −۲

۵۰

ط (۱ − لا د) = لا √(۱ − د^۲) ..... (۱)

√لا (۱ − لا د) = د − لا .... (۲)

مساوات (۲) سے لا^½ − لا^(۳/۲) د = د − لا

∴ د = (لا + لا^½) / (۱ + لا^(۳/۲))

∴ ۱ − لا د = ۱ − (لا^۲ + لا^(۳/۲)) / (۱ + لا^(۳/۲)) = (۱ − لا^۲) / (۱ + لا^(۳/۲))

اور ۱ − د^۲ = ۱ − (لا^۲ + ۲ لا^(۳/۲) + لا) / (۱ + ۲ لا^(۳/۲) + لا^۳)

= (۱ − لا − لا^۲ + لا^۳) / (۱ + لا^(۳/۲))^۲ = (۱ + لا)(۱ − لا)^۲ / (۱ + لا^(۳/۲))^۲

مساوات (۱) میں یہہ قیمتیں لکھیں تو یہہ مساوات حاصل ہوتی ہے

ط (۱ − لا^۲) / (۱ + لا^(۳/۲)) = لا (۱ − لا) / (۱ + لا^(۳/۲)) √(۱ + لا)

چونکہ یہہ مساوات ۱ − لا پر اور (۱ − لا) / (۱ + لا^(۳/۲)) پر تقسیم ہوسکتی ہے

∴ ۱ − لا = ۰ اور ∴ لا = ۱

اور ط (۱ + لا) = لا √(۱ + لا) اور اس سے دو مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

√(۱ + لا) = ۰ .... اول

∴ ۱ + لا = ۰ ∴ لا = −۱

اور لا = ط √(۱ + لا) ...... دوسری

∴ لا^۲ = ط^۲ + ط^۲ لا

∴ لا^۲ − ط^۲ لا = ط^۲

∴ لا^۲ − ط^۲ لا + ط^۴/۴ = ط^۴/۴ + ط^۲

∴ لا = (ط^۲ ± ط √(ط^۲ + ۴)) / ۲

اور اسیطرح د کی قیمتیں یے حاصل ہوتی ہیں

د = ۱ یا −۱ یا ± (ط^۲ − ۱) / (ط^۲ + ۱)

یا ۲ط / √((ط^۲ + ۱ + ط √(ط^۲ + ۴))^۲ − ۱ − ۲ط)

۵۱

د^۴ = لا^۲ (ط د − ص لا) .... (۱)

$لا^۲ = ط لا − ص ی$ .... (۲)

مساوات (۱) سے $\frac{ی^۴}{لا^۲} = ط ی − ص لا$

مساوات (۲) سے $لا^۲ = ط لا − ص ی$

∴ تقسیم کے بعد $\frac{ی^۴}{لا^۴} = \frac{ط ی − ص لا}{ط لا − ص ی} = \frac{ط \frac{ی}{لا} − ص}{ط − ص \frac{ی}{لا}}$

فرض کرو کہ $\frac{ی}{لا} = د$ اور ∴ $\frac{ی^۴}{لا^۴} = د^۴$

∴ $د^۴ = \frac{ط د − ص}{ط − ص د}$ اور کسر دور کرنی سے

$ط د^۴ − ص د^۵ = ط د − ص$ اور اسی واسطی

$ط د (د^۳ − ۱) − ص (د^۵ − ۱) = ۰$

طرفین کو د − ۱ پر تقسیم کیا اسی واسطی

$ط د (د^۲ + د + ۱) − ص (د^۴ + د^۳ + د^۲ + د + ۱) = ۰$ (۳)

چونکہ د − ۱ پر تقسیم کیا ہی ∴ د − ۱ = ۰ ∴ د = ۱ اور مساوات (۳) سے

یہہ مساوات حاصل ہوتی ہی

$ص د^۴ + (ص − ط) د^۳ + (ص − ط) د^۲ + (ص − ط) د + ص = ۰$

طرفین کو $د^۲$ پر تقسیم کیا اسی واسطے

$ص (د^۲ + \frac{۱}{د^۲}) − (ط − ص)(د + \frac{۱}{د}) − (ط − ص) = ۰$

اول طرف پر ۲ص زیادہ بھی کئے اور کم بھی کئے اسی واسطے

$ص (د + \frac{۱}{د})^۲ − (ط − ص)(د + \frac{۱}{د}) − (ط + ص) = ۰$

∴ $(د + \frac{۱}{د})^۲ − \frac{ط − ص}{ص}(د + \frac{۱}{د}) = \frac{ط + ص}{ص}$

∴ $د + \frac{۱}{د} = \frac{ط − ص}{۲ص} ± \sqrt{\frac{(ط − ص)^۲}{۴ ص^۲} + \frac{ط + ص}{ص}}$

$= \frac{ط − ص ± \sqrt{ط^۲ + ۲ ط ص + ۵ ص^۲}}{۲ ص} = م$ تسہیلاً

∴ $د^۲ − م د = −۱$ اور اس کے حل کرنی سی ظاہر ہی کہ

$د = \frac{م}{۲} ± \sqrt{\frac{م^۲}{۴} − ۱}$ اور اب بوسیلہ $\frac{ی}{لا} = د$ کی

قیمتیں ی اور لا کے باسانی معلوم ہو سکتی ہیں

۵۴

$لا^۵ + ی^۵ = لا ی (لا + ی)^۳$ ......(۱)

$ی^۲ \sqrt{لا} = (لا + ی)^{\frac{۳}{۲}}$ ....(۲)

مساوات (۱) کو لا + ی پر تقسیم کیا اسی واسطے

$لا^۴ − لا^۳ ی + لا^۲ ی^۲ − لا ی^۳ + ی^۴ = لا ی (لا^۲ + ۲ لا ی + ی^۲)$

$= لا^۳ ی + ۲ لا^۲ ی^۲ + لا ی^۳$

∴ $لا^۴ − ۲ لا^۳ ی − لا^۲ ی^۲ − ۲ لا ی^۳ + ی^۴ = ۰$

طرفین کو $لا^۲ ی^۲$ پر تقسیم کیا اسی واسطے

$\frac{لا^۲}{ی^۲} − ۲ \frac{لا}{ی} − ۱ − ۲ \frac{ی}{لا} + \frac{ی^۲}{لا^۲} = ۰$

∴ $\frac{لا^۲}{ی^۲} + \frac{ی^۲}{لا^۲} − ۲(\frac{لا}{ی} + \frac{ی}{لا}) = ۱$

طرفین پر ۲ کا زیادہ کیا

∴ $(\frac{لا}{ی} + \frac{ی}{لا})^۲ − ۲(\frac{لا}{ی} + \frac{ی}{لا}) = ۳$

∴ $(\frac{لا}{ی} + \frac{ی}{لا})^۲ − ۲(\frac{لا}{ی} + \frac{ی}{لا}) + ۱ = ۴$

$\therefore$ $\frac{لا}{ى} + \frac{ى}{لا} = ۱ \pm ۲ = ۳$ یا -۱

اب اگر اول قیمت لیکر مساوات بالا کو $\frac{لا}{ى}$ میں ضرب کریں تو

$\frac{لا^۲}{ى^۲} + ۱ = ۳ \frac{لا}{ى}$

$\therefore$ $\frac{لا^۲}{ى^۲} - ۳\frac{لا}{ى} + \frac{۹}{۴} = \frac{۹}{۴} - ۱ = \frac{۵}{۴}$

$\therefore$ $\frac{لا}{ى} - \frac{۳}{۲} = \pm \frac{\sqrt{۵}}{۲}$

$\therefore$ $\frac{لا}{ى} = \frac{۳ \pm \sqrt{۵}}{۲}$

اور مساوات (۲) مجذور سی $لا^۲ ى^۲ = (لا + ى)^۲$ کے

$\therefore$ $ى^۳ \left(\frac{لا}{ى} + ۱\right)^۳ = ى^۲ \times \frac{۳ \pm \sqrt{۵}}{۲}$

$= ى^۳ \left(\frac{۵ \pm \sqrt{۵}}{۲}\right)^۳$

$\therefore$ $ى^۳ = \frac{(۵ \pm \sqrt{۵})^۳}{۴(۳ \pm \sqrt{۵})} = \frac{۵۰ \pm ۲۰\sqrt{۵}}{۳ \pm \sqrt{۵}}$

$= \frac{۵۰ \pm ۱۰\sqrt{۵}}{۴}$

$\therefore$ $ى = \frac{۵}{۲}\sqrt{۲ + \frac{۲}{۵}\sqrt{۵}}$ اور

$لا = \sqrt{\frac{۵۰ \pm ۲۰\sqrt{۵}}{۳ \pm \sqrt{۵}}} = \frac{۵}{۲}\sqrt{۱۰ \pm \frac{۲۲}{۵}\sqrt{۵}}$

۵۳

$(لا^۲ + ۱)\, ى = (ى^۲ + ۱)\, لا^۲$ ......(۱)

$(ى^۶ + ۱)\, لا = ۹\, (لا^۲ + ۱)\, ى^۳$ ......(۲)

مساوات (۱) سی $\left(لا + \frac{۱}{لا}\right) ى = ى^۲ + ۱$

$\therefore$ $لا + \frac{۱}{لا} = ى + \frac{۱}{ى}$ ......(۳)

مساوات (۲) سی $ى^۳ + \frac{۱}{ى^۳} = ۹\left(لا + \frac{۱}{لا}\right)$

یعنی $\frac{۱}{۳}\left(ى^۳ + \frac{۱}{ى^۳}\right) = ۳\left(لا + \frac{۱}{لا}\right)$

اس مساوات پر مساوات (۳) کو جمع کیا اسیواسطی

$\frac{۱}{۳}\left(ى^۳ + \frac{۱}{ى^۳}\right) + ى + \frac{۱}{ى} = لا^۳ + ۳\left(لا + \frac{۱}{لا}\right) + \frac{۱}{لا^۳}$

$= \left(لا + \frac{۱}{لا}\right)^۳$

$\therefore$ $ى^۳ + \frac{۱}{ى^۳} + ۳\left(ى + \frac{۱}{ى}\right) = ۳\left(لا + \frac{۱}{لا}\right)^۳$

یعنی $ى + \frac{۱}{ى} = \left(لا + \frac{۱}{لا}\right)\sqrt[۳]{۳}$

اور $لا^۲ + \frac{۱}{لا^۲} = \left(لا + \frac{۱}{لا}\right)\sqrt[۳]{۳}$ بوسیلہ مساوات (۳) کے

اور یہہ مساوات $\left(لا + \frac{۱}{لا}\right)$ پر تقسیم ہوسکتی ہی اسیواسطے

$لا + \frac{۱}{لا} = ۰$ $\therefore$ $لا^۲ = -۱$ اور یہہ قیمت غیر ممکن ہی

اور بعد تقسیم کرنی کے $\left(لا + \frac{۱}{لا}\right)$ پر یہہ حاصل ہوتا ہے

$لا^۲ - ۱ + \frac{۱}{لا^۲} = \sqrt[۳]{۳}$ عدد ۳ کا طرفین پر زیادہ کیا

$\therefore$ $لا^۲ + ۲ + \frac{۱}{لا^۲} = \sqrt[۳]{۳} + ۳$

$\therefore$ $لا + \frac{۱}{لا} = \sqrt{\sqrt[۳]{۳} + ۳}$

اور $لا - \frac{۱}{لا} = \sqrt{\sqrt[۳]{۳} - ۱}$ عدد ۴ کا کم کرنی سے

$\therefore$ $لا = \frac{۱}{۲}\left(\sqrt{\sqrt[۳]{۳} + ۳} + \sqrt{\sqrt[۳]{۳} - ۱}\right)$

اور $ى + \frac{۱}{ى} = \left(لا + \frac{۱}{لا}\right)\sqrt[۳]{۳}$

$= \sqrt[۳]{۳}\sqrt{\sqrt[۳]{۳} + ۳}$

$\therefore$ $ى = \frac{۱}{۲}\left(\sqrt[۳]{۳}\sqrt{\sqrt[۳]{۳} + ۳} \pm \sqrt{\sqrt[۳]{۹} ... - ۱}\right)$

۵۴

$ى + ۲\sqrt[۳]{ى}\left(\sqrt[۳]{ط + ص لا} - \sqrt[۳]{ى}\right) = \sqrt[۳]{ط + ص لا = ۲ط}$

[illegible]

مساوات (۱) سے یہہ مساوات حاصل ہوتی ہی جسکا کعب نکل سکتا ہے

[illegible]

طرفین کا کعب لیا اسیواسطی

[illegible]

جسوقت مساوات (۳) اور (۴) کو مساوات (۲) مین لکھا تو

[illegible]

اور ی = [illegible]

۵۵

[illegible] ... (۱)

[illegible] ... (۲)

مساوات (۱) سے یہہ مساوات حاصل ہوتی ہی

[illegible] اور اسیواسطے

[illegible]

اسیواسطے [illegible]

اور اسیواسطے [illegible] ... (۳)

اسیواسطے [illegible]

جذر لیا

[illegible] ... (۳)

اور مساوات (۱) سے [illegible]

اور اس مساوات کو [illegible] مین ضرب کیا اسیواسطے

[illegible]

طرفین مساوات پر [illegible] زیادہ کیے ∴

[illegible]

طرفین کا جذر لیا

[illegible] ... (۴)

مساوات (۳) سے ∴ [illegible] ایسلیے

∴ [illegible] ∴ لا = ۲

اور جب یہہ قیمت لا کی مساوات (۴) مین لکھی تو

۳ − ۴ی = (۲ی + ۱) جذر ۲/۳

∴ ۲ی = (۳ − جذر ۲/۳) / (۲ + جذر ۲/۳) = ۲ − ۳/۲ جذر ۲/۳

∴ ی = ۱ − ۱/۴ جذر ۶

۵۶

جذر (۲۷ی − ۱ / (لا^۳ + ۳ی^۲ − ۲لا ی^{۳/۲})) = ۳ جذر لا/ی ... (۱)

۳لا^۲ + ۲۴لا ی + ۱۶ی^۲ = ۴ جذر لا ی (۵لا + ۱۱ی) ... (۲)

مساوات (۲) کے مجذور کرنی سی اور اجزا ایک طرف لانی سے یہہ حاصل ہوتا ہے

۳لا^۲ − ۱۲۰لا^{۳/۲} ی^{۱/۲} + ۲۴۲لا ی − ۴۴لا^{۱/۲} ی^{۳/۲} + ۱۶ی^۲ = ۰

طرفین مساوات کو لا ی پر تقسیم کیا

۳ لا/ی − ۲۰ جذر لا/ی + ۲۴۲ − ۴۴ جذر ی/لا + ۱۶ ی/لا = ۰

فرض کرو کہ لا/ی = د^۲ اور اسیواسطے مساوات بالا اس صورت کی ہوجاتی

۳د^۲ − ۲۰د + ۲۴۲ − ۴۴/د + ۱۶/د^۲ = ۰

∴ ۳د^۴ − ۲۰د^۳ + ۲۴۲د^۲ − ۴۴د + ۱۶ = ۰

∴ (۳د − ۲)د^۳ − (۳د − ۲)۶د^۲ + (۳د − ۲)۱۰د −

− (۳د − ۲)۸ = ۰ اور اسیواسطے

(۳د − ۲)(د^۳ − ۶د^۲ + ۱۰د − ۸) = ۰

اور اس مساوات کی دو اجزا ضربی سے دو مساوات حاصل ہوتے ہین

۳د − ۲ = ۰ ∴ د = ۲/۳

اور د^۳ − ۶د^۲ + ۱۰د − ۸ = ۰

یعنے (د − ۴)(د^۲ − ۲د + ۲) = ۰ اور اسیواسطے

د − ۴ = ۰ ∴ د = ۴

اور د^۲ − ۲د + ۲ = ۰ ∴ (د − ۱)^۲ = −۱ اور یہہ قیمت غیر ممکن ہی

پس اگر اول قیمت د کی یعنے ۲/۳ مساوات (۱) مین لکھین تو

(۱ − ۷۲۹/۸ لا^{۳/۲}) / (لا^۳ + ۲۴۳/۱۶ لا − ۲۷/۴ لا^{۳/۲}) = ۸ کسر دور کرکے

۸لا^۳ − ۵۴لا^{۳/۲} + ۲۴۳/۲ لا − ۷۲۹/۸ لا^{۳/۲} = ۱ −

طرفین کا کعب لیا اسیواسطے

۲لا − ۹/۲ لا^{۱/۲} = −۱

∴ لا − ۹/۴ لا^{۱/۲} + ۸۱/۶۴ = ۴۹/۶۴

∴ لا^{۱/۲} = (۹ ± ۷)/۸ = ۲ یا ۱/۴

∴ لا = ۴ یا ۱/۱۶

۵۷

(لا^۴ − ۲لا^۲ + ۳) / (لا^۲ − ۱) = ی^۲(۱ − ۲ی^۲) ... (۱)

(۲لا^۲ − ۱)(۲ی^۲ − ۱) = ۳ ... (۲)

اگر لا^۲ کی جگہہ د لکھین اور ی^۲ کی جگہہ ر لکھین تو مساوات (۲) سے

۴دِر − ۲(د + ر) = ۲ ..... (ط)

اور مساوات (۱) سے ۴د۲ - ۲د - ۳ = ر(۲ر - ۱)(د - ۱)

= ر(۲در - د - ۲ر + ۱)

بوسیلہ (ط) کے ... = ر(۲ - ر)

= ۲ر - ر۲

∴ ۴د۲ - ۳ = ۲(د + ر) - ر۲

= ۴ در - ۲ - ر۲ بوسیلہ (ط) کے

∴ ۴د۲ - ۴ در + ر۲ = ۱

∴ ۲د - ر = ±۱

∴ ر = ۲د ∓ ۱ اس قیمت کو فوقانی علامت کی موافق مساوات (ط) مین لکھا تو

۴د۲ - ۲د - ۲د + ۲ + ۱ = ۱

∴ ۴د۲ = ۵د ∴ د = ۵/۴ یا ۰ قیمت اول

اب اگر ر کے قیمت تحتانی علامت کی موافق (ط) مین لکھین تو

۴د۲ + ۲د - د - ۲د - ۱ = ۱

∴ ۴د۲ - د = ۲

∴ ۴د۲ - د + (۱/۴)۲ = ۲ + ۱/۱۶ = ۳۳/۱۶

∴ ۲د - ۱/۴ = ± √۳۳/۴

∴ د = (۱ ± √۳۳)/۸ قیمت ثانی

اول قیمت د سے قیمت لا اور ر کے یہہ ہوتی ہے

لا = ± ۱/۲ √۵ یا ۱۰

اور ر = ± ۱/۲ √۶ یا ± √۱-

اور د کی دوسری قیمت سے لا اور ر کی قیمت یہہ ہوتی ہے

لا = ± ۱/۲ √((۳۳ √ + ۱)/۲)

ر = ± ۱/۲ √(۵ ± √۳۳)

ضمیمہ تمام ہوا

مثالیں جمع کی

(۱) جمع کرو ۳ لا۲ − ۵ لا + ۱ اور ۷ لا۲ + ۲ لا − ۴ اور − لا۲ − ۴ لا + ۱۳ جواب ۹ لا۲ − ۷ لا + ۱۰

(۲) جمع کرو ص − ۳ ط + ۳ س − ف اور ص + ۳ ط + ۳ س + ف جواب ۴ ص + ۶ س اور ص + س + ف − ط

(۳) جمع کرو ط + ص − س − ف اور ط − ص + ف + س اور ص + س + ف + ط جواب ۲ (ط + ص + س + ف)

(۴) جمع کرو لا۳ − ۲ ط لا۲ + ط۲ لا اور لا۳ + ۳ ط لا۲ اور ۲ ط۳ − ط لا۲ − ط۲ لا جواب ۲ لا۳ + ۲ ط۳

(۵) جمع کرو ط م − ص ن + ۳ لا ق اور ۲ ط م − ۳ ص ن − لا ق اور ط م + ۴ ص ن − لا ق جواب ۴ ط م + ۲ لا ق − لا ق

(۶) جمع کرو ط۲ − ۳ ط ص − $\frac{۱۴}{۱۲}$ ص۲ اور ۲ ص۲ − $\frac{۲}{۳}$ ص۳ + س۲ اور ط ص − $\frac{۱}{۳}$ ص۲ + ص۳ اور ۲ ط ص − $\frac{۱}{۳}$ ص۲ جواب ط۲ + ص۲ + س۲

(۷) جمع کرو ۲ (ط + ص) + س اور ۲ (ط + ص + س) + ف اور ۲ (ط + ص + س + ف) + ی

جواب ۶ (ط + ص) + ۵ س + ۳ ف + ی

(۸) جمع کرو (ط + ۸) لا۲ − ص ی۲ اور (ص − ۷) لا۲ − ۷ ی۲ جواب (ط + ص) لا۲ − (ص + ۷) ی۲

(۹) جمع کرو ط لا − ص ی اور لا + ی اور (ط − ۱) لا − (ص + ۱) ی جواب ۲ ط لا − ۲ ص ی

(۱۰) جمع کرو ۲ (ط + ص) لا ی۲ اور ۳ (ط − ۲ ص) لا ی۲ اور ۴ (۲ ط − ص) لا ی۲ جواب (۱۳ ط − ۸ ص) لا ی۲

(۱۱) جمع کرو ط لا ن + ۳ ص لا ن − ۹ ط لا ن + ۷ ص لا ن جواب (۱۰ ص − ۸ ط) لا ن

(۱۲) جمع کرو ۱ − (۱ − $\overline{۱ - لا}$) اور ۲ لا − (۳ − ۵ لا) اور ۲ − (− ۴ + ۵ لا) جواب لا + ۴

(۱۳) تفریق کرو ۶ ط − ص − س کی ط − ص + ۲ س کو جواب ۵ ط − ۳ س

(۱۴) تفریق کرو ۸ ط + لا − ۵ ص − ۵ س میں سی لا + ۲ ص − ۵ س کو جواب ۸ ط − ۷ ص

(۱۵) تفریق کرو ط + ص میں سے $\frac{ط}{۲}$ − $\frac{ص}{۲}$ کو جواب $\frac{ط}{۲}$ + $\frac{۳ ص}{۲}$

(۱۶) تفریق کرو $\frac{ط + ص}{۲}$ میں سے $\frac{ط - ص}{۲}$ جواب ص اور $\frac{ط + ص}{۲}$ میں سے ط − ص کو جواب $\frac{ط}{۲}$ + $\frac{۳ ص}{۲}$

(۱۷) تفریق کرو ۲ (ط + ص) − ۳ (س − ف) میں سے ط + ص − ۴ (س − ف) کو جواب ط + ص + س − ف

(۱۸) تفریق کرو (ط + ص) لا + (ص + س) ی میں سی (ط − ص) لا − (ص − س) ی جواب ۲ ص (لا + ی)

(۱۹) تفریق کرو (ط۲ + ص س) لا۲ − (ط۲ − ص۲) ص لا میں سے ص س لا۲ − (ط۲ − ص۲) ص لا جواب

ط۲ لا۲ + (ص۲ − س۲) ص لا

(۲۰) لا۳ − ط لا۲ + ص لا − س میں سے لا۳ − ک لا۲ + ف لا − ر جواب (ک − ط) لا۲ + (ص − ف) لا + (ر − س)

(۲۱) نکالو ط - لا - (لا - ۲ط) + ۲ط - لا مین سے ط - ۲لا - (۲ط - لا) + (لا - ۲ط) جواب ۸ط - ۳لا

اختصار کرو ائندہ مقدار کو

(۱) ط - {ص - (۲ص + لا)} + {ص - (لا - ۲ص)} جواب ط + ۴ص

(۲) ط + (ص + س) - (ط - س) + س - (ط + ص) جواب ۳س - ط

(۳) ط - {ط + ص - [ط + ص + س - (ط + ص + س + ف)]} جواب - ص - ف

(۴) ط + ص (۲ط - ۳ص) - (۵ط + ۷ص) - (- ۱۳ط + ۲ص) جواب ۷ط - ۵ص

مثالین ضرب کے

(۱) ضرب کرو ۴ط^{۲} - ۳طس + ۲ کو ۵طلا مین جواب ۲۰ط^{۳}لا - ۱۵ط^{۲}سلا + ۱۰طلا

(۲) ضرب کرو ۵ط - ۲ص + ۱۰ کو - ۹طص مین جواب - ۴۵ط^{۲}ص + ۱۸طص^{۲} - ۹۰طص

(۳) ضرب کرو ۲لا + ۳ی کو ۲لا - ۳ی مین جواب ۴لا^{۲} - ۹ی^{۲}

(۴) ضرب کرو ۴ط^{۲} - ۶ط + ۹ کو ۲ط + ۳ مین جواب ۸ط^{۳} + ۲۷

(۵) ط^{۴} + ط^{۳}ص + ط^{۲}ص^{۲} + طص^{۳} + ص^{۴} کو ط - ص جواب ط^{۵} - ص^{۵}

(۶) ضرب کرو ۲ط + ص س - ۲ص^{۲} کو ۲ط - ص س + ۲ص^{۲} مین جواب ۴ط^{۲} - ص^{۲}س^{۲} + ۴ص^{۳}س - ۴ص^{۴}

(۷) ضرب کرو ط^{۳} + ۳ط^{۲}ص + ۳طص^{۲} + ص^{۳} کو ط^{۳} - ۳ط^{۲}ص + ۳طص^{۲} - ص^{۳} مین جواب ط^{۶} - ۳ط^{۴}ص^{۲} + ۳ط^{۲}ص^{۴} - ص^{۶}

(۸) ضرب کرو ۴طص - ۲طس کو ۶طص + ۳طس مین جواب ۶ط^{۲} (۴ص^{۲} - س^{۲})

(۹) دریافت کرو حاصل ضرب ط - ص + س - ف اور ط + ص - س - ف کا جواب ط^{۲} - ص^{۲} - س^{۲} + ف^{۲} - ۲طف + ۲صس

(۱۰) ضرب کرو ط + ص لا کو ط + س لا مین جواب ط^{۲} + (طس + صط) لا + ص س لا^{۲}

(۱۱) ضرب کرو لا^{۳} - ط لا^{۲} + ص لا - س کو لا^{۲} - ف لا + ک مین جواب لا^{۵} - (ط + ف) لا^{۴} + (ص + طف + ک) لا^{۳} - (س + ف ص + ط ک) لا^{۲} + (ص ک + س ف) لا - ک س

(۱۲) دریافت کرو حاصل ضرب (لا - ط) (لا - ص) (لا - ف) کا جواب لا^{۳} - (ط + ص + ف) لا^{۲} + (طف + طص + صف) لا - طفص

(۱۳) دریافت کرو حاصل ضرب (لا - ۱۰) (لا + ۱) (لا + ۴) جواب لا^{۳} - ۵لا^{۲} - ۴۶لا - ۴۰

(۱۴) دریافت کرو حاصل ضرب (لا - ۵) (لا + ۶) (لا - ۷) (لا + ۸) = لا^{۴} + ۲لا^{۳} - ۸۵لا^{۲} - ۸۶لا + ۱۶۸۰

(۱۵) دریافت کرو حاصل ضرب لا + ۱ اور لا + ۲ اور لا + ۳ اور لا + ۴ کا جواب لا^{۴} + ۱۰لا^{۳} + ۳۵لا^{۲} + ۵۰لا + ۲۴

(۱۶) ضرب دو ط^{2} + ط لا + لا^{2} کو ط^{2} − ط لا + لا^{2} مین جواب ط^{4} + ط^{2} لا^{2} + لا^{4}

(۱۷) دریافت کرو حاصل ضرب لا − ط اور لا + ط اور لا^{2} − ط لا + ط^{2} اور لا^{2} + ط لا + ط^{2} کا جواب لا^{6} − ط^{6}

(۱۸) ضرب کرو لا^{2} − $\frac{1}{2}$ لا + $\frac{2}{3}$ کو $\frac{1}{3}$ لا + $\frac{3}{4}$ مین جواب $\frac{1}{3}$ لا^{3} + $\frac{11}{36}$ لا^{2} − $\frac{7}{9}$ لا + $\frac{2}{3}$.

(۱۹) ضرب کرو لا^{3} − لا$^{-3}$ کو لا − لا$^{-1}$ مین جواب لا^{4} + لا$^{-4}$ − لا^{2} − لا$^{-2}$

(۲۰) ضرب کرو (۱ + ط) ط^{2} ی + ی^{2} + ط ی^{2} کو ط^{2} − ی مین جواب (۱ + ط) ی (ط^{4} − ی^{2})

(۲۱) ط$^{\frac{4}{5}}$ + ط$^{\frac{3}{5}}$ لا$^{\frac{1}{5}}$ + ط$^{\frac{2}{5}}$ لا$^{\frac{2}{5}}$ + ط$^{\frac{1}{5}}$ لا$^{\frac{3}{5}}$ + لا$^{\frac{4}{5}}$ کو ط$^{\frac{1}{5}}$ − لا$^{\frac{1}{5}}$ مین ضرب کرو تو حاصل ضرب کا یہہ ہو ط − لا

(۲۲) ضرب کرو لا + ۲ ی$^{\frac{1}{2}}$ + ۳ ط$^{\frac{1}{3}}$ کو لا − ۲ ی$^{\frac{1}{2}}$ + ۳ ط$^{\frac{1}{3}}$ مین جواب لا^{2} − ۴ ی + ۶ لا ط$^{\frac{1}{3}}$ + ۹ ط$^{\frac{2}{3}}$

(۲۳) ضرب کرو ط$^{\frac{5}{3}}$ − ۲ ط$^{\frac{4}{3}}$ ص$^{\frac{1}{3}}$ + ۴ ط ص$^{\frac{2}{3}}$ − ۸ ط$^{\frac{2}{3}}$ ص + ۱۶ ط$^{\frac{1}{3}}$ ص$^{\frac{4}{3}}$ − ۳۲ ص$^{\frac{5}{3}}$ کو ط$^{\frac{1}{3}}$ + ۲ ص$^{\frac{1}{3}}$ جواب ط^{2} − ۶۴ ص^{2}

(۲۴) ضرب کرو ۳ ط$^{\frac{1}{2}}$ ص$^{\frac{2}{3}}$ + ۵ ط$^{\frac{1}{3}}$ ص$^{\frac{3}{2}}$ کو ۳ ط$^{\frac{1}{2}}$ ص$^{\frac{2}{3}}$ − ۵ ط$^{\frac{1}{3}}$ ص$^{\frac{3}{2}}$ جواب ۹ ط ص$^{\frac{4}{3}}$ − ۲۵ ط$^{\frac{2}{3}}$ ص^{3}

(۲۵) ضرب کرو ط$^{۲-۲ن}$ ص$^{۲ف+۱}$ س^{۳} کو ط$^{۵ن-۲}$ ص$^{-۲}$ س$^{-۱}$ مین جواب ط^{۳ن} ص$^{۲ف-۱}$ س^{۲}

(۲۶) ضرب کرو ط^{م} − ۲ س^{ن} کو ط^{م} − س^{ن} جواب ط^{۲م} − ۳ ط^{م} س^{ن} + ۲ س^{۲ن}

(۲۷) لا$^{-۳ف}$ + ط لا$^{-۲ف}$ − ط^{۲} لا$^{-ف}$ کو ط^{م} لا^{ف} مین ضرب دو جواب ط^{م} لا$^{-۲ف}$ + ط$^{م+۱}$ لا$^{-ف}$ − ط$^{م+۲}$

(۲۸) دریافت سر لا^{2} کا ان مقداروںکی حاصل ضرب مین لا^{3} − ط لا^{2} + ص لا^{2} − س لا + ف ضرب کیا ہوا اور لا^{2} + ف لا + کہ مین جواب ص − ط ف + کہ

(۲۹) ضرب کرو (۲ ص − س) ط^{2} − (۴ ص^{2} − ۲ ص س + س^{2}) ط + ۸ ص^{3} − ۴ ص^{2} س کو (۲ ص + س) ط مین جواب (۴ ص^{2} − س^{2}) ط^{3} − (۸ ص^{3} + س^{3}) ط^{2} + (۱۶ ص^{4} − ۴ ص^{2} س^{2}) ط

(۳۰) ضرب کرو ط$^{ن(ف-۱)}$ − ص$^{ن(ف-۱)}$ کو ط^{ن} − ص^{ن} مین جواب ط$^{ن ف}$ − ط^{ن} ص$^{(ف-۱)ن}$ − ص^{ن} ط$^{(ف-۱)ن}$ + ص$^{ن ف}$

(۳۱) ضرب کرو ۱ + $\frac{1}{2}$ لا + $\frac{1}{3}$ لا^{2} + $\frac{1}{4}$ لا^{3} ..... کو ۱ − $\frac{1}{3}$ لا + $\frac{1}{5}$ لا^{2} − $\frac{1}{7}$ لا^{3} ..... مین جواب ۱ + $\frac{1}{6}$ لا + $\frac{11}{30}$ لا^{2} + $\frac{121}{1260}$ لا^{3} + وغیرہ

اختصار کرو ان بندہ مقداروںکا

(۳۲) $\frac{1}{6}$ { لا (لا + ۱) (لا + ۲) + لا (لا − ۱) (لا − ۲) } + $\frac{2}{3}$ (لا − ۱) لا (لا + ۱) جواب لا^{3}

(۳۳) دریافت کرو حاصل تفریق مابین ط (ص + س)^{2} + ص (ط + س)^{2} + س (ط + ص)^{2} اور (ط + ص) (ط − س) (ص − س) + (ط − ص) (ط − س) (ص + س) − (ط − ص) (ص − س) (ط + س) جواب ۱۲ ط ص س

مثالیں تقسیم کے

(۱) تقسیم کرو ۵ لا ء + ۲۰ لا ء − ۵ ۴ ط لا ء کو ۵ لا ء پر جواب ۱ + ۴ لا − ۹ ط

(۲) تقسیم کرو − ۹ ط ص س − ۱۲ ط ص + ۱۵ ط ص س کو − ۳ ط ص س پر جواب ۳ ط + ۴ ص − ۵ س

(۳) تقسیم کرو ط² − ط − ۶ کو ط − ۳ پر جواب ط + ۲

(۴) تقسیم کرو ط⁵ + ص⁵ کو ط + ص پر جواب ط⁴ − ط³ ص + ط² ص² − ط ص³ + ص⁴

(۵) تقسیم کرو لا⁶ − ۲ ط³ لا³ + ط⁶ کو لا² − ۲ ط لا + ط² پر جواب لا⁴ + ۲ ط لا³ + ۳ ط² لا² + ۲ ط³ لا + ط⁴

(۶) تقسیم کرو لا⁶ − ط⁶ کو لا³ + ۲ ط لا² + ۲ ط² لا + ط³ پر جواب لا³ − ۲ ط لا² + ۲ ط² لا − ط³

(۷) تقسیم کرو ط³ + ص³ + س³ − ۳ ط ص س کو ط + ص + س پر جواب ط² + ص² + س² − ط ص − ط س − ص س

(۸) تقسیم کرو م² + ۲ م ف − ن² − ۲ ن ک + ف² − ک² کو م − ن + ف − ک پر جواب م + ن + ف + ک

(۹) تقسیم کرو ۱ + ۲ لا کو ۱ − ۳ لا پر جواب ۱ + ۵ لا + ۱۵ لا² + ۴۵ لا³ + وغیرہ

(۱۰) تقسیم کرو ط⁴ − ۸۱ کو ط − ۳ پر جواب ط³ + ۳ ط² + ۹ ط + ۲۷

(۱۱) تقسیم کرو ۷۵۲ ط¹¹ ص لا ع کو ۲۴۸ ط⁶ ص لا ع پر جواب ۳ ط⁵ لا ء

(۱۲) تقسیم کرو ۱۵ ط ص س ق ف ع ر کو − ۹ ط ص س ف ع پر جواب − ⁵⁄₃ ط [illegible]

(۱۳) تقسیم کرو (ط + ص) کو ط^⅓ + ص^⅓ پر جواب ط^⅔ − ط^⅓ ص^⅓ + ص^⅔

(۱۴) تقسیم کرو لا^(م+ن) + لا^ن ء^ن + لا^م ء^م + ء^(م+ن) کو لا^ن + ء^م پر جواب لا^م + ء^ن

(۱۵) تقسیم کرو ط لا² − (ط² + ص) لا + ص ط کو ط لا − ص پر جواب لا − ط لا − ص

(۱۶) تقسیم کرو لا³ − ط ف لا² + ط² ف لا − ط³ کو لا − ط پر جواب لا² − ط ف لا + ط لا + ط²

(۱۷) تقسیم کرو لا⁵ − ف لا⁴ + ق لا³ − ق لا² + ف لا − ۱ کو لا − ۱ پر جواب لا⁴ − (ف − ۱) لا³ + (ق − ف + ۱) لا² − (ف − ۱) لا + ۱

(۱۸) تقسیم کرو م ف لا³ + (م ق − ن ف) لا² − (م ر + ن ق) لا + ن ر کو م لا − ن پر جواب ف لا² + ق لا − ر

(۱۹) تقسیم کرو (لا² − ۱) ط³ − (لا² + لا − ۲) ط² + (۲ لا² + ۳ لا + ۲) ط − ۳ (لا + ۱) کو (لا − ۱) ط² − (لا − ۱) ط + ۳ پر جواب (لا² + لا + ۱) ط − (لا + ۱)

(۲۰) تقسیم کرو لا (لا − ۱) ط³ + (لا³ + ۲ لا − ۲) ط² + (۳ لا² − لا³) ط − لا⁴ کو ط² لا + ۲ ط − لا² پر جواب (لا − ۱) ط + لا²

(۲۱) تقسیم کرو − ۳ ط^{−۸} لا^{۹} + ۱۷ ط^{−۴} لا^{۶} − ۵ لا^{۷} − ۴۴ ط^{۴} لا^{۸} کو ۲ ط^{−۳} لا^{۳} − ۳ ط لا^{۲} پر جواب
− ط^{−۵} لا^{۶} + ۷ ط^{−۱} لا^{۳} + ۸ ط^{۳} لا^{۴}

(۲۲) تقسیم کرو (۲ لا − د)^{۲} ط^{۳} − (لا + د)^{۲} ط^{۲} لا + (لا + د) ۲ ط لا^{۲} − لا^{۳} کو (۲ لا − د) ط^{۲} −
(لا + د) ط لا + لا^{۲} پر جواب (۲ لا − د) ط + (لا + د) ط لا − لا^{۲}

(۲۳) تقسیم کرو (۳ س − ۶ ص) ط^{۳} − (س^{۲} − ۴ ص^{۲}) ط + س^{۳} − ۶ ص س^{۲} + ۱۲ ص^{۲} س − ۸ ص^{۳} کو
س − ۲ ص پر جواب ۳ ط^{۲} − (س + ۲ ص) ط + س^{۲} − ۴ ص س + ۴ ص^{۲}

(۲۴) $\frac{۳ لا^۵}{۴}$ − ۴ لا^{۴} + $\frac{۷۷ لا^۳}{۸}$ − $\frac{۵۴ لا^۲}{۴}$ − $\frac{۳۳ لا}{۴}$ + ۲۷ کو $\frac{لا^۲}{۲}$ − لا + ۳ پر جواب
$\frac{۳ لا^۳}{۲}$ − ۵ لا^{۲} + $\frac{لا}{۴}$ + ۹

(۲۵) تقسیم کرو $\frac{لا^۴}{۳}$ − $\frac{۱۱ لا^۳}{۱۲}$ + $\frac{۱۴ لا^۲}{۸}$ − $\frac{۲۳ لا}{۴}$ + ۶ کو $\frac{۲ لا^۲}{۳}$ − $\frac{۵ لا}{۶}$ + ۱ پر جواب
$\frac{لا^۲}{۲}$ − $\frac{۳ لا}{۴}$ + ۶

(۲۶) تقسیم کرو $\frac{۲}{۵}$ ط^{۴} لا − $\frac{۱۳۶}{۷۵}$ ط^{۳} لا^{۲} + $\frac{۵}{۵}$ ط^{۲} لا^{۳} + $\frac{۳}{۱۰}$ ط لا^{۴} − لا^{۵} کو $\frac{۲}{۳}$ ط^{۳} − $\frac{۴}{۵}$ ط^{۲} لا + $\frac{۱}{۲}$ لا^{۳} پر
جواب $\frac{۳}{۵}$ ط لا − ۲ لا^{۲}

(۲۷) تقسیم کرو $\frac{۱}{۲}$ ط^{$\frac{۳}{۴}$} − $\frac{۳}{۱۰}$ ط^{$\frac{۷}{۱۰}$} − $\frac{۱}{۳}$ ط^{$\frac{۷}{۱۲}$} + $\frac{۱}{۵}$ ط^{$\frac{۸}{۱۵}$} + $\frac{۱}{۴}$ ط^{$\frac{۱}{۲}$} − $\frac{۳}{۲۰}$ ط^{$\frac{۹}{۲۰}$} کو ط^{$\frac{۱}{۴}$} − $\frac{۳}{۵}$ ط^{$\frac{۱}{۵}$} پر جواب
$\frac{۱}{۲}$ ط^{$\frac{۱}{۲}$} − $\frac{۱}{۳}$ ط^{$\frac{۱}{۳}$} + $\frac{۱}{۴}$ ط^{$\frac{۱}{۴}$}

(۲۸) $\frac{۳۳}{لا^۲}$ − $\frac{۳۳}{د^۲}$ کو لا^{$\frac{۱}{۲}$} − د^{$\frac{۱}{۲}$} پر جواب لا + ۸ $\sqrt{لا د}$ + د

(۲۹) ط − ص کو ط^{$\frac{۱}{۴}$} − ص^{$\frac{۱}{۴}$} پر جواب ط^{$\frac{۳}{۴}$} + ط^{$\frac{۱}{۲}$} ص^{$\frac{۱}{۴}$} + ط^{$\frac{۱}{۴}$} ص^{$\frac{۱}{۲}$} + ص^{$\frac{۳}{۴}$}

(۳۰) تقسیم کرو ط^{۳م − ۲ن} ص^{۲ف} س − ط^{۲م + ن − ۱} ص^{ف − ۱} س^{ن} + ط^{ن} ص^{ف} س^{ن − ۱} +
ط^{۳م − ن} ص^{۳ف + ۲} س^{ن} − ط^{۲م + ۲ن − ۱} ص^{ف} س^{۲ن − ۱} + ص^{ف + ۱} س^{م + ن − ۱} کو
ط^{ن} ص^{ف − ۱} + ص س^{ن − ۱} پر جواب ط^{۲م − ن} ص^{ف + ۱} س − ط^{۲م + ۲ن − ۱} ص^{ف} س^{ن} + ص^{ف} س^{م}

(۳۱) تقسیم کرو لا^{۳ن} − ۱ کو لا^{۳} − ۱ پر اور بتلاؤ کہ اسکے آخر تقسیم کیا ہوگی اور یہ ہمیشہ پوری تقسیم ہوگی
جواب لا^{۳(ن − ۱)} + لا^{۳(ن − ۲)} .... لا^{۳} + لا^{۳} + ۱ فقط

مثالیں مقسوم علیہ اعظم کی

دریافت کرو مقسوم علیہ اعظم ان مقداروں کا

(۱) ۳ ط^{۴} لا^{۵} اور ۶ ط^{۳} ص لا کا جواب ۳ ط^{۳} لا

(۲) ط لا + لا^{۲} اور ط ص س + ص س لا کا جواب ط + لا

(۳) ط^{۲} + ط ص − ۱۲ ص^{۲} اور ط^{۲} − ۵ ط ص + ۶ ص^{۲} کا جواب ط − ۳ ص

(٤) ٦ط^{2} + ٧طلا − ٣لا^{2} اور ٦ط^{2} + ١١طلا + ٣لا^{2} کا جواب ٢ط + ٣لا

(٥) ل^{4} + ط^{2}ل^{2} + ط^{4} اور ل^{4} + طل^{3} − ط^{3}ل − ط^{4} کا جواب ل^{2} + طل + ط^{2}

(٦) ٢٠ل^{4} + ل^{2} − ١ اور ٢٥ل^{4} + ٥ل^{3} − ل − ١ کا جواب ٥ل^{2} − ١

(٧) ٦ط^{3} − ٦ط^{2}ر + ٢طر^{2} − ٢ر^{3} اور ٢١ط^{2} − ١٥طر + ٣ر^{2} کا جواب ط − ر

(٨) ٤٨ل^{2} + ١٦ل − ١٥ اور ٢٤ل^{3} − ٢٢ل^{2} + ١٧ل − ٥ کا جواب ١٢ل − ٥

(٩) ٦ل^{5} − ٤ل^{4} − ١١ل^{3} − ٣ل^{2} − ٣ل − ١ اور ٤ل^{4} + ٢ل^{3} − ١٨ل^{2} + ٣ل − ٥ کا
جواب ٢ل^{3} − ٤ل^{2} + ل − ١

(١٠) ل^{4} + طل^{3} − ٩ط^{2}ل^{2} + ١١ط^{3}ل − ٤ط^{4} اور ل^{4} − طل^{3} − ٣ط^{2}ل^{2} + ٥ط^{3}ل − ٢ط^{4} کا جواب (ل − ط)^{3}

(١١) ل^{4} − ف ل^{3} + (ق − ١)ل^{2} + ف ل − ق اور ل^{4} − ق ل^{3} + (ف − ١)ل^{2} + ق ل − ف جواب (ل^{2} − ١)

(١٢) ٣ل^{2} − (٤ط + ٢ص) ل + ٢طص + ط^{2} اور ل^{3} − (٢ط + ص) ل^{2} + (٢طص + ط^{2}) ل − ط^{2}ص
جواب (ل − ط)

(١٣) ٢ل^{3} + (٢ط + ٣ص) ل^{2} + (٢ص + ٣طص) ل + ٣ص^{2} اور
٢ل^{2} + (٢س + ٣ص) ل + ٣ص س جواب ٢ل + ٣ص

(١٤) ل^{2} + ٥ل + ٤ اور ل^{2} + ٢ل − ٨ اور ل^{2} + ٧ل + ١٢ جواب ل + ٤

(١٥) ١٥ط^{4} + ١٠ط^{3}ص + ٤ط^{2}ص^{2} + ٦طص^{3} − ٣ص^{4} اور ٦ط^{4} + ١٩ط^{3}ص + ٨طص^{3} − ٥ص^{4} کا
جواب ٣ط^{2} + ٢طص − ص^{2}

(١٦) طص + ٢ط^{2} − ٣ص^{2} − ٤ص س − طس − س^{2} اور ٩طس + ٢ط^{2} − ٥طص + ٤س^{2}
+ ٨ص س − ١٢ص^{2} جواب ٢ط + ٣ص + س

(١٧) ع ن ف^{3} + ٣ن ف^{2}ع − ٢ن ف ع^{3} − ٤ن ع^{4} اور ٢م ف^{2}ع^{2} − ٤م ف^{2} − م ف^{3}ع
+ ٣م ف ع^{3} جواب ف − ع

(١٨) ل^{6} + ٤ل^{5} − ٣ل^{4} − ١٦ل^{3} + ١١ل^{2} + ١٢ل − ٩ اور ٦ل^{5} + ٢٠ل^{4} − ١٢ل^{3} − ٤٨ل^{2}
+ ٢٢ل + ١٢ جواب ل^{3} + ل^{2} − ٥ل + ٣

(١٩) ط^{2} + ٢ص^{2} + $\sqrt{٣طص}$ (ط + ٢ص) اور ط^{2} − ص^{2} + (ط − ص) $\sqrt{٣طص}$ جواب $\sqrt{٣ط}$ + $\sqrt{٣ص}$

(٢٠) $\frac{ل^{2}}{٣}$ + $\frac{١١ل}{٦}$ + $\sqrt{ل + ١}$ − ل − ١ اور ل^{2} − $\frac{ل}{٤}$ − $\frac{١}{٤}$ جواب ل − $\frac{١}{٢}$ $\sqrt{ل + ١}$

(٢١) ط^{2}ل^{3} + ط^{5} − ٢طص ل^{2} + ص^{2}ل^{3} + ط^{3}ص^{2} − ٢ط^{4}ص اور ٢ط^{2}ل^{4} − ٥ط^{4}ل^{2} + ٣ط^{6}

- ۲ صٓ لاٚ + ۵ صٓ ط لاٚ - ۳ ط۲ صٓ جواب (ط - ص) (لا + ط)

(۲۲) ۲ (د۳ - ۲ د۲ - د + ۲) لا۲ + ۳ (د۲ - ۱) لا - (۲ د۳ - د۲ - ۲ د + ۱) اور

۳ (د۳ - ۴ د۲ + ۵ د - ۲) لا۲ + ۷ (د۲ - ۲ د + ۱) لا - (۳ د۳ - ۵ د۲ + د + ۱) جواب لا د - لا - د + ۱

(۲۳) (ص - س) لا۲ + (۲ ط ص - ۲ ط س) لا + ط۲ ص - ط۲ س اور (ط ص - ط س + صٓ - ص س) لا

+ ط۲ س + ط صٓ - ط۲ ص - ط ص س جواب ص - س

(۲۴) دریافت کرو قیمت د کی جبکہ فرض کریں ۲ (د۲ + د) لا۲ + (۱۱ د - ۲) لا + ۴ اور

۲ (د۳ + د۲) لا۳ + (۱۱ د۲ - ۲ د) لا۲ + (د۲ + ۵ د) لا + ۵ د - ۱ رکھتی ہوں ایک مقسوم علیہ اعظم جواب د = ۵

(۲۵) ۶ ط لا۲ - ۶ ط صٓ - ۴ ۵ ط - ۲۱ لا۲ + ۲۱ صٓ + ۱۸۹ اور ۶ ط لا۵ + ۶۰ ط - ۲۱ لا۵ - ۲۱۰ اور

۶ ط صٓ - ۲۱ ط - ۲۱ صٓ + ۲۴ کا مقسوم علیہ اعظم دریافت کرو جواب ۶ ط - ۲۱

(۲۶) ۶ ط۳ لا۲ + ۴ ط لا۲ - ۱۰ ط لا د - ۳ ط۲ لا د - ۲ لا۲ د + ۵ د۲ اور ۱۰ ط۲ لا -

۲ ط لا د - ۶ ط لا د۲ - ۵ ط لا د + لا د۲ + ۳ د۲ اور - ۴ ط لا۲ - ۶ ط۲ ص لا د +

۲ ط صٓ لا د - ۲ ط ص لا + ۲ د لا + ۳ ط ص د - صٓ لا د۲ + ص د کا جواب د - ۲ ط لا

مثالیں ضعف مشترک کی

دریافت کرو ضعف مشترک ان مقداروں کا

(۱) ۸ ط۲ اور ۲ ط۳ اور ۴۰ ط۴ کا جواب ۱۲۰ ط۴

(۲) ۱ - ط اور ۱ + ط اور ۱ - ط۲ کا جواب ۱ - ط۲

(۳) ط۲ - لا۲ اور ط۲ - لا۲ کا جواب ط۳ + ط۲ لا - ط لا۲ - لا۳

(۴) ۲ لا - ۱ اور ۴ لا۲ - ۱ اور ۴ لا۲ + ۱ کا جواب ۱۶ لا۴ - ۱

(۵) لا۲ + ۵ لا + ۴ اور لا۲ + ۲ لا - ۸ اور لا۲ + ۷ لا + ۱۲ جواب لا۴ + ۹ لا۳ + ۳ لا۲ - ۲۶ لا - ۲۴

(۶) ط۲ - صٓ اور ط۲ + صٓ اور (ط - ص)۲ اور (ط + ص)۲ اور ط۳ - صٓ اور ط۳ + صٓ کا

جواب ط۱۰ - ط۴ صٓ - ط۶ صٓ + صٓ۱۰

(۷) لا - ۱ اور لا۲ - ۱ اور لا - ۲ اور لا۲ - ۴ کا جواب لا۴ - ۵ لا۲ + ۴

(۸) ۴ (۱ - لا)۲ اور ۸ (۱ - لا) اور ۸ (۱ + لا) اور ۴ (۱ + لا)۲ جواب ۸ (۱ - لا) (۱ - لا۲)

(۹) ۳ لا۲ - ۱۱ لا + ۶ اور ۲ لا۲ - ۷ لا + ۳ اور ۶ لا۲ - ۷ لا + ۲ جواب ۶ لا۳ - ۲۵ لا۲ + ۲۳ لا - ۶

(۱۰) لا۳ - ۳ لا۲ + ۳ لا - ۱ اور لا۳ - لا۲ - لا + ۱ اور لا۴ - ۲ لا۳ + ۲ لا - ۱ اور

$\text{لا}^{۴} - ۲\,\text{لا}^{۳} + ۳\,\text{لا}^{۲} - ۲\,\text{لا} + ۱$ جواب $\text{لا}^{۶} - ۲\,\text{لا}^{۵} + \text{لا}^{۴} - \text{لا}^{۲} + ۲\,\text{لا} - ۱$

(۱۱) ثابت کرو کہ اگر $\text{لا} + \text{س}$ مقسوم علیہ اعظم $\text{لا}^{۲} + \text{ط}\,\text{لا} + \text{ص}$ اور $\text{لا}^{۲} + \text{ط}'\,\text{لا} + \text{ص}'$ کا ہو تو ان کا مختصر ضعف مشترک یہ ہوگا $\text{لا}^{۳} + (\text{ط} + \text{ط}' - \text{س})\,\text{لا}^{۲} + (\text{ط}\,\text{ط}' - \text{س}^{۲})\,\text{لا} + (\text{ط} - \text{س})(\text{ط}' - \text{س})\,\text{س}$ فقط

مثالیں کسر کی

(۱) $\frac{۳\,\text{لا} - ۱}{۲۴} - \frac{۳\,\text{لا} - ۵}{۲۴} + \frac{۵}{۶}$ جواب ۱

(۲) $\frac{۴\,\text{م} - ۳\,\text{ن}}{۳(۱ - \text{ن})} - \frac{\text{م} - ۳\,\text{ن}}{\text{م}(۱ - \text{ن})}$ جواب $\frac{\text{م}}{۱ - \text{ن}}$

(۳) $\frac{\text{ط} - \text{ص}}{\text{ط}\,\text{ص}} - \frac{\text{ط} - \text{س}}{\text{ط}\,\text{س}} + \frac{\text{ص} - \text{س}}{\text{ص}\,\text{س}}$ جواب ۰

(۴) $\frac{۷\,\text{لا} - ۱۰}{۵} - \frac{۳\,\text{لا} - ۷}{۶} - \frac{۲۷\,\text{لا} - ۳۰}{۳۰}$ جواب $\frac{۱}{۶}$

(۵) $\frac{۳\,\text{لا} - ۴}{۷} - \frac{۲\,\text{لا} - ۶ - ۱}{۳} + \frac{۱۵\,\text{لا} - ۴}{۱۲}$ جواب $\frac{۸۵\,\text{لا} - ۲۰}{۸۴}$

(۶) $\frac{\text{ط}}{\text{س}} - \frac{(\text{ط}\,\text{ف} - \text{ص}\,\text{س})\,\text{لا}}{\text{س}(\text{س} + \text{ف}\,\text{لا})} - \frac{\text{ط}}{\text{س} + \text{ف}\,\text{لا}}$ جواب $\frac{\text{ص}\,\text{لا}}{\text{س} + \text{ف}\,\text{لا}}$

(۷) $\frac{\frac{\text{ط} + \text{ص}}{۱ + \text{ص}\,\text{ط}} - \text{ط}}{۱ - \frac{\text{ص} - \text{ط}}{۱ + \text{ص}\,\text{ط}}\,\text{ط}}$ (۲) $\frac{۲(\text{لا}^{۲} - \frac{۱}{۴})}{۲\,\text{لا} + ۱} + \frac{۱}{۲}$ جواب (۱) ص (۲) لا

(۸) $\frac{\frac{۱}{\text{ط}} + \frac{۱}{\text{ط}\,\text{ص}^{۲}}}{\text{ص} - ۱ + \frac{۱}{\text{ص}}}$ اور $\frac{\text{ط} + \text{ص} + \frac{\text{ص}^{۲}}{\text{ط}}}{\text{ط} + \text{ص} + \frac{\text{ط}^{۲}}{\text{ص}}}$ جواب $\frac{\text{ص} + ۱}{\text{ط}\,\text{ص}^{۲}}$ (۲) $\frac{\text{ص}}{\text{ط}}$

(۹) $\frac{۱}{\text{لا}^{۲} - ۱ - (\text{ن} - ۱)\,\text{لا}} - \frac{۱}{\text{ن} + ۱ + (\text{ن} + ۱)\,\text{لا}}$ جواب $\frac{۲}{\text{ن}^{۲} - ۱} \cdot \frac{۱ + \text{ن}\,\text{لا}}{۱ - \text{لا}^{۲}}$

(۱۰) $\frac{\text{ط}}{\text{ص}} - \frac{(\text{ط}^{۲} - \text{ص}^{۲})}{\text{ص}^{۲}}\,\text{لا} + \frac{\text{ط}(\text{ط}^{۲} - \text{ص}^{۲})\,\text{لا}^{۲}}{\text{ص}^{۲}(\text{ص} + \text{ط}\,\text{لا})}$ جواب $\frac{\text{ط} + \text{ص}\,\text{لا}}{\text{ص} + \text{ط}\,\text{لا}}$

(۱۱) $\frac{۱}{۲} \cdot \frac{۳\,\text{م} + ۲\,\text{ن}}{۳\,\text{م} - ۲\,\text{ن}} - \frac{۱}{۲}\,\frac{۳\,\text{م} - ۲\,\text{ن}}{۳\,\text{م} + ۲\,\text{ن}}$ جواب $\frac{۱۲\,\text{م}\,\text{ن}}{۹\,\text{م}^{۲} - ۴\,\text{ن}^{۲}}$

(۱۲) $\frac{\text{لا} + \text{د}}{\text{د}} - \frac{۲\,\text{لا}}{\text{لا} + \text{د}} + \frac{\text{لا}^{۳} - \text{لا}^{۲}\,\text{د}}{\text{د}^{۳} - \text{لا}^{۲}\,\text{د}}$ جواب $\frac{\text{د}}{\text{لا} + \text{د}}$

(۱۳) $\frac{\text{لا}^{۴} - \text{د}^{۴}}{\text{لا}^{۲} - ۲\,\text{لا}\,\text{د} + \text{د}^{۲}} \div \frac{\text{لا}^{۲} + \text{لا}\,\text{د}}{\text{لا} - \text{د}}$ جواب $\text{لا} + \frac{\text{د}^{۲}}{\text{لا}}$

(۱۴) $\frac{\text{لا}(\text{لا}+1)(\text{لا}+2)}{3} - \frac{\text{لا}(\text{لا}+1)(2\text{لا}+1)}{1\cdot 2\cdot 3}$ جواب $\frac{\text{لا}(\text{لا}+1)}{2}$

(۱۵) $\frac{1}{\text{لا}-1} - \frac{1}{2(\text{لا}+1)} - \frac{\text{لا}+3}{2(\text{لا}^2+1)}$ جواب $\frac{\text{لا}+3}{\text{لا}^4-1}$

(۱۶) $\frac{3}{4(1-\text{لا})^2} + \frac{3}{8(1-\text{لا})} - \frac{1}{8(1+\text{لا})} - \frac{1-\text{لا}}{4(1+\text{لا}^2)}$ جواب $\frac{1+\text{لا}+\text{لا}^2}{1-\text{لا}-\text{لا}^4+\text{لا}^5}$

(۱۷) $\frac{3\text{ط}}{(\text{ط}-2\text{لا})^2} + \frac{\text{ط}+2\text{لا}}{(\text{ط}+\text{لا})(\text{ط}-2\text{لا})} - \frac{5}{\text{ط}+\text{لا}}$ جواب $\frac{20\text{ط}\,\text{لا}-22\text{لا}^2}{(\text{ط}+\text{لا})(\text{ط}-2\text{لا})^2}$

(۱۸) $\frac{1}{4\text{ط}^3(\text{ط}+\text{لا})} + \frac{1}{4\text{ط}^3(\text{ط}-\text{لا})} + \frac{1}{2\text{ط}^2(\text{لا}^2+\text{ط}^2)}$ جواب $\frac{1}{\text{ط}^4-\text{لا}^4}$

(۱۹) $\frac{\text{لا}^{3\text{ن}}}{\text{لا}^{\text{ن}}-1} - \frac{\text{لا}^{2\text{ن}}}{\text{لا}^{\text{ن}}+1} - \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}}-1} + \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}}+1}$ جواب $\text{لا}^{2\text{ن}}+2$

(۲۰) $\frac{\text{ط}^2+\text{ص}^2+\text{ط}\text{ص}}{\left(\frac{1}{\text{ط}^2}-\frac{1}{\text{لا}^2}\right)(\text{ط}^3-\text{ص}^3)} - \frac{\frac{1}{\text{لا}^2}}{(\text{ط}-\text{ص})(\text{لا}-\text{ط})}$ جواب $\frac{\frac{1}{\text{ط}^2}}{(\text{ط}-\text{ص})(\text{لا}-\text{ط})}$

(۲۱) $\frac{8}{5(\text{لا}-2)} - \frac{13}{80(\text{لا}+3)} - \frac{5}{4(\text{لا}-1)^2} - \frac{23}{16(\text{لا}-1)}$ جواب $\frac{\text{لا}^2+4}{(\text{لا}-1)^2(\text{لا}-2)(\text{لا}+3)}$

(۲۲) $\frac{1}{(\text{ط}-\text{ص})(\text{ط}-\text{س})(\text{لا}+\text{ط})} + \frac{1}{(\text{ص}-\text{ط})(\text{ص}-\text{س})(\text{لا}+\text{ص})} + \frac{1}{(\text{س}-\text{ط})(\text{س}-\text{ص})(\text{لا}+\text{س})}$

جواب $\frac{1}{(\text{لا}+\text{ط})(\text{لا}+\text{ص})(\text{لا}+\text{س})}$

(۲۳) $\frac{\text{ط}+\text{ص}}{\text{ط}\text{ص}}(\text{ط}^2+\text{ص}^2-\text{س}^2) + \frac{\text{ص}+\text{س}}{\text{ص}\text{س}}(\text{ص}^2+\text{س}^2-\text{ط}^2) + \frac{\text{ط}+\text{س}}{\text{ط}\text{س}}(\text{ط}^2+\text{س}^2-\text{ص}^2)$

جواب $(\text{ط}+\text{ص}+\text{س})$

(۲۴) $\frac{\text{ط}^2-(\text{ص}-\text{س})^2}{(\text{ط}+\text{س})^2-\text{ص}^2} + \frac{\text{ص}^2-(\text{س}-\text{ط})^2}{(\text{ط}+\text{ص})^2-\text{س}^2} + \frac{\text{س}^2-(\text{ط}-\text{ص})^2}{(\text{ص}+\text{س})^2-\text{ط}^2}$ جواب ۱

(۲۵) $\frac{1}{\text{ط}+\frac{1}{\text{ص}+\frac{1}{\text{س}}}}$ اور (۲) $\frac{1}{\text{لا}-1+\frac{1}{1+\frac{\text{لا}}{4-\text{لا}}}}$ جواب اول $\frac{\text{ص}\text{س}+1}{\text{ط}\text{ص}\text{س}+\text{ط}+\text{س}}$ جواب دوم $\frac{4}{\text{لا}^3}$

اختصار کروائیدہ کی کسرونکا

(۲۶) اختصار کرو $\frac{ط لا}{۳ط لا}$ اور $\frac{م^۲ - ن^۲}{۳م - ۳ن}$ جواب $\frac{۱}{۳}$ اور $\frac{م + ن}{۳}$

(۲۷) $\frac{۳ط^۳ - ۲طص}{۵ط^۲ - ۵طص}$ اور $\frac{ط لا + لا^۲}{۳ص لا - س لا}$ اور $\frac{۱۴ط^۲ - ۷طص}{۱۰طس - ۵صس}$ اور $\frac{۱۲ط^۳ لا^۴ + ۲ط^۲ لا^۵}{۱۸طص لا + ۳ص لا^۲}$

اور $\frac{۵ط^۲ + ۵ط لا}{ط^۲ - لا^۲}$ جواب [illegible] اور $\frac{ط + لا}{۳ص - س}$ اور $\frac{۷ط}{۵س}$ اور $\frac{۲ط^۲ لا^۳}{۳ص^۲}$ اور $\frac{۵ط}{ط - لا}$

(۲۸) $\frac{لا^۲ + (ط+س) لا + طس}{لا^۲ + (ص+س) لا + صس}$ جواب $\frac{لا + ط}{لا + ص}$

(۲۹) $\frac{طس + صی + طی + صس}{طع + ۲ص لا + ۲ط لا + صع}$ جواب $\frac{س + ی}{ع + ۲لا}$

(۳۰) $\frac{۶طس + ۱۰صس + ۹ط لا + ۱۵ص لا}{۶س^۲ + ۹س لا - ۲س - ۳لا}$ جواب $\frac{۳ط + ۵ص}{۳س - ۱}$

(۳۱) $\frac{ط^۲ + ص^۲ + س^۲ + ۲طص + ۲طس + ۲صس}{ط^۲ - ص^۲ - س^۲ - ۲صس}$ جواب $\frac{ط + ص + س}{ط - ص - س}$

(۳۲) $\frac{لا^۸ + لا^۶ ی^۲ + لا^۲ ی^۶ + ی^۸}{لا^۴ - ی^۴}$ جواب $\frac{لا^۶ + ی^۶}{لا^۲ - ی^۲}$

(۳۳) $\frac{ط^۳ + طص^۲ - ط^۲ص - ص^۳}{۴ط^۴ - ۲ط^۲ص^۲ - ۴ط^۳ص + ۲طص^۳}$ جواب $\frac{ط^۲ + ص^۲}{۲ط(۲ط^۲ - ص^۲)}$

(۳۴) $\frac{۲ط^۲ + طص - ص^۲}{ط^۳ + ط^۲ص - ط - ص}$ جواب $\frac{۲ط - ص}{ط^۲ - ۱}$

(۳۵) $\frac{۶لا^۵ + ۱۵لا^۴ی - ۴لا^۳ط^۲ - ۱۰لا^۲ط^۲ی}{۹لا^۳ی - ۲۷لا^۲ی ط - ۶لا ی ط^۲ + ۱۸ی ط^۳}$ جواب $\frac{لا^۲}{۳ی}$ ۔ $\frac{۲لا + ۵ی}{لا - ۳ط}$

(۳۶) $\frac{طس لا^۲ + (طف + صس) لا + صف}{لا^۲ط^۲ - ص^۲}$ جواب $\frac{س لا + ف}{ط لا - ص}$

(۳۷) $\frac{ط^۳ + (ط+ص) ط لا + ص لا^۲}{ط^۴ - ص^۲ لا^۲}$ جواب $\frac{ط + لا}{ط^۲ - ص لا}$

(۳۸) $\frac{۴لا^۲ - ۱۲ط لا + ۹ط^۲}{۸لا^۳ - ۲۷ط^۳}$ جواب $\frac{۲لا - ۳ط}{۴لا^۲ + ۶ط لا + ۹ط^۲}$

(۳۹) $\frac{ط لا^م - ص لا^{م+۱}}{ط^۲ص لا - ص^۳ لا^۳}$ جواب $\frac{لا^{م-۱}}{ص(ط + ص لا)}$

(۴۰) $\frac{۳۰ط^{۳ن-۱}ص^ع س^{ع+۲} - ۶ط^{۲ن}ص^{-۴}س^{ع+۳}ف^{ع-۱}}{۲۰ط^ن ص^{ع-۱}س^۲ف^۲ - ۴ط^{-۳}ص^۲ف^{ع+۱}}$ جواب $\frac{۳ط^{۲ن-۱}ص س^ع}{۲ف^۲}$

(۴۱) $\dfrac{ط^{۲}\,(ص^{۲} - س^{۲}) - ط ص\,(۲ص^{۲} + ص س - س^{۲}) + ص^{۲}\,(ص + س)}{ط^{۳}\,(ص^{۲} + ۲ ص س + س^{۲}) - ط^{۲} ص\,(۲ص^{۲} + ۳ ص س + س^{۲}) + ط ص^{۲}\,(ص + س)}$ جواب $\dfrac{ط\,(ص - س) - ص^{۲}}{ط^{۲}\,(ص + س) - ط ص^{۲}}$

(۴۲) $\dfrac{(س - ف)\,ط^{۲} + ۶\,(ص س - ص ف)\,ط + ۹\,(ص^{۲} س - ص^{۲} ف)}{(ص س - ص ف + س^{۲} - س ف)\,ط + ۳\,(ص^{۲} س + ص س^{۲} - ص^{۲} ف - ص س ف)}$ جواب $\dfrac{ط + ۳ ص}{ص + س}$

(۴۳) $\dfrac{۱ + لا^{\frac{۱}{۲}} + لا + لا^{\frac{۳}{۲}}}{۲ لا + ۲ لا^{\frac{۳}{۲}} + ۳ لا^{۲} + ۳ لا^{\frac{۵}{۲}}}$ جواب $\dfrac{۱ + لا}{۲ لا + ۳ لا^{۲}}$

(۴۴) $\dfrac{۳ ص س ع + ۳۰ م ف + ۱۸ ص س + ۵ م ف ع}{۴ ط ع ف - ۲۴ ق ح + ۲۴ ط ف - ۷ ق ح ع}$ جواب $\dfrac{۳ ص س + ۵ م ف}{۴ ط ف - ق ح}$

(۴۵) $\dfrac{لا - ۴ - ۳ لا^{\frac{۱}{۲}} + ۴ د^{\frac{۱}{۲}} - ۸ لا د}{لا - ۸ - ۲ لا^{\frac{۱}{۲}} + ۱۲ + ۴ د^{\frac{۱}{۲}} - ۳ لا د}$ جواب $\dfrac{لا^{\frac{۱}{۲}} - د^{\frac{۱}{۲}} + ۱}{لا^{\frac{۱}{۲}} - ۳ د^{\frac{۱}{۲}} + ۲}$

مثالیں ضرب کی

(۱) ضرب کرو $ط - \dfrac{لا^{۲}}{ط}$ کو $\dfrac{ط}{لا} + \dfrac{لا}{ط}$ میں جواب $\dfrac{ط^{۲}}{لا} - \dfrac{لا^{۳}}{ط^{۲}}$

(۲) ضرب کرو $ط + \dfrac{۱}{ط}$ کو $ط + \dfrac{۱}{ط}$ میں جواب $ط^{۲} + \dfrac{۱}{ط^{۲}} + ۲$

(۳) ضرب کرو $\dfrac{ص}{ط} + ص$ کو $\dfrac{ط}{ص} + \dfrac{۱}{ص}$ جواب $ط + \dfrac{۱}{ط} + ۲$

(۴) ضرب کرو $\dfrac{۲ ط - ص}{۴ ط}$ کو $\dfrac{۴ ط - ۲ ص}{ص^{۲} - ۲ ط ص}$ جواب $\dfrac{ص - ۲ ط}{۲ ط ص}$

(۵) ضرب کرو $لا^{۲} - لا + ۱$ کو $\dfrac{۱}{لا^{۲}} + \dfrac{۱}{لا} + ۱$ جواب $لا^{۲} + ۱ + \dfrac{۱}{لا^{۲}}$

(۶) ضرب کرو $لا + ۱ + \dfrac{۱}{لا}$ کو $لا - ۱ + \dfrac{۱}{لا}$ جواب $لا^{۲} + ۱ + \dfrac{۱}{لا^{۲}}$

(۷) $\dfrac{ط}{ط + ص} + \dfrac{ص}{ط - ص}$ کو $\dfrac{ط}{ط + س} - \dfrac{ص}{ص + س}$ جواب $\dfrac{س\,(ط^{۲} + ص^{۲})}{(ط + ص)(ط + س)(ص + س)}$

(۸) $۳ لا^{\frac{۲}{۳}} - \dfrac{۵ لا د}{لا^{\frac{۱}{۳}}}$ کو $لا^{\frac{۴}{۳}} - \dfrac{۷ د}{لا^{\frac{۲}{۳}}}$ جواب $۳ لا^{۲} - ۲۶ لا د + ۳۵ د^{۲}$

(۹) ضرب کرو $\dfrac{ط^{۲}}{لا^{۲}} - \dfrac{ط ص}{۲ لا د} + \dfrac{ص^{۲}}{د^{۲}}$ کو $\dfrac{۳ ط^{۲}}{لا^{۲}} - \dfrac{۳ ط ص}{۵ لا د} + \dfrac{ص^{۲}}{د^{۲}}$ جواب $\dfrac{۳ ط^{۴}}{لا^{۴}} - \dfrac{۱۹ ط^{۳} ص}{۱۵ لا^{۳} د} + \dfrac{۱۲ ط^{۲} ص^{۲}}{۵ لا^{۲} د^{۲}} - \dfrac{۹ ط ص^{۳}}{۱۰ لا د^{۳}} + \dfrac{ص^{۴}}{د^{۴}}$

(۱۰) ضرب کرو $\dfrac{ط^{۲}}{ص^{۲}} + \dfrac{۲ س^{۳} ف}{ص^{۵}} - \dfrac{۷ س^{۲}}{۴ ط^{۲} ص^{۳}}$ کو $\dfrac{ط^{۲}}{ص^{۳}} - \dfrac{۲ س^{۲}}{ص^{۵}} + \dfrac{۷ س^{۳}}{۴ ط^{۲} ص^{۳}}$ جواب

$\frac{ط^۴}{ص^۴} - \frac{۴ س^۶ ف}{ص^{۱۰}} + \frac{۱۴ س^۵ ف^۴}{ط^۴ ص^۸} - \frac{۹ ۴ س^۴}{۴ ط^۵ ص^۶}$

مثالیں تقسیم کی

(۱۱) تقسیم کرو $\frac{۳ لا}{۲ لا - ۲}$ کو $\frac{۲ لا}{لا - ۱}$ پر جواب $\frac{۳}{۴}$ (۱۲) تقسیم کرو $لا + \frac{۲ لا}{لا - ۳}$ کو $لا - \frac{۲ لا}{لا - ۳}$ جواب $\frac{لا - ۱}{لا - ۵}$

(۱۳) تقسیم کرو $\frac{۴ ط (ط^۲ - لا^۲)}{۳ ص (س^۲ - لا^۲)}$ کو $\frac{ط^۲ - ط لا}{ص س + ص لا}$ جواب $\frac{۴ (ط + لا)}{۳ (س - لا)}$

(۱۴) تقسیم کرو $لا^۴ - \frac{۱}{لا^۴}$ کو $لا - \frac{۱}{لا}$ پر جواب $لا^۳ + \frac{۱}{لا^۳} + لا + \frac{۱}{لا}$

(۱۵) تقسیم کرو $ط^۶ + \frac{۱}{ط^۶} + ط^۴ + \frac{۱}{ط^۴} + ط^۲ + \frac{۱}{ط^۲} + ۲$ کو $ط^۳ + \frac{۱}{ط^۳} + ط + \frac{۱}{ط}$ پر جواب $ط^۳ + \frac{۱}{ط^۳}$

(۱۶) تقسیم کرو $\frac{ط^۲}{ص س} - \frac{۲ ط}{ف} + \frac{ط س}{ص ی} + \frac{ص س}{ف^۲} - \frac{س^۲}{ف ی}$ کو $\frac{ط}{ص} - \frac{س}{ف}$ جواب $\frac{ط}{س} - \frac{ص}{ف} + \frac{س}{ی}$

(۱۷) تقسیم کرو $ط^۲ + لا$ کو $ط + لا$ پر چار رقموں تک جواب $\frac{ط^۲}{ط} + \frac{ط - ط^۲}{ط^۲} لا - \frac{ط - ط^۲}{ط^۳} لا^۲ + \frac{ط - ط^۲}{ط^۴} لا^۳$

(۱۸) تقسیم کرو $\frac{ط^۲ لا^۳}{ص ف} + \frac{ط ص لا^۲}{س^۲ ف} - \frac{ط س لا^۲}{ف^۲} - \frac{ص^۲ لا}{س ف^۲} + \frac{ط^۲ لا}{ص س} - \frac{ط}{ف}$
کو $\frac{ط لا}{س} - \frac{ص}{ف}$ اس سوال کا یہ جواب ہے جواب $\frac{س ط لا^۲}{ص ف} + \frac{ص لا}{س ف} + \frac{ط}{ص}$

(۱۹) تقسیم کرو $ط^۲$ کو $ط^۲ + ۲ ط لا$ پر جواب $۱ - \frac{۲ لا}{ط} + \frac{۴ لا^۲}{ط^۲} - \frac{۸ لا^۳}{ط^۳}$ ...... وغیرہ

(۲۰) تقسیم کرو $ط - ص لا$ کو $ط + س لا$ چار رقموں تک جواب $۱ - (ص + س) \frac{لا}{ط} + (ص + س) \frac{س لا^۲}{ط^۲}$
$- (ص + س) \frac{س^۲ لا^۳}{ط^۳}$ ...... وغیرہ

(۱) دریافت کرو قیمت $\left(لا + \frac{۲ لا}{لا - ۳}\right) \div \left(لا - \frac{۲ لا}{لا - ۳}\right)$ جبکہ $لا = ۵\frac{۱}{۲}$ جواب ۹

(۲) دریافت کرو قیمت $\frac{لا}{۲} \div \left\{\frac{۲ لا - ۳}{۳} - \frac{۳ لا - ۱}{۴}\right\} \div \frac{لا - ۱}{۲}$ جبکہ $لا = ۴ - \frac{۱}{۳}$ جواب $۲\frac{۵}{۶}$

(۳) دریافت کرو قیمت $ط لا + ص ی$ کی جبکہ $لا = \frac{س ع - ص ن}{ط ع - ص ف}$ اور $ی = \frac{ط ن - س ف}{ط ع - ص ف}$ جواب س

(۴) دریافت کرو قیمت $\frac{لا + ۲ ط}{لا - ۲ ط}$ کی جبکہ (۱) $لا = \frac{۴ ط ص}{ط + ص}$ اور (۲) $لا = \frac{۱۲ ط ص}{ط + ص + ۴\sqrt{(ط + ص)^۲ + ۱۲ ط ص}}$

جواب (۱) ۲ جواب (۲) ۱

(۵) دریافت کرو قیمت $\frac{ط^ن}{۲ ن ط^{ن-۱} - ۲ ن لا} + \frac{ص^ن}{ن ص^{ن-۱} - ۲ ن لا}$ کی جبکہ $لا = \frac{ط^ن + ص^ن}{۲}$ جواب $\frac{۱}{ن}$

(۶) اگر دو کسر دونکا مجموعہ ایک ہو تو ثابت کرو کہ اونکا حاصل تفریق برابر اونکی مربعوں کے حاصل تفریق کے

(۷) اگر حاصل تفریق دو دو کسروں کا $\frac{ف}{ع}$ ہو تو ثابت کرو کہ ف دفعہ اونکا مجموعہ ع دفعہ انکی حاصل تفریق کے

(۸) دو کسروں کا مجموعہ برابر ہے $\frac{ط}{ص}$ (۹) تقسیم کرو $\frac{۸۲}{۸۹}$ ایسی دو حصوں میں کہ اونکا حاصل تفریق $= \frac{۱۴}{۱۹}$

جواب $\frac{۲۸۲۳}{۳۳۸۲}$ اور $\frac{۳۳۱}{۳۳۸۲}$

صعود

(۱) دریافت کرو کہ مربع اور مکعب $۳ ط^۲ ص س^۳$ کا جواب $۹ ط^۴ ص^۲ س^۶$ اور $۲۷ ط^۶ ص^۳ س^۹$

(۲) دریافت کرو مربع اور مکعب $\frac{۲}{۵} ط^۳ م لا^{۲+ن} ی^{ن-۱}$ کا جواب (۱) $\frac{۴}{۲۵} ط^۶ م^۲ لا^{۴+۲ن} ی^{۲ن-۲}$

(۲) $\frac{۸}{۱۲۵} ط^۹ م^۳ لا^{۶+۳ن} ی^{۳ن-۳}$ (۳) دریافت کرو مکعب $\frac{۱}{۲} ط - \frac{۲}{۳} ص$

جواب $\frac{۱}{۸} ط^۳ - \frac{۸}{۲۷} ص^۳ - \frac{۱}{۲} ط^۲ ص + \frac{۲}{۳} ط ص^۲$ (۴) دریافت کرو مکعب

$۱ + ۲ لا + ۳ لا^۲ + ۴ لا^۳$ کا جواب $۱ + ۶ لا + ۲۱ لا^۲ + ۵۶ لا^۳ + ۱۱۱ لا^۴ + ۱۷۴ لا^۵$

$+ ۲۱۹ لا^۶ + ۲۰۴ لا^۷ + ۱۴۴ لا^۸ + ۶۴ لا^۹$

مثالیں صعود و نزول کی

(۵) دریافت کرو مکعب $\sqrt[3]{ط} - \sqrt[3]{ص}$ کا جواب $(ط + ۳ ص) \sqrt[3]{ط} - (ص + ۳ ط) \sqrt[3]{ص}$

(۶) دریافت کرو مکعب $لا^{\frac{۱}{۳}} - ی^{\frac{۱}{۳}}$ کا جواب $لا - ی - ۳ لا^{\frac{۱}{۳}} ی^{\frac{۱}{۳}} (لا^{\frac{۱}{۳}} - ی^{\frac{۱}{۳}})$

(۷) دریافت کرو مکعب $لا - \frac{۱}{لا}$ کا جواب $لا^۳ - \frac{۱}{لا^۳} - ۳ (لا - \frac{۱}{لا})$

(۸) دریافت کرو مکعب $لا - \frac{۱}{لا} - ۱$ کا جواب $لا^۳ - \frac{۱}{لا^۳} - ۳ لا^۲ - \frac{۳}{لا^۲} + ۵$

(۹) دریافت کرو مربع $ط^{\frac{۲}{۳}} - ط^{\frac{۱}{۳}} + ۱$ کا جواب $ط^{\frac{۴}{۳}} - ۲ ط + ۳ ط^{\frac{۲}{۳}} - ۲ ط^{\frac{۱}{۳}} + ۱$

(۱۰) دریافت کرو مکعب $\frac{لا}{۲ ط} - \frac{ط}{لا}$ جواب $\frac{لا^۳}{۸ ط^۳} - \frac{۳ لا}{۴ ط} + \frac{۳ ط}{۲ لا} - \frac{ط^۳}{لا^۳}$

(۱۱) دریافت کرو مکعب $ع^{لا} - ع^{-لا}$ کا جواب $ع^{۳ لا} - ع^{-۳ لا} - ۳ (ع^{لا} - ع^{-لا})$

(۱۲) دریافت کرو مکعب $لا^ن م - ۱$ کا جواب $لا^{۳ن} م^۳ - ۳ لا^{۲ن} م^۲ + ۳ لا^ن م - ۱$

(۱۳) اگر $لا + \frac{۱}{لا} = ف$ ثابت کرو $لا^۳ + \frac{۱}{لا^۳} = ف^۳ - ۳ ف$

(۱۴) دریافت کرو مربع $۱ - \frac{۱}{۲} لا + \frac{۲}{۳} لا^۲ - \frac{۳}{۴} لا^۳ + \frac{۴}{۵} لا^۴ - ...$ سے

جواب $۱ - لا + \frac{۱۹}{۱۲} لا^۲ - \frac{۱۳}{۶} لا^۳ +$ وغیرہ

(۱۵) ثابت کرو ا لا − لا²/۳ + لا³/۵ − ... ؟ + (۱ − لا/۲ + لا²/۶ ...)² برابر ایک ہے

(۱۶) دریافت کرو جذر ۹ ط² ص² س⁻¹² اور ۱۶ لا^(۲م+۲) ط^(−۲ن) جواب ۳ ط ص س⁻⁶ اور ۴ لا^(م+۱) ط^(−ن)

(۱۷) دریافت کرو جذر ۴ لا⁴ − ۱۲ لا³ + ۲۵ لا² − ۲۴ لا + ۱۶ کا جواب ۲ لا² − ۳ لا + ۴

(۱۸) دریافت کرو جذر ۹ ط⁴ − ۱۲ ط³ ص + ۴۳ ط² ص² − ۲۰ ط ص³ + ۲۵ ص⁴ جواب ۳ ط² − ۲ ط ص + ۵ ص²

(۱۹) دریافت کرو جذر لا⁶ + ۴ لا⁵ + ۱۰ لا⁴ + ۲۰ لا³ + ۲۵ لا² + ۲۴ لا + ۱۶ جواب لا³ + ۲ لا² + ۳ لا + ۴

دریافت کرو جذر ذیل کی مقداروں کا

(۲۰) لا⁴ − ۲ لا³ + ³⁄₂ لا² − لا/۲ + ۱/۱۶ جواب لا² − لا + ۱/۴ (۲۱) ۲۵ ط² ص²/۴ + س⁴/۹ − ۵ ط ص س²/۳ جواب ۵ ط ص/۲ − س²/۳ (۲۲) لا² + ط²/۹ + ص²/۴ + ۲/۳ ط لا + لا ص + ۱/۳ ط ص + ص لا جواب لا + ط/۳ + ص/۲ (۲۳) ۹ + ۱۴ لا²/۵ − ۱۰۵ لا/۲۵ − لا²/۵ ... + ۹ ۴ لا² جواب ۲ لا − لا/۵ + ۳ (۲۴) ط⁴ − ۳ ط³/۲ − ۳ ط²/۲ + ۴۱ ط/۱۶ + ۱ جواب ط² − ۳ ط/۴ + ۱ (۲۵) ط²/ص² + ص²/ط² − ۲ جواب ط/ص − ص/ط

(۲۶) ط²/ص² + ص²/ط² + ۲ ط/ص + ۲ ص/ط + ۳ جواب ط/ص + ص/ط + ۱

(۲۷) دریافت کرو جذر ط^(۲م) − ۴ ط^(م+ن) + ۴ ط^(۲ن) جواب ط^م − ۲ ط^ن

(۲۸) لا²/د² (لا²/۴د² + ۱) + ۴ د²/لا² (د²/لا² + ۱) + ۳ جواب لا²/۲د² + ۲د²/لا² + ۱

(۲۹) دریافت کرو جذر لا²/د² + د²/لا² − (لا/د + د/لا) ۱/۲ + ۵/۴ جواب لا/د + د/لا − ۱/۴

(۳۰) دریافت کرو کعب ط⁶ − ۶ ط⁵ + ۱۵ ط⁴ − ۲۰ ط³ + ۱۵ ط² − ۶ ط + ۱ جواب (ط² − ۲ ط + ۱)

دریافت کرو کعب ذیل کی مقداروں کا

(۳۱) ط⁶/ص⁶ − ۶ ط⁴/ص⁴ + ۱۲ ط²/ص² − ۸ ص⁰ جواب ط²/ص² − ۲ ص⁰ (۳۲) ط³ س³/ص³ لا⁶ − ۳ ط² س²/ص² لا⁵ + ۳ ط ص/س لا⁴ − ص³/س³ لا³ جواب ط س/ص لا² − ص/س لا

(۳۳) (لا + لا⁻¹)² − ۴ (لا − لا⁻¹) جواب لا − لا⁻¹ − ۲ (۳۴) دریافت کرو جذر ۹ ط^(۴م) + ۶ ط^(۳م+۱) + ۲۵ س^(۲م−۴) − ۳۰ ط^م س^(−۲) + ط^(۲م+۲) − ۱۰ ط^(م+۱) س^(م−۲) جواب ۳ ط^(۲م) − ۵ س^(م−۲) + ط^(م+۱) (۳۵) دریافت کرو کعب (ط + ۱)^(۳م) لا³ + ۶ س^ع (ط + ۱)^(۲م) لا² + ۱۲ س^(۲ع) (ط + ۱)^م لا + ۸ س^(۳ع) جواب (ط + ۱)^م لا + ۲ س^ع

(۳۶) دریافت کرو چہٹا نزول ط^۶ + ۱/ط^۶ − ۶ (ط^۴ + ۱/ط^۴) + ۱۵ (ط^۲ + ۱/ط^۲) − ۲۰ جواب ط − ۱/ط

(۳۷) دریافت کرو چوتھا نزول ط^۸ − ۳م^۲/ن ط^۶ + ۲۷م^۴/۸ن^۲ ط^۴ − ۲۷م^۶/۱۶ن^۳ ط^۲ + ۸۱م^۸/۲۵۶ن^۴ جواب ط^۲ − ۳م^۲/۴ن

(۳۸) دریافت کرو جذر اس انندہ مقدار کا بغیر عمل مین لانی قاعدہ جذر کے

{(ط^۲ − ص^۲)(س^۲ − ف^۲) − ۴ ط ص س ف}^۲ + {(ط^۲ − ص^۲) س ف + (س^۲ − ف^۲) ط ص}^۲ ۴

جواب (ط^۲ + ص^۲) × (س^۲ + ف^۲)

(۳۹) دریافت کرو سر لا کا اس انندہ مقدار کی مربع اور مکعب مین ۱ − ۲ لا + ۳ لا^۲ + ۴ لا^۳ − لا^۴ جواب (۱) ۲۰ اور جواب (۲) ۱۶۸

(۴۰) دریافت کرو سر لا^۲ کا اس مقدار کی مربع مین کہ (لا + ط)(لا + ص)(لا + س)

جواب ط^۲ ص^۲ + ط^۲ س^۲ + ص^۲ س^۲ + ۴ ط ص س (ط + ص + س)

مثالین مقادیر نزولی کے

(۱)

مقادیر انندہ کو نہایت سہل صورتون مین تبدیل کرو ∛۳۲۰ اور ∛۸۰۵ اور √۱۵۰ اور √۲۸۰۸ اور √۱۴۴ جواب ۵√۶ اور ۱۹√۵ اور ۴√۵ اور ۱۲√۲ اور ۱۳√۶ اور ۲√۹

(۲) √۷۴۸ اور √۶۰۸ اور √۶۴۰ اور √ط^م ص^ن جواب ۴√۳ اور ۲√۱۹ اور ۲√۵ اور ط ص √ط

(۳) ۱۱/۷ √۱۷/۹ √۵۰ جواب ۱/۹۳ √۶

(۴) √۸ ط ص^۲ + ص √۷۵ ط + √۳ ط (ط − ۹ ص) جواب

(۵) √۴ ط^۲ + √۲ ط + √۸ ط^۲ جواب ۹ √۳ ط

(۶) ۲ √۸ − √۷ + √۱۸ + √۵ − √۷۲ − √۵۰ جواب ۸√۲

(۷) ۲ √۵/۳ + √۶۰ − √۱۵ + ۳/۵ √۱۵ جواب ۲۸/۱۵ √۱۵

(۸) (۹) ۷ √۵۴ + ۳ √۱۶ + ۲ √۲ − ۵ √۱۲۸ جواب ۸ ∛۲ − ۳ ∛۸/۴

۱/۲ √۱۲ + ۴ √۲۷ − ۲ √۱۲ − √۱۶ جواب ۲۵/۲ √۳ (۱۰) √۱۶ + √۸۱ − ۱

− ∛۵۱۲ + ∛۱۹۲ − √۷ ۹ جواب ۱۰ (۱۱) ∛۴ × √۷ × √۶ × ۱/۲ √۵

جواب ۷ √۱۵ (۱۲) (۳ + √۵)(۲ − √۵) جواب ۱ − √۵

(۱۳) (ما۲ + ما۹ + ما۴۸) (ما۲ + ما۳) جواب ۵ + ۳ ما۳ + ۱۸ ما۳ + ۳ ما۳ + ۱۲ ما۳

(۱۴) $\frac{\text{ما۳} + ۱}{\text{ما۳} - ۲}$ اور $\frac{۸ - \text{ما۵} ۲}{۳ - ۲\text{ما۲}}$ جواب ۵ + ۳ ما۳ اور ۴ + ما۳

(۱۵) $\frac{\frac{۱}{۴} (\text{ما۵} \mp ۱)}{\frac{۱}{۲\text{ما۲}} \text{ما۵} \pm \text{ما۵}}$ جواب ما۱ ∓ ۲/۵ ما۵ (۱۶) ما لا × ما لا × ما لا جواب ما لا

(۱۷) ضرب کرو ص/لا ما ط/ص + ما س/ع کو اس ص/لا ما ط/ص − ما س/ع مین جواب ط لا۲ / ص۲ − س/ع

(۱۸) ضرب کرو ما لا۲ − ۱ + ۱/ما لا۲ کو اس ما لا۲ + ۱ + ۱/ما لا۲ مین جواب لا۲ + ۱/لا۲ + ۱

(۱۹) تقسیم کرو ۲ لا۳ + ۲ لا۲ − ۷ لا − ۳ کو اسپر ما۲ لا − ما۳ جواب ما۲ لا۲ +

(ما۲ + ما۳) لا + ما۳ (۲۰) تقسیم کرو ۴ ط + ۸ ما ط لا − ۹ ص + ۱۲ ما ص لا کو اسپر

۲ ما ط − ۳ ما ص + ۴ ما لا جواب ۲ ما ط + ۳ ما ص (۲۱) مجذور کرو س/۲ + ۱/۲ ما ط۲ − س۲

جواب ط۲/۴ + س/۲ ما ط۲ − س۲ (۲۲) گیارہوین مرتبہ کا نزول اس مقدار

(ط + ص)۳ (۲۳) نکالو جذر اس ۱۶ ط۲ ص (ط + ص)۲۷ / ط۹ جواب ۲ ط۴ ص ۹ ط۵ ۲ ط۶

(۲۴) نکالو جذر اس ۴ ۹۴ − ۴۲ ما۵ کا جواب ما۱۱ + ما۷ ۱۸ + ۲ ما۷۷

(۲۵) نکالو جذر اس ۲۸ + ۱۰ ما۳ کا جواب ۵ + ما۳ جواب ۷ − ۳ ما۵

(۲۶) نکالو جذر اس ۱۳ + ۲ ما۳۰ جواب ما۱۰ + ما۳

(۲۷) نکالو جذر اس ۱۰½ + ۲ ما۵ جواب ما۱۰ + ½ ما۲

یہ مساواتین وڈ صاحب کے جبر و مقابلہ کی ہین اور انمین بعضی مساوات کی تحریر بھی ہو گئی ہی مگر ترتیب کے لحاظ سے اونکو رہنی دیا ہی

(۱) ۲۰ − ۴ لا + ۸ = ۵ لا + ۱۰ جواب لا = ۲

(۲) ۲ لا − ۲۴ + ۳ لا − ۳۰ − ۶ لا + ۶۶ = ۰ جواب لا = ۱۲

(۳) ۷ لا + ۲۰ − ۳ لا = ۶۰ + ۴ لا − ۵۰ + ۸ لا جواب لا = ۱ $\frac{۱}{۴}$

(۴) لا − ۳ ۱/۲ = ۲ ۱/۲ + ۱۵ لا — جواب لا = − ۱/۲

(۵) ۱۲ ۳/۴ − لا/۲ = ۲لا − ۸ ۳/۴ — جواب لا = ۹

(۶) ۳لا/۴ + ۷لا/۱۵ + ۱۱لا/۶ = ۳۶۶ — جواب لا = ۱۲۰

(۷) لا/۲ + لا/۳ − لا/۴ + لا/۵ = ۷ ۵/۶ — جواب لا = ۱۰

(۸) ۹/۲لا − ۴ = ۲/۳ — جواب لا = ۲۷/۲۸

(۹) ۱/لا + ۱/۲لا + ۱/۳لا = ۷/۳ — جواب لا = ۱۱/۱۴

(۱۰) (۳لا+۱)/۲ − ۲لا/۳ = ۱۰ + (لا−۱)/۶ — جواب لا = ۱۴

(۱۱) لا + (لا−۲)/۳ = (لا−۱)/۲ + ۴ — جواب لا = ۵

(۱۲) ۲لا/۷ + (لا−۱)/۶ = لا − ۴ — جواب لا = ۷

(۱۳) (۳لا−۲)/۴ + (۷لا−۲)/۳ = ۲لا + (۴−لا)/۲ — جواب لا = ۳

(۱۴) لا/۲ + ۱/(۱ ۱/۲) = (لا−۲)/۳ + (لا+۳)/۴ — جواب لا = ۷

(۱۵) (لا−۷ ۱/۲)/۲ = (۳لا−۹)/۴ + (۲۷−۵لا)/۳ — جواب لا = ۷ ۷/۱۲

(۱۶) لا + (لا+۱۰)/۵ − ۵ ۳/۴ = (لا−۲)/۳ + لا/۴ — جواب لا = ۵

(۱۷) لا − (۳لا−۲)/۵ = ۳ − (۲لا−۵)/۳ — جواب لا = ۴

(۱۸) (۳لا−۲)/۶ − (۴لا−۱۸)/۳ = لا + ۲ — جواب لا = ۳ ۴/۷

(۱۹) ۵لا − (۲لا−۱)/۳ + ۱ = ۳لا + (لا+۲)/۲ + ۷ — جواب لا = ۸

(۲۰) (لا+۶)/۴ − (۳لا−۱۶)/۱۲ = ۲۵/۶ — جواب لا = ۸

(۲۱) (۷لا+۵)/۳ − (۴لا+۱۶)/۵ + ۶ = (۳لا+۹)/۲ — جواب لا = ۱

(۲۲) (لا+۷)/۳ − ۵ ۳/۴ = (۲لا+۵)/۷ + (۵لا−۱۰)/۸ — جواب لا = ۸

(۲۳) (۲لا+۷)/۷ − (۹لا−۸)/۱۱ = (لا−۱۱)/۲ — جواب لا = ۷

(۲۴) (۳لا−۱)/۷ + (لا−۹)/۴ − (۲لا−۷)/۱۲ = ۲ − (لا+۲۰)/۲۸ — جواب لا = ۵

(۲۵) (۷ل+۹)/۸ − (۳ل+۱)/۷ = (۹ل−۱۳)/۴ − (۲۴۹−۹ل)/۱۴ جواب ل = ۹

(۲۶) (۳ل+۳)/۱۴ + (۷ل−۴)/۱۵ − (۷ل+۱)/۲۰ = ۲ جواب ل = ۷

(۲۷) ل/۴ − ۴ ۱/۲ − (۱۲−ل)/(۵ ۱/۲) + ل/۲ = ۴۸/۱۱ جواب ل = ۸

(۲۸) (۷ل+۵)/۲۳ + (۹ل−۱)/۱۰ − (ل−۹)/۵ + (۲ل−۳)/۱۵ = ۲۳ ۱/۳ جواب ل = ۱۹

(۲۹) (۴ل+۱)/۲۹ − (۳ل−۴۰۲)/۱۲ = ۹ − (۴۷۱−۶ل)/۲ جواب ل = ۷۲

(۳۰) ۵۲ − ۵ (۲ل−۱) = ۲۷ جواب ل = ۳

(۳۱) ۴ (ل−۳) − ۷ (ل−۴) = ۶ − ل جواب ل = ۵

(۳۲) ۲۰ل − ۵۰ (۳ل−۴) = ۲۰۰ − ۲۰ (۴ل−۵) − ۵۰ (۳ل−۴) جواب ل = ۳

(۳۳) ۴ (۵ل−۳) − ۶۴ (ل−۲) − ۳ (۱۲ل−۴) = ۹۶ جواب ل = ۶

(۳۴) ۱۰ (ل+۱/۲) − ۶ل (۱/ل − ۱/۳) = ۲۳ جواب ل = ۲

(۳۵) ۴/۵ ل − ۵/۴ ل + ۱۸ = ۱/۹ (۴ل+۱) جواب ل = ۲۰

(۳۶) ۱/۳ (۲ل−۱۰) − ۱/۱۱ (۲ل−۴۰) = ۱۵ − ۱/۵ (۵۷−ل) جواب ل = ۱۷

(۳۷) ۱/۱۲ ل − ۱/۸ (ل−۸) − ۱/۴ (ل+۵) + ۱۱/۴ = ۰ جواب ل = ۱۲

(۳۸) ۱/۷ (ل − ۱/۲) − ۱/۵ (۲/۳ − ل) = ۱ ۱۳/۳۰ جواب ل = ۴ ۷/۹

(۳۹) ۱/۴ (۴ + ۲/۳ ل) − ۱/۷ (۲ل − ۱/۳) = ۲۱/۲۸ جواب ل = ۲/۳

(۴۰) ۱/۱۴ (۳ل + ۲/۳) − ۱/۷ (۴ل − ۶ ۲/۳) = ۱/۲ (۵ل − ۶) جواب ل = ۱ ۲/۵

(۴۱) ۲ل − ۴ ۴/۵ × (۷ل − ۹)/۳ = ۴/۵ (۶ + (ل − ۱)/۳) جواب ل = ۷ ۱/۱۳

(۴۲) ۱/۳ (۲/۳ ل + ۴) − (۷ ۱/۲ − ل)/۳ = ل/۲ (۱ − ۶/ل) جواب ل = ۳

(۴۳) ۲ ۱/۳ {۲۸ − (۲۴ + ل/۸)} = ۲ ۱/۲ (۲ ۱/۳ + ل/۴) جواب ل = ۴

یہان سی کچہہ خاص ترکیب کا استعمال کرنا پڑتا ہی

تا کہ مخرج مین سی حرف مجہول زائل ہو جاوی

(۴۴) (۱۰ل + ۱۷)/۱۸ − (۱۲ل + ۲)/(۱۱ل − ۸) = (۵ل − ۴)/۹ جواب ل = ۲۰

(۴۵) (۶ل + ۱۳)/۱۵ − (۳ل + ۵)/(۵ل − ۲۵) = ۲ل/۵ جواب ل = ۲۰

(۴۶) ۴ل/(ل − ۵) − (۴ل − ۲۰)/ل = ۱۵/ل جواب ل = ۳ ۲/۱۱

(۴۷) (۵ل + ۳)/(ل − ۱) + (۲ل − ۳)/(۴ل − ۲) = ۹ جواب ل = ۳ ۱/۲

(۴۸) (۶ل + ۳۰)/(ل + ۱) + (۸ل + ۶۰)/(ل + ۳) = ۱۴ + ۴۸/(ل + ۱) جواب ل = ۳

(۴۹) ۱/(ل − ۱) − ۲/(ل + ۷) = ۱/(۷(ل − ۱)) جواب ل = ۷

(۵۰) ل/(ل + ۱) − ۳ل/(ل + ۲) = − ۲ جواب ل = − ۴/۵

(۵۱) (۴ل + ۸)/(۲ل + ۱) − (۲ل + ۳۸)/(ل + ۱۲) = ۱ جواب ل = ۲

(۵۲) (۵ل² + ل − ۳)/(۵ل − ۴) = (۷ل² − ۳ل − ۹)/(۷ل − ۱۰) جواب ل = ۳

(۵۳) (۴ل − ۱۷)/۹ − (۳ ۲/۳ − ۲۲ل)/۳۳ = ل − ۴/ل (۱ − ل²/۵۴) ضمیمہ دیکھو اور اسمیں اسکا حل ہے جواب ل = ۳

(۵۴) (۴ل − ۱۷)/(ل − ۴) + (۱۰ل − ۱۳)/(۲ل − ۳) = (۸ل − ۳۰)/(۲ل − ۷) + (۵ل − ۴)/(ل − ۱) ضمیمہ دیکھو اور اسمیں اسکا حل ہی جواب ل = ۲ ۱/۲

(۵۵) ل/(ل − ۲) + (ل − ۹)/(ل − ۷) = (ل + ۱)/(ل − ۱) + (ل − ۸)/(ل − ۶) جواب ل = ۴

(۵۶) ۱/۳ + (۷ل − ۱)/(۳ل − ۱ ۱/۲) = ۸/۴ × (ل − ۱/۲)/(ل − ۲) جواب ل = ۱ ۱/۱۳

(۵۷) ل/۲ − ((۲ل − ۳) ۱/۴ − (۳ل − ۱) ۱/۴)/((ل − ۱) ۱/۲) = ۳/۲ × (ل² + ۲)/(۳ل − ۱) جواب ل ۴ ۱/۳

(۵۸) ۳ل/۲ − (۸۱ ل² − ۹)/((۳ل − ۱)(ل + ۳)) = ۳ل − ۳/۲ × (ل² − ۱)/(ل + ۳) − (۵۷ − ۱۳ل)/۲ ضمیمہ دیکھو جواب ل = ۱۰

(۵۹) ل/ط + ل/ص = س جواب ل = ط ص س/(ص + ط)

(۶۰) ط ل/ص + س ل/ر + ج = ف ل + س ل/ک + ن جواب ل = ص (ن − ج)/(ط − ص ف)

(۶۱) ط/(ص ل) + ص/(ط ل) = ط² + ص² جواب ل = ۱/(ط ص)

(۶۲) ۱/(ط ص − ط ل) + ۱/(ص س − ص ل) = ۱/(ط س − ط ل) جواب ل = ص/ط (ط − ص + س)

(۶۳) ط + ل + √(۲ط ل + ل²) = ص جواب ل = (ط − ص)²/۲ص

(۶۴) ط + لا + √(ط² + لا²) = ص — جواب لا = ص/۲ (۱ − ط/(ص − ط))

(۶۵) √لا + √(ط − √(ط لا + لا²)) = √ط — جواب لا = ۹ط/۱۶

(۶۶) ط + لا + √(ط² + ص لا + لا²) = ص — جواب لا = ص × (ص − ۲ط)/(۳ص − ۲ط)

(۶۷) √(ط − لا) + ۲√(ط + لا) = √(ط − √(ط² − ط لا + لا²)) — جواب لا = ۶۴ط/۱۰۲۵

(۶۸) √(۴ط + لا) = ۲√(ص + لا) − √لا — جواب لا = (ط − ص)²/(ص − ۲ط)

(۶۹) √(۱ + لا + لا²) = ط − √(۱ − لا + لا²) — جواب لا = ط/۲ √(۱ − ۳/(ط² − ۱))

(۷۰) √(ط + لا) + √(ط − لا) = ص (ط² − لا²)^(۱/۴) — جواب لا = ط ص/(ص² − ۲) × √(ص² − ۴)

(۷۱) ط/(ص + لا) + ط/(ص − لا) = س — جواب لا = ص √(۱ − ۲ط/(ص س))

(۷۲) ۱/ط √(ط + لا) + √(ط + لا)/لا = ۱/ص √لا — جواب لا = ط ص^(۲/۳)/(ط^(۲/۳) − ص^(۲/۳))

(۷۳) √(ط² + لا²) + √(ط² − لا²) = ص — جواب لا = ص √((ط/ص)² − (۱/۲)²)

(۷۴) √لا + √(لا − √(۱ − لا)) = ۱ — جواب لا = ۱۶/۲۵

(۷۵) ۱ + √(۱ + لا) − √(۱ + لا + √(۱ − لا)) = ۰ — جواب لا = −۲۴/۲۵

(۷۶) لا + √(ط² + لا²) = م ط²/√(ط² + لا²) — جواب لا = ط × (م − ۱)/√(۲م − ۱)

(۷۷) √(۴ط + لا) + √(ط + لا) = ۲√(لا − ۲ط) — جواب لا = ۱۷ط/۸

(۷۸) √(۱ + لا) + √(۱ + لا + √(۱ − لا)) = √(۱ − لا) — جواب لا = ۲۴/۲۵

(۷۹) √(لا + √لا) − √(لا − √لا) = ط √(لا/(۱ + √لا)) — جواب لا = ۱/۴ (۱ − ط + ۱/(ط − ۱))²

(۸۰) ط لا + √(ط² لا² + ص²) = √(ص² + ط لا √(۴ص² + لا²)) — جواب لا = ۸ط ص/√(۱ − ۳ط²)

(۸۱) (ط² − لا²)/(ط + √(ط² + لا²)) = ص − √(ط² + لا²) — جواب لا = ط²/(ط − ص) √(ص²/ط − ۳)

(۸۲) (ط لا − ص²)/(ط √(لا + ص)) = (√(ط لا) − ص)/م − س — جواب لا = ۱/ط (ص − م س/(م − ۱))²

(۸۳) √(۱ + لا + لا²) + √(۱ − لا + لا²) = م لا — جواب لا = ۲/م √((م² − ۱)/(م² − ۴))

(۸۴) $\sqrt{ط^{۲} - ل^{۲}} + ل \sqrt{ط^{۲}} = ۱ \, ط^{۲} \sqrt{ل^{۲} - ۱}$ جواب $ل = \sqrt{\dfrac{ط^{۲} - ۱}{ط^{۲} + ۳}}$

(۸۵) $(ل + ط)^{\frac{۱}{۲}} = (ص^{۲} + ۸ ط ل + ل^{۲})^{\frac{۱}{۳}}$ جواب $ل = \dfrac{ط^{۲} - ص^{۲}}{۶ ط}$

(۸۶) $\sqrt{ل^{۲} + ۲ ط ل} + \sqrt{ل^{۲} - ۲ ط ل} = \dfrac{م ط ل}{\sqrt{ل^{۲} + ۲ ط ل}}$ جواب $ل = ط \left(\dfrac{م - ۲}{۲} + \dfrac{۲}{م - ۲} \right)$

(۸۷) $\dfrac{۱ - ط ل}{۱ + \sqrt{ط ل}} = ۴ + \dfrac{\sqrt{ط ل} - ۱}{۲}$ جواب $ل = \dfrac{۸۱}{ط}$

(۸۸) $\sqrt{(ل + ۲ ط)^{۲} + ص^{۲}} + \sqrt{(ل - ۲ ط)^{۲} + ص^{۲}} = ۴ ط$ جواب $ل = \sqrt{ط^{۲} + \dfrac{ص^{۲}}{۳}}$

(۸۹) $\sqrt{ط + \sqrt{ل^{۲} - ط^{۲}}} + \sqrt{ط - \sqrt{ل^{۲} - ط^{۲}}} = م \sqrt{\dfrac{ل + ط}{\sqrt{ل^{۲} - ط^{۲}} + ط}}$ جواب $ل = م \sqrt{\dfrac{م^{۲} - ۵}{۴}}$

(۹۰) $\dfrac{ط ل - ۱}{ط ل + ۱} \times \sqrt{\dfrac{ص ل + ۱}{ص ل - ۱}} = ۱$ جواب $ل = \dfrac{۱}{ط} \sqrt{۱ - \dfrac{ط^{۲}}{ص^{۲}}}$

(۹۱) $\dfrac{ل^{۲} + ل + ۱}{ل^{۲} + ل - ۱} = \dfrac{۶۲}{۶۳} \times \dfrac{ل + ۱}{ل - ۱}$ جواب $ل = \dfrac{۱}{۵}$

(۹۲) $\left(\dfrac{ل + ط}{ل - ط} \right)^{۲} = ۱ + \dfrac{س ل}{ص ط}$ جواب $ل = ط \left(۱ \pm ۲ \sqrt{\dfrac{ص}{س}} \right)$

(۹۳) $\dfrac{ل^{۳} + ۱}{(ل + ۱)^{۲}} + \dfrac{ل^{۳} - ۱}{(ل - ۱)^{۲}} = ط$ جواب $ل = \sqrt{\dfrac{ط - ۲}{ط + ۴}}$

(۹۴) $\sqrt{(ل + ۱)^{۲} - ط ل} + \sqrt{(ل - ۱)^{۲} + ط ل} = ل$ جواب $ل = ۲ \sqrt[۳]{\dfrac{(ط - ۱)(ط - ۳)}{}}$

(۹۵) $\dfrac{۱}{\sqrt{ل - ۱} + ۱} + \dfrac{۱}{\sqrt{ل + ۱} - ۱} = \dfrac{۱}{ل}$ جواب $ل = \dfrac{۱}{۲} \sqrt{۳}$

(۹۶) $ط + ص = \dfrac{۲ ط \sqrt{ل^{۲} + ۱}}{ل + \sqrt{ل^{۲} + ۱}}$ جواب $ل = \dfrac{۱}{۲} \left(\sqrt{\dfrac{ط}{ص}} - \sqrt{\dfrac{ص}{ط}} \right)$

(۹۷) $ط (ل - ۱) + \sqrt{ط^{۲} + ۱} = ط \sqrt{ل^{۲} + ۱}$ جواب $ل = \dfrac{\sqrt{ط^{۲} + ۱} \times \sqrt{ط^{۲} + ط - ۱} \sqrt{ط + ۱}}{۴ ط}$

(۹۸) $\dfrac{۱ + \sqrt{ل^{۲} - ۱}}{۱ + ۲ ط \sqrt{ل^{۲} - ۱}} = \dfrac{\sqrt{ل^{۲} - ۱} - ۱}{ل^{۲} - ۲}$ جواب $ل = \sqrt{۱ + ۴ (ط - ۱)^{۲}}$

(۹۹) $\sqrt{\dfrac{ل}{۴} + ۳} - \sqrt{\dfrac{ل}{۴} - ۳} = \sqrt{\dfrac{ل ۲}{۳}}$ جواب $ل = ۹ \sqrt{۲}$

(۱۰۰) √(لا − ۳ط/۴) + √(۳ط لا − لا) = ۳ط/۲ √(لا۴ − ۱)　　جواب لا = ۱/۲ × (۱ − ۲ط)/(۱ + ط)

(۱۰۱) √(۱ + لا)۳ + √(۱ − لا)۳ = √۲۳　　ضمیمہ دیکھو　　جواب لا = ۱

(۱۰۲) (لا + ۱)/(۱ + لا + √(۱ + لا)) + (لا − ۱)/(۱ − لا + √(۱ + لا۲)) = ط　　جواب لا = √((ط − ۲)۲ − ۱)

(۱۰۳) √(لا۲ + ۹) + √(لا۲ − ۹) = ۴ + √۳۴　　جواب لا = ۵.

(۱۰۴) √(ط۲ لا۲ + ص √(ط ص لا + ۴ ط۲ لا۲ + ص √(۲ ط ص لا + ۵ ط۲ لا۲))) = ط لا + ص　　جواب لا = − ص/۲ط

(۱۰۵) (۱ + لا + √(۲ لا + لا۲))/(۱ − لا + √(۲ لا + لا۲)) = ۱ − ط لا　　جواب لا = (ط + ۲)۲/(۴ ط (ط + ۱))

(۱۰۶) √(ط + ۱) ((لا + ۱)/(لا − ۱))^(۱/۴) + √(ط − ۱) ((لا − ۱)/(لا + ۱))^(۱/۴) = ۲ (ط۲ − ۱)^(۱/۴)　　جواب لا = ط

(۱۰۷) √((ط + ۱)۲ + لا (ط − ۱)) + √((ط − ۱)۲ + لا (ط + ۱)) = ۲ط　　جواب لا = ۸

(۱۰۸) (۱ + لا + √(۲ لا + لا۲))/(۱ + لا + √(۲ لا + لا۲)) = ط . (√(۲ + لا) + √لا)/(√(۲ + لا) − √لا)　　جواب لا = ۱/۲ (ط/۲ + ۱/ط۲) − ۱

(۱۰۹) (ط + لا + √(۲ ط لا + لا۲))/(ط + لا − √(۲ ط لا + لا۲)) = ص۲　　دیکھو ضمیمہ　　جواب لا = ط/۲ص (ص − ۱)۲

(۱۱۰) (ط − لا + √(۲ ط لا − لا۲))/(ط − لا) = ص　　دیکھو ضمیمہ　　جواب لا = ط − ط/√(۱ + (ص − ۱)۲)

(۱۱۱) (ط − √(۲ ط لا − لا۲))/(ط + √(۲ ط لا − لا۲)) = ص　　جواب لا = ط (۱ − √ص)۲/(۱ + ص)

(۱۱۲) √(ط − √(ط − √(ط۲ − ط لا)))/√(ط + √(ط − √(ط۲ − ط لا))) = ص　　جواب لا = ط (۱ − {۲√ص/(ص + ۱)}۴)

(۱۱۳) (√(ط۲ + لا۲) − ط)/(√(ط۲ − لا۲) + ط) = ص　　جواب لا = ۲ط√ص/(۱ + ص۲) √(۱ − ص۲)

(۱۱۴) √(ط + لا) + √(ط − لا) = √[۴](ط۲ + لا۲) + √[۴](ط۲ − لا۲)　　جواب لا = ۲ط/۳ √۵

(۱۱۵) $\frac{ط+لا}{\sqrt{ط}+\sqrt{ط+لا}} + \frac{ط-لا}{\sqrt{ط}+\sqrt{ط-لا}} = \sqrt{ط}$ جواب لا = $\frac{ط}{۲}\sqrt{۳}$ یا ۰

(۱۱۶) $\frac{۱-لا+\sqrt{۱}}{۱+\sqrt{لا-۱}} + \frac{۱+\sqrt{لا-۱}}{۱-\sqrt{لا+۱}} = ط$ جواب لا = $\frac{۴}{ط}\sqrt{۱-(\frac{۲}{ط})^{۲}}$

(۱۱۷) $\frac{لا^{۲}+\sqrt{لا^{۲}-لا}\sqrt{۱-لا}}{لا^{۲}-\sqrt{لا^{۲}-لا}\sqrt{۱-لا}} = \frac{۱}{\sqrt{۱-لا}}$ جواب لا = $\frac{۱۶}{۲۵}$

(۱۱۸) $(۱+لا)\sqrt{۱+ط}+(۱-لا)\sqrt{۱-ط} = ۲\sqrt{۱+لا^{۲}}$ جواب لا = $\frac{۱}{ط}-\sqrt{(\frac{۱}{ط})^{۲}-۱}$

(۱۱۹) $\sqrt[۴]{لا^{۴}-۱}+لا\sqrt{لا^{۲}-۱} = لا^{۲}$ جواب لا = $\sqrt[۴]{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}}$

(۱۲۰) $\sqrt{لا}+\sqrt{۲ط-لا} = \sqrt{لا+\sqrt{۲ط^{۲}-۳طلا+لا^{۲}}}$ جواب لا = ۲ط یا ط یا $\frac{۹۶۱ط}{۱۰۲۵}$

(۱۲۱) $\frac{۲}{۱۹}\sqrt{لا^{۲}+۹۳لا+۳۷۴}-\sqrt{لا^{۲}+۲۰لا+۸۰} = \sqrt{\frac{۲۲+لا}{۱۰+لا}}$ ضمیمہ دیکھو جواب لا = ۸۰

(۱۲۲) $\frac{۲۴۲+۳۲۴\sqrt{لا^{۳}}}{۱۶لا-۳} = (۴\sqrt{لا}-\sqrt{۳})^{۴}$ دیکھو ضمیمہ جواب لا = ۳

(۱۲۳) $(لا+ط+\sqrt{لا^{۲}+۲طلا+ص^{۲}})^{۳}+(لا+ط-\sqrt{لا^{۲}+۲طلا+ص^{۲}})^{۳} = ۱۴(لا+ط)^{۳}$

جواب لا = -ط یا لا = ± $\sqrt{ص^{۲}-ط^{۲}}$ - ط اسکو بھی ضمیمہ مین دیکھو

(۱۲۴) ص $(\frac{ط-ص}{لا}+۱)(۱+\frac{ط-۲ص}{لا}) = \frac{ط^{۲}}{لا^{۲}}$ - ط جواب لا = ص یا $\frac{ط-ص}{ط+ص}$ (ط-۲ص) ضمیمہ مین دیکھو

(۱۲۵) $(\frac{لا+ط}{لا+ص})^{۲}-\frac{ط-ص}{۲(لا+س)} = ۱$ دیکھو ضمیمہ کو جواب لا = $\frac{۴س(س-ص)-ص(ط-ص)}{ط+۲ص-۴س}$

(۱۲۶) $\frac{لا+ط}{لا+ص} = (\frac{ط+۲لا+س}{۲لا+ص+س})^{۲}$ دیکھو ضمیمہ کو جواب لا = $\frac{س^{۲}-طص}{ط+ص-۲س}$

(۱۲۷) $\frac{(ط+س)(لا+ط)}{(ط+س)(لا-ط)} + \frac{لا+ط}{لا} = \frac{ط}{لا-۲س-ط}$ جواب لا = $\frac{ط}{س} \times \frac{س+۱}{۲س+۳}$

(۱۲۸) $(\frac{لا-ط}{لا-ص})^{۳} = \frac{لا-۲ط+ص}{لا-۲ص+ط}$ جواب لا = $\frac{ط+ص}{۲}$

(۱۲۹) $لا+ط+\sqrt[۳]{۳طصلا} = ص$ دیکھو ضمیمہ جواب لا = $(\sqrt[۳]{ص}-\sqrt[۳]{ط})^{۳}$

(۱۳۰) (لا − ط) لو لا − (لا + ط) لو ص = ص (لو لا − لو ص) دیکھو ضمیمہ جواب لا = ص یا (لو ط + لو ص)^۲

(۱۳۱) ط + (ص + لو لا) لو لا = (ص − لو لا) لو $\sqrt{۲ط + لا}$ جواب لا = ط/۴ لو ط/۲ص ، ط ص/۲ لو ۲/ط ص − ط دیکھو ضمیمہ

(۱۳۲) $\frac{۲ط لو \sqrt{۱ + لا}}{۱ − لا + لو \sqrt{۱ + لا}}$ = ط + ص جواب لا = $\frac{(ط − ص)^۲}{۸ ط ص}$ $\left\{ لو \sqrt{۱ + \frac{۸ ط ص}{(ط − ص)^۲}} − ۱ \right\}^۲$ دیکھو ضمیمہ

(۱۳۳) $\frac{۲ لا^۲ + ۱ + لا ۸ لو \sqrt{۴ لا^۲ + ۳}}{۲ لا^۲ + ۳ + لا لو \sqrt{۴ لا^۲ + ۳}}$ = ط جواب لا = $\frac{۳ ط − ۱}{لو \sqrt{(۱ − ط)(۹ ط − ۱)}}$ دیکھو ضمیمہ

(۱۳۴) $\frac{ط (۱ − ط^۲) + ط^۲ − لا لو \sqrt{۲ ط^۲ − ۱}}{ط (۱ − ط^۲) + ط^۲ + لا لو \sqrt{۲ ط^۲ − ۱}}$ = (۱ − ط^۲) (ط + لا)^۲ − ۲ ط لا جواب لا = لو $\sqrt{۱ − ط^۲}$ × $\frac{۱ ± لو \sqrt{ط^۲ − ۱}}{ط^۲ + لو \sqrt{۲ ط^۲ − ۱}}$ دیکھو ضمیمہ

(۱۳۵) $\frac{۱ − ط لا + لو \sqrt{۱ + ط^۲} − ط لو \sqrt{۱ + لا^۲}}{۱ − ط لا + لو \sqrt{۱ + لا^۲} − لا لو \sqrt{۱ + ط}}$ = ط جواب لا = ۱/ط یا $\frac{۲}{ط (ط^۲ − ۳ ط)}$ $\left\{ ط − ۱ لو \sqrt{۱ + ط^۲} − (ط^۲ − ط − ۱) − \frac{۱}{ط} \right\}$ دیکھو ضمیمہ

(۱۳۶) $\left(\frac{۲ لا + ۳}{۲ لا − ۳}\right)^{\frac{۱}{۳}} + \left(\frac{۲ لا − ۳}{۲ لا + ۳}\right)^{\frac{۱}{۳}}$ = $\frac{۸}{۱۳}$ × $\frac{۴ لا^۲ + ۹}{۴ لا^۲ − ۹}$ جواب لا = ۱ $\frac{۱۳}{۱۴}$ دیکھو ضمیمہ

(۱۳۷) $\left\{ \frac{ط ص}{۲} (ص^۲ − س^۲) + (ص^۲ + س^۲) س لا \right\}$ لو $\sqrt{\frac{ط^۲}{۴} (ص − س)^۴ + (ص^۲ + س^۲)^۲ لا^۲}$

= $\left\{ \frac{ط ص}{۲} (ص − س)^۲ − (ص^۲ + س^۲) س \right\}$ لو $\sqrt{\frac{ط^۲}{۴} (ص + س)^۴ + (ص^۲ + س^۲)^۲ لا^۲}$ جواب لا = $\frac{ط}{۲} \cdot \frac{س^۲ − ص^۲}{س^۲ + ص^۲}$

(۱) ۳ لا + ۵ ی = ۸
۴ لا + ۳ ی = ۷
جواب لا = ۱ ، ی = ۱

(۲) ۴ لا − ۳ ی = ۲
۵ لا − ۲ ی = ۹ ۱/۲
جواب لا = ۳ ۱/۲ ، ی = ۴

(۳) ۹ لا − ۴ ی = ۸
۱۳ لا + ۷ ی = ۱۰۱
جواب لا = ۴ ، ی = ۷

(۴) ۴۵ لا + ۸ ی = ۳۵۰
۲۱ ی − ۱۳ لا = ۱۳۲
جواب لا = ۶ ، ی = ۱۰

(۵) $\frac{۱}{۸}$ لا + $\frac{۱}{۹}$ ی = ۴۲
$\frac{۱}{۹}$ لا + $\frac{۱}{۸}$ ی = ۴۳
جواب لا = ۱۴۴ ، ی = ۲۱۶

(۶) ۲ ۱/۴ ں + ۲ ۱/۳ ی = ۴۸
۴ ۱/۲ ں + ۱۰ ی = ۱۲۶
جواب ں = ۸
ی = ۹

(۷) ۲ں − (ی − ۳)/۵ = (۵ں − ۲)/۲
۲ی − (ں − ۵)/۳ = (۷ی − ۷)/۲
جواب ں = ۲
ی = ۳

(۸) (ں + ۱۱)/۱۰ + (ی − ۴)/۶ = ں − ۷
(ں + ۵)/۷ − (ی − ۷)/۳ = ۳ی − ں
جواب ں = ۹
ی = ۴

(۹) (ں + ۲)/۷ + (ی − ں)/۴ = ۲ں − ۸
(۲ی − ۳ں)/۳ + ۲ی = ۳ں + ۴
جواب ں = ۵
ی = ۹

(۱۰) (ں + ۵)(ی + ۷) = (ں + ۱)(ی − ۹) + ۱۱۲
۲ں + ۱۰ = ۳ی + ۱
جواب ں = ۳
ی = ۵

(۱۱) (۲ں + ی)/۹ + (۷ی + ۶ں + ۱۱)/۱۸ = ۱۹/۲ − (۵ں − ۱۷)/۶
۳/۷ (۵ں + ۳ی + ۲) = ۱/۲ (۹ی + ۶)
جواب ں = ۷
ی = ۴

(۱۲) (۳ں − ۵ی)/۳ − (۲ں − ۸ی − ۹)/۱۲ = ی/۲ + ۱/۳ + ۱/۴
۳ ۱/۲ (ں/۷ + ی/۴ + ۱ ۱/۳) = ۳ ۱/۳ (۴ں − ی/۸ − ۲۴) جواب ں = ۷
ی = ۴

(۱۳) ں + ی = ۳۸ ۱/۵ − (۴ں + ۱۲ی)/۱۰
۱/(۲۱ں) + ۱/(۲۲ی) = ۴۵۲/(۴۶۲ ں ی)
جواب ں = ۱۰
ی = ۱۱

(۱۴) ۱۶ں + ۶ی − ۱ = (۱۲۸ں² − ۱۸ی² + ۲۱۷)/(۸ں − ۳ی + ۲)
(۱۰ں + ۱۰ی − ۳۵)/(۲ں + ۲ی + ۳) = ۵ − ۵۴/(۳ں + ۲ی − ۱)
جواب ں = ۶
ی = ۵

(۱۵) $\frac{۲}{۳}\left(ل - \frac{۳}{۵}ی\right) + \frac{ل + \frac{۱}{۵}ی}{۶} = \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۲}\left(\frac{\frac{۴}{۵}ی - ۲}{۶} - (ل - ی)\right)$ جواب $ل = ۳$

$ل - ۲ی - \frac{۳ی - ۱۵ل}{۲} = \frac{۱۱}{۲}(ل + ی) + ۳(ل - ی)$ $ل = -۲\frac{۱}{۳}$

(۱۶) $\frac{۴۲ل}{۱۰} + \frac{۳۲}{۱۰۰}ی - \frac{\frac{۳۶}{۱۰۰}ل - \frac{۵}{۱۰۰}}{\frac{۵}{۱۰۰}} = \frac{۸}{۱۰}ل + ۲\frac{۶}{۱۰} + \frac{۵}{۱۰۰۰}ی$

$\frac{\frac{۴}{۱۰۰}ی + \frac{۱}{۱۰}}{\frac{۳}{۱۰}} = \frac{\frac{۷}{۱۰۰}ل - \frac{۱}{۱۰}}{\frac{۶}{۱۰}}$

جواب $ل = ۱۰$ اور $ی = ۵$

(۱۷) $طل = صی$ ، $ل + ی = س$ جواب $ل = \frac{ص س}{ط + ص}$ ، $ی = \frac{ط س}{ط + ص}$

(۱۸) $طل + صی = م$ ، $ط'ل + ص'ی = م'$ جواب $ل = \frac{ص'م - صم'}{طص' - ط'ص}$ ، $ی = \frac{طم' - ط'م}{طص' - ط'ص}$

(۱۹) $طل - صی = ط^۲$ ، $صل - طی = ص^۲$ جواب $ل = ط + \frac{ص^۲}{ص + ط}$ ، $ی = \frac{ط ص}{ص + ط}$

(۲۰) $\frac{م}{ل} + \frac{ن}{ی} = ط$ ، $\frac{ن}{ل} + \frac{م}{ی} = ص$ جواب $ل = \frac{م^۲ - ن^۲}{م ط - ن ص}$ ، $ی = \frac{م^۲ - ن^۲}{م ص - ن ط}$

(۲۱) $ط(ل + ی) + ص(ل - ی) = س(ل + ی) + ک(ل - ی) = ۱$ جواب $ل = \frac{ط - س - (ص - ک)}{۲(طک - صس)}$ ، $ی = \frac{ط + ص - (س + ک)}{۲(صس - طک)}$

(۲۲) $\sqrt{ط}ل + \sqrt{ص}ی = \frac{۱}{۲}(ل + ی) = ط + ص$ جواب $ل = (\sqrt{ط} \pm \sqrt{ص})^۲$ ، $ی = (\sqrt{ط} \mp \sqrt{ص})^۲$

(۲۳) $طلی = س(صل + طی)$ ، $صلی = س(طل - صی)$ جواب $ل = \frac{ط^۲ + ص^۲}{ط^۲ - ص^۲} \times س$ ، $ی = \frac{ط^۲ + ص^۲}{۲طص} \times س$

(۲۴) $ط(ل^۲ + ی^۲) - ص(ل^۲ - ی^۲) = ۲ط$ ، $(ل^۲ - ی^۲)(ط^۲ - ص^۲) = ۴طص$ جواب $ل = \sqrt{\frac{ط + ص}{ط - ص}}$ ، $ی = \sqrt{\frac{ط - ص}{ط + ص}}$

(۲۵) $\sqrt{ی} - \sqrt{ط - ل} = \sqrt{ی - ل}$ ، $۲\sqrt{ی - ل} + ۲\sqrt{ط - ل} = ۵\sqrt{ط - ل}$ جواب $ل = \frac{۴}{۵}ط$ ، $ی = \frac{۵}{۴}ط$

(۲۶) $\frac{لا}{ط} + \frac{ى}{ص} = ۱ - \frac{لا}{س}$

$\frac{ى}{ط} + \frac{لا}{ص} = ۱ + \frac{ى}{س}$

جواب $لا = \frac{(ط ص + ط س - س ص) ط ص س}{ط^۲ ص^۲ + ط^۲ س^۲ - ص^۲ س^۲}$

$ى = \frac{(ط س - ط ص - ص س) ط ص س}{ط^۲ ص^۲ + ط^۲ س^۲ - ص^۲ س^۲}$

(۲۷) $(ط^۲ - ص^۲)(۳ لا + ۲ ى) = (۴ ط - ص) ۲ ط ص$

$ط^۲ لا - \frac{ط ص^۲ س}{ط + ص} + (ط + ص + س) ص ى = ص^۲ لا + (ط + ۲ ص) ط ص$

جواب $لا = \frac{ص ط}{ط - ص}$

$ى = \frac{ص ط}{ط + ص}$

(۲۸) $لا (ص س - لا ى) = ى (لا ى - ط س)$

$لا ى (ط ى + ص لا - لا ى) = ط ص س (لا + ى - س)$

جواب $لا = \pm \sqrt{ط س}$

$ى = \pm \sqrt{ص س}$

دیکھو ضمیمہ میں

(۲۹) $لا^۲ + ى (لا ى - ۱) = ۰$

$ى^۳ - لا (لا ى + ۱) = ۰$

جواب $لا = \left(\frac{۱}{۲}(\sqrt{۲} - ۱)\right)^{\frac{۱}{۳}}$

$ى = \frac{۱}{\sqrt[۳]{۲ (\sqrt{۲} - ۱)}}$

دیکھو ضمیمہ

(۳۰) $\sqrt{لا + ى} - \sqrt{لا - ى} = ط$

$\sqrt[۴]{لا + ى} + \sqrt[۴]{لا - ى} = ص$

جواب $لا = \frac{ط^۲}{۴} + \left\{\frac{۱}{۴}\left(ص^۲ + \frac{ط^۲}{ص^۲}\right)\right\}^۲$

$ى = \frac{ط^۲}{۴}\left(ص^۲ + \frac{ط^۲}{ص^۲}\right)$

(۳۱) $(لا^۲ - لا ى + ى^۲)(لا^۲ + ى^۲) = ۹۱$

$(لا^۲ - لا ى + ى^۲)(لا^۲ + لا ى + ى^۲) = ۱۳۳$

جواب $لا = ۲$ یا $- ۳$

$ى = ۳$ یا $- ۲$

(۳۲) $ى + ۳ \sqrt{ى} \left\{ ۲ \sqrt{ط + ص لا} - \sqrt[۳]{ى} \right\} = \sqrt[۳]{ط + ص لا} = ۲ ط$

$۲ ط \sqrt{ط - ص لا} = \frac{ى - ۳ \sqrt{ى} \cdot \sqrt[۳]{ط^۲ - ص^۲ لا^۲}}{\sqrt[۳]{ى} - \sqrt{ط + ص لا}}$

جواب $لا = \frac{ط - ۱}{ص}$

$ى = \left\{\sqrt[۳]{۲ ط - ۱} + ۱\right\}^۳$

(۱) $۳ لا - ى + ع = ۱۷$

$۵ لا + ۳ ى - ۲ ع = ۱۰$

$۷ لا + ۴ ى - ۵ ع = ۳$

جواب $لا = ۴$

$ى = ۰$

$ع = ۵$

(۲) $۳ لا + ۴ ع = ۵۷$

$۵ لا + ۳ ى = ۶۵$

$۲ ى - ع = ۱۱$

جواب $لا = ۷$

$ى = ۱۰$

$ع = ۹$

(۳) ی + ۱/۲ ل = ۴۱
ل + ۱/۴ ع = ۲۰ ۱/۲
ی + ۱/۵ ع = ۲۴

جواب
ل = ۱۸
ی = ۳۲
ع = ۱۰

(۴) ل + ۱/۲ (ی + ع) = ۱۰۲
ی + ۱/۳ (ع + ل) = ۷۸
ع + ۱/۴ (ل + ی) = ۶۱

جواب
ل = ۶۲
ی = ۴۶
ع = ۳۴

(۵) (ل + ی)/ع = ۴۴/۱۷
(ل − ی)/ع = ۲۰/۱۷

جواب
ل = ۱۲۸
ی = ۴۸
ع = ۶۸

(+) (ل² − ی²)/ع = ۳۵۲۰/۱۷

(۶) ۴ل − ۵ی + ۴ع = ۷ل − ۱۱ی + ۹ع = ل + ی + ۲ع = ۳

جواب
ل = ۲
ی = ۱
ع = ۰

(۷) (۶ی − ۴ل)/(۳ع − ۷) = (۵ع − ل)/(۲ی − ۳ع) = (ی − ۲ع)/(۳ی − ۲ل) = ۱

جواب
ل = ۱۰
ی = ۷
ع = ۳

(۸) ل + ۱/۲ (ی + ع) = ی + ۲/۳ (ل + ع) = ع + ۳/۴ (ل + ی) = ل + ی + ع − ۴

جواب
ل = ۱۰
ی = ۶
ع = ۲

(۹) ۲/ل + ۱/ی = ۳/۲
۳/ع − ۲/ی = ۲
۱/ل + ۱/ع = ۴/۳

جواب
ل = ۱
ی = −۲
ع = ۳

(۱۰) ۲/ل − ۵/۳ی + ۱/ع = ۳ ۴/۲۷
۱/۴ل + ۱/ی + ۲/ع = ۶ ۱۱/۷۲
۴/ع + ۱/ی − ۵/۹ل = ۱۲ ۱/۳۶

جواب
ل = ۶
ی = ۹
ع = ۱/۳

(۱۱) (۴ل − ی)/۵ = (ل ی + ۸۶)/(۳ل + ۲ی)
(ل − ۲ی)/۲ = (ل ع + ۴ ۱/۲)/(ل + ۳ع)
(ی + ۳ع)/۷ = (ی ع + ۴ ۱/۲)/(۲ + ۳ی)

جواب
ل = ۶
ی = ۱
ع = ۳

(۱۲) ۳/ل − ۴/۵ى + ۱/ع = ۲ ۳/۵
۱/۳ل + ۱/۲ى + ۲/ع = ۱۰ ۱/۶
۴/۵ل − ۱/۲ى + ۴/ع = ۱۶ ۱/۱۰

جواب ل = ۱/۲
ى = ۱/۳
ع = ۱/۴

(۱۳) (ل + ع − ۳)/۱۴ + (۴ى − ع + ۵)/۹ = (ل − ۴)/۳
(۵ل − ۶ى + ع)/۷ + (۱۳ل − ى + ع + ۱)/۱۱ = (۲ى + ع − ۵)/۳
(۵ى − ۸ع + ۴)/۱۲ − (ل − ۲ع + ۵)/۹ = ۲ى + ۳ع + ۳ل − ۱۲

جواب ل = ۲۵
ى = ۱۶
ع = ۹

(۱۴) ل + ى + ع = ۰
(ط + ص) ل + (ط + س) ى + (ص + س) ع = ۰
ط ص ل + ط س ى + ص س ع = ۱

جواب ل = ۱ / ((ط − س) × (ص − س))
ى = −۱ / ((ط − ص)(ص − س))
ع = ۱ / ((ط − ص)(ط − س))

(۱۵) ل − ط ى + ط² ع − ط³ = ۰
ل − ص ى + ص² ع − ص³ = ۰
ل − س ى + س² ع − س³ = ۰

جواب ل = ط ص س
ى = ط ص + ط س + ص س
ع = ط + ص + س

(۱۶) ۵ل − ۱۱ √ى + ۱۳ √ع = ۲۲
۴ل + ۶ √ى + ۵ √ع = ۳۱
ل − √ى + ۲/۳ ع = ۲

جواب ل = ۱
ى = ۴
ع = ۲۷

(۱۷) ل ى = ط (ل + ى)
ل ع = ص (ل + ع)
ى ع = س (ى + ع)

جواب ل = ۲ ط ص س / (ط س + ص س − ط ص)
ى = ۲ ط ص س / (ط ص + ص س − ط س)
ع = ۲ ط ص س / (ط ص + ط س − ص س)

(۱۸) ل (ل + ى + ع) = ط²
ى (ل + ى + ع) = ص²
ع (ل + ى + ع) = س²

جواب ل = ط² / √(ط² + ص² + س²)
ى = ص² / √(ط² + ص² + س²)
ع = س² / √(ط² + ص² + س²)

(۱۹) ل (ى + ع) = ط
ى (ل + ع) = ص
ع (ل + ى) = س

جواب ل = √((ط + ص − س)(ط + س − ص) / ۲ (ص + س − ط))
ى = √((ص + س − ط)(ط + ص − س) / ۲ (ط + س − ص))
ع = √((ص + س − ط)(ط + س − ص) / ۲ (ط + ص − س))

(۲۰) ۲√ل + ½ د + ۳ع + ۳√۲ + ع – د ۵ + ل√ ۲ – ۴√ ل + د + ع = ۱۰ جواب ل = ۷، د = ۴، ع = ۵

½√۴ ل + ۲ د + ۱۲ ع – √۲ ل + ۱۰ د – ۲ ع + √۲ ل + ۲ د + ۲ ع = ۳

√۲ ل + د + ۲ ع + ۲ – √ل + ۵ د – ع – ۳ – √ل + د + ع = ۴√۲

(۲۱) ل^۲ د^-۲ ع^-۱ = ۱½ جواب ل = ۱، د = ۲، ع = ۳
ل^۲ د ع^۲ = ۱۸
ل د^۲ ع^۳ = ۱۰۸

(۲۲) ل د ع^-۱ = (۱۰۵)^-۱ جواب ل = ۳، د = ۵، ع = ۷
ل د ع^-۱ = ۳(۳۵)^-۱
ل د ع^-۱ = ۲ ۱/۷

(۲۳) ل^۲ د^۲ ع^۲ = ط، ل^۳ د^۲ ع^۲ = ص، ل^۲ د^۳ ع^۲ = س جواب ل = ²√(ص س / ۸ط)، د = ²√(ط ص / ۸)، ع = ²√(س ط / ص)

(۲۴) ل د ع = ۲۳۱، ل د م = ۴۲۰، د ع م = ۱۵۴۰، ل ع م = ۶۶۰ جواب ل = ۳، د = ۷، ع = ۱۱، م = ۲۰

(۲۵) ل(د + ع)^۲ = ۱ + ط^۲ اور ل + د = ۳/۲ + د ع = ۳/۱۶ جواب د = ¼ – ط/۲ ± ½√(۱–ط)^۲ + ۲ط، ع = ط/۲ – ¼ ± ½√(۱–ط)^۲ + ۱، ل = ط + ۱

(۲۶) ل + ۲د + ۳ع + ۴ر = ۲۷ جواب ل = ۱، د = ۳، ر = ۲، ع = ۴
۳ل + ۵د + ۷ع + ر = ۴۸
۵ل + ۸د + ۱۰ع – ۲ر = ۶۵
۷ل + ۶د + ۵ع + ۴ر = ۵۳

(۲۷) ۷ل – ۲ع + ۳ر = ۱۷ جواب ل = ۲، د = ۴، ع = ۳، و = ۳، ر = ۱
۴د – ۲ع + ر = ۱۱
۵د – ۳و – ۲ر = ۸
۴د – ۳ر + ۲ر = ۹
۳ع + ۸ر = ۳۳

(۱) ۳ل – ۲د + ۵ع = ۱۴
۲ل + د – ۸ع = ۱۰
۸ل – ۳د + ۲ع = ۳۸

(۲) ۳ل – ۲د + ۵ع = ۱۴
۶ل – ۴د – ۳ع = ۱۵
۹ل – ۶د – ۲ع = ۲۰
یہ مساوات غیر متعین ہیں

(۳) ۲ل – د + ۲ع = ۸
۴د – ۱۳ + ل/۲ = ۴ل – ۱ + ۲ع
ل/۴ + ع – د + ½ = ۵ع/۶

(۱) ۵ل^۲ – ۱۲ل + ۲ = ۱۱ جواب ل = ۳ یا – ۳/۵ (۲) ل^۲ = ۵ل + ۶۰۰۰ جواب ل = ۸۰ یا – ۷۵

(۳) ۳ل^۲ – ۵۲ل + ۳۴ = ۰ جواب ل = ۱۷ یا ۲/۳ (۴) ۲۵ل^۲ – ۱۲۵ل = ۱۰۰۰ جواب ل = ۵ یا – ۴/۵

(۵) ۱۱۰ل^۲ – ۲۱ل + ۱ = ۰ جواب ل = ۱/۱۰ یا ۱/۱۱ (۶) ۷۸۰ل^۲ – ۳۷ل + ۱ = ۰ جواب ل = ۱/۳۰ یا ۱/۲۶

(۷) ۱۲۵ل^۲ – ۷ل = ۱۷ ¼ جواب ل = ۲/۵ یا – ۳۴/۱۲۵ (۸) (ل+۱)/(ل–۱) – (ل–۱)/(ل+۱) = ۱ جواب ل = ۲ ± √۵

(۹) (ل+۲)/(ل–۱) – (ل–۴)/۲ل = ۲ ⅛ جواب ل = ۳ یا – ۴/۵ (۱۰) ۳/(ل–۳) + ۲/(ل–۲) = ۵ جواب ل = ۲ ± ۱/۱۰ √۱۰

(۱۱) ۴(ل–۱) – (ل–۱)/۲ل = ۳ ¾ جواب ل = ۲ یا ۱/۱۶ (۱۲) (ل–۱)/(ل+۲) + (ل+۱)/ل = ۲ ⅙ جواب ل = ۲ یا – ۳

(۱۳) ۱/(ل–۱) – ۱/(ل+۳) = ۱/۳۵ جواب ل = ۱۱ یا – ۱۳ (۱۴) (۲ل–۱)/(۲ل+۱) + ۱۳/۱۱ = (۳ل+۵)/(۳ل–۵) جواب ل = ۵ یا – ۱/۶

(۱۵) ۱۲/(ل–۵) + ۸/(ل–۴) = ۳۲/(ل+۲) جواب ل = ۴/۱۳ یا ۸ (۱۶) ⅓ + ۱/(ل+۳) – ۱/(ل+۲) = ۰ جواب ل = –۲ ± ½√۱۲

(۱۷) (ل^۲ + ۲ل + ۶)/(ل^۲ + ل – ۴) = ل^۲ + ۲ل + ۱۵ ل = ۲ یا – ۲ ۷/۱۳

(۱۸) ۲ √(۳لا+۷) = ۹ + √(۲لا − ۳) جواب لا = ۱۴ یا ۲ ۱۲/۲۵

(۱۹) √(لا² + ½ √(لا² + ۱۴۴)) = لا + ۱ لا = ۱۰ یا −۱۱ ۱/۱۵

(۲۰) √((لا − ۱)(لا − ۲)) + √((لا − ۳)(لا − ۴)) = √۲ لا = ۳ یا ۴

(۲۱) لا² + √(لا² − ۵) = ۱۱ جواب لا = ± ۳ (۲۲) لا + ۲ − ۶/(لا + ۲) = ۱ جواب لا = ۱ یا −۴

(۲۳) لا² + لا + ۱ = ۴۲/(لا² + لا) جواب لا = ۲ یا −۳ (۲۴) ۹لا² + ۲لا √(۹لا + ۴) = ۱۵ لا − ۴ جواب لا = ۱ ۱/۳ یا −۱/۳ وغیرہ

(۲۵) لا² − لا + ۳ √(۲لا² − ۳لا + ۲) = لا/۲ + ۷/۲ لا = ۲ یا −۱/۲

(۲۶) لا (√(لا + ۱))² = ۱۰۲ (لا + √لا) − ۷۶ ۲۵ لا = ۹ یا ۴ یا وغیرہ

(۲۷) (۹ + ۵√۳) لا² − (۱۵ + ۷√۳) لا + ۶ = ۰ جواب لا = ۲ − √۳ یا ۲ − √۳

(۲۸) ۵ √(۲۴ + ۳لا) − ½ √(۹۵ − ۲/۳) − ۵۵ = ۸۱ جواب لا = ۹ ۱/۳

(۲۹) ۳ √(ط² − لا²)/(لا + ۲) = (۱ ۱/۲ + ۳ √(لا − ۲لا))/(۱ ۱/۲ √(لا − ۳)) لا = ۴ یا ۱/۲۵

(۳۰) ۱/(لا² + ۱۱لا − ۸) + ۱/(لا² + ۲لا − ۸) + ۱/(لا² − ۱۳لا − ۸) = ۰ جواب لا = ± ۸ یا ± ۱

(۳۱) لا²/ط² + لا/ص = ۲ ط²/ص² جواب لا = ط²/ص یا − ۲ط²/ص

(۳۲) ۲لا (ط − لا)/(۳ط − ۲لا) = ط/۴ لا = ۳ط/۴ یا ط/۲

(۳۳) (ن لا + ص)/√لا = (ن ط + ص)/√ط لا = ط یا ص²/ن²ط²

(۳۴) √(ط + لا) + √(ط − لا) = ۱۲ط/(۵ √(ط + لا)) لا = ۴ط/۵ یا ۳ص/۵

(۳۵) (ط + لا)/√(ط − لا) + (ط − لا)/√(ط + لا) = ۲ √ط لا = ± ط √(۲ √۲ − ۱۱)

(۳۶) ط لا + ۲ √(لا² ط + ن لا + ن²) = ن (۲لا − ۱) لا = ن/(۹ − ۱) یا ن/(ط − ۹ ن)

(۳۷) لا + √(لا² − ط لا + ص²) = لا²/ط + ص لا = ط یا ص/۲ (۱ ± √(۵ − ۸ص/ط))

(۳۸) (لا/(لا − ۱))² + (لا/(لا + ۱))² = ن (ن − ۱) لا = ± √(ن/(ن − ۲)) یا ± √((ن − ۱)/(ن + ۱))

(۳۹) ۲لا/۳ + لا²/۸ط = √(لا²/۲ط + لا²/۴) − ط/۲ لا = ۶ط یا −۲ط/۳

(۴۰) (لا + ۲)² − ۴ ۳/۲ = ۳ ۴ ۳/۲ لا لا = ۲ ± ۲ √۳ (۲

(۴۱) ط + لا + √(۲ ط لا + لا²) = (۳لا² − ۶ط لا)/(۴ √(۲ط لا + لا²)) جواب لا = ۸ط/۵ یا (۲/۲ √(۳ − ۱)) ۲ط

(۴۲) $\left(لا - \frac{ط ص}{لا}\right)^2 = \frac{ط}{۲}(ط + ص)\left(۱ + \frac{ط^2}{۲ لا^2}\right)$ — لا = $\sqrt{۲ ط ص + ط^2}$ یا $\frac{ط}{۲}$(ص − ط)

(۴۳) م ق $لا^2$ − م ن لا + ن ق لا − ن ب = ۰ — لا = $\frac{ن}{ق}$ یا − $\frac{ب}{م}$

(۴۴) $\sqrt{لا + \sqrt{۲ لا - ۱}} - \sqrt{لا - \sqrt{۲ لا - ۱}} = \frac{۲}{۵}\sqrt{\frac{۱۰ لا}{لا + \sqrt{۲ لا - ۱}}}$ — لا = ۲ $\frac{۱}{۲}$ یا $\frac{۵}{۸}$

(۴۵) $(لا - ط)^2 + ۲\sqrt{لا}$ (لا − ط) = $ط^2 + \sqrt{لا}$ — لا = ۲ ط + $\frac{۱}{۴}$ ± $\frac{۱}{۴}\sqrt{۲ ط - ۱۱}$

(۴۶) $لا^2$ (ط + لا) + ص لا (ط + لا) = ص − (لا + ۲ ص) — لا = − ص یا ± $\sqrt{\frac{ط^2}{۴} - ۱}$ − ۱ − $\frac{ط}{۲}$

(۴۷) $\sqrt{ط + لا} + \sqrt{ط - لا}$ = ص — لا = ± $\sqrt{ط^2 - (ص^2 \pm ص\sqrt{...})}$

(۴۸) $\sqrt{۲ لا^2 - ۱} + \sqrt{۱ - ط^2}\,\sqrt{۱ - لا^2}$ = ط لا — لا = $\left(\frac{۵ ط^2 - ۹ \pm ۲ ط\sqrt{۲(۱ - ط^2)}}{۸ ط^2 - ۹}\right)^{\frac{۱}{۲}}$

(۴۹) ۳ $لا^2$ − لا − ۲ لا × $\sqrt{۱ - لا^2}$ = ۱ $\frac{۱}{۲}$ صفحہ ۲۰۵ مین اسکا حل ہی — لا = ± $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$

(۵۰) $\frac{(۱ + لا)^2}{۱ + لا^2} + \frac{(۱ - لا)^2}{۱ - لا^2}$ = ط — لا = $\left(\frac{ط}{۲} - \frac{۱}{۲} \pm \sqrt{\frac{۴}{ط^2} - \frac{۳}{۴}}\right)^{\frac{۱}{۲}}$

(۵۱) $\frac{۱ + لا^3}{(۱ + لا)^3} + \frac{۱ - لا^3}{(۱ - لا)^3}$ = ط — لا = $\left(\frac{ط + ۴ \pm ۲\sqrt{۳(ط + ۱)}}{ط - ۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}$

(۵۲) ۱۶ $(لا^2 + ۲)^{\frac{۳}{۲}} + \frac{۳}{\sqrt{لا^2 + ۲}}$ = ۲ ۳ $لا^2$ + ۸ ۴ — لا = ± $\frac{۱}{۲}$

(۵۳) $(لا + ۳)^2 - ۲ (لا^2 + ۳) = ۲ لا (لا + ۱)^2$ — لا = ۱ یا − ۳ یا − $\frac{۱}{۲}$

(۵۴) $\sqrt{ط + ۱}\,\sqrt{۱ - لا} - \sqrt{۱ - ط}\,\sqrt{۱ + لا}$ = ۲ ط — لا = ط (۳ − ۴ $ط^2$) یا − ط

(۵۵) (۱ − لا) $\sqrt{لا^2 + لا}$ − (۱ + لا) $\sqrt{لا^2 - لا} = \frac{۲ + ۲\sqrt{لا^2 - ۱}}{ط}$ جواب لا = $\left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{ط} \pm \sqrt{\frac{۱}{ط} - \frac{۱}{۷}}\right)^{\frac{۱}{۲}}$

(۵۶) $\frac{\sqrt{لا^2 + ۱} - \sqrt{لا^2 + ۱}...}{\sqrt{ط^2 + ۱} - \sqrt{لا^2 + ۱}}$ = ط جواب لا = $\frac{۱}{ط}$ یا $\frac{۱ - ۳ ط^2}{ط^2 - ۳}$ (۵۷) (ط + لا) $\sqrt{ط^2 + لا^2}$ = ۹ (لا − ط)^2 جواب لا = $\frac{ط}{۵}$ (۹ ± ۴ $\sqrt{۲}$)

(۵۸) $\frac{\sqrt{لا^2 - ۲ لا ط} - ط}{\sqrt{لا^2 - ۲ لا ط} + ط} = \frac{لا}{لا - ط}$ جواب لا = ۵ یا $\frac{ط}{۵}$ (۵۹) $\sqrt{لا^2 + ۱} - \sqrt{لا^2 - ۱} = \frac{لا}{\sqrt{لا^2 - ۱}}$ جواب لا = ± $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$

(۶۰) ن $\sqrt{ط^2 + لا^2}$ + (ن − ۱) $\sqrt{لا^2 - ط^2}$ = ۲ (ن − ۱) $ط^2$ = ۲ ن − ۱ — لا = $\sqrt{(ن \pm (ن - ۱))\sqrt{...}}$

(۶۱) $\frac{ن ط + ط ق \frac{ن - ۱}{۲} م ط}{م ن + ۱}$ = ن جواب ن = $\left(\frac{۱}{م} - \frac{۱}{۲}\right) + \left(\frac{ق}{ط} + \frac{۱}{۲}\right) - \frac{۱}{۲} \pm \sqrt{\left(\frac{۱}{م} - \frac{۱}{۲}\right)^2 + \left(\frac{ق}{ط} + \frac{۱}{۲}\right)\frac{۱}{۴}}$

(۶۲) $(۱ + لا + ۲ لا)^2 = \frac{۱ + ط}{۱ - ط}$ $(۱ + لا^2 + لا^4)$ ضمیمہ مین اسکا حل ہی — لا = $\frac{ط}{۲} \pm \sqrt{۱ - \frac{ط}{۴}}$

(۶۳) ط + لا + $\sqrt{۲ ط لا + لا^2}$ = $\sqrt{ط لا - لا^2} + \sqrt{۲ ط^2 - ط لا - لا^2}$ اسکا حل ضمیمہ مین ہی — لا = (۱ ± $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}$) $\frac{ط}{۲}$

(۶۴) $\frac{\sqrt{ط^2 - لا^2} - لا}{لا + \sqrt{لا^2 - ط^2}} = \sqrt{\frac{لا^2 - ط^2}{لا^2 + ط لا}}$ ... جواب لا = ± $\sqrt{\frac{ط}{۲}}$ ($\frac{۱ + ط^2}{۲ + ط^2}$ ± ط)$^{\frac{۱}{۲}}$

یہ مساوات ضمیمہ مین حل کی گئی ہی

(۶۵) $\frac{۲ لا + \sqrt{۲(۱ + لا)}}{لا - ۱}$ = ط + $\frac{۱}{ط}$ — لا = $\frac{ط^2 + ۱/ط^2}{۲(\sqrt{ط} + ۱/\sqrt{ط})^2}$

(۶۶) (ط+ص) √(ط² + ص² + لا²) − (ط−ص) √(ط² + ص² − لا²) = ط² + ص² جواب لا = √(۳/۲) (ص² ± ط²) − ط ص

(۶۷) (۱/ط لا) ((ط² + لا²)/ط)² + ۱/۲ (ط لا/ط)² = (ط + لا)²/۶ — لا = (۲ ± √۳) ط

(۶۸) √((ص² + س²)(ط² + لا²)) = ن (ط س + ص لا) — لا = (ص/س) · (س × ۱ − ن² ∓ √(ن² − ۱)) / (ص ± √(ن² − ۱) × ص)

(۶۹) لا³ − ۱ = ط + ط/لا² — لا = √(۱/۲ ± √(ط + ۱/۴))

(۷۰) ⁵√((ط + لا)²) + ⁵√((ط − لا)²) = ۳ ⁵√(ط² − لا²) — لا = ((۳ ± √۵)⁵ − ۲⁵) / ((۳ ± √۵)⁵ + ۲⁵) × ط

(۷۱) (۲۷ ط + ۸ لا)^(۲/۳) / ۱۵ لا^(۱/۵) + ۸ لا^(۱/۱۵) / ³√(۲۷ ط + ۸ لا) = ۸ / ⁵√لا — لا = (۳ ط / ۳۲) (۳ ± √۲۱)

(۷۲) ط² ص² لا^(ق/ن) − ۴ (ط ص)^(۳/۲) × لا^(ف+ق)/ن = (ط − ص) لا^(ف/ن) — لا = (√(۱/ص) + √(۱/ط))^(ن/(ف−ق))

(۷۳) √(لا^((ف+ق)/ن)) − ۱/۲ · (ط² − ص²)/(ط² + ص²) (√لا^(ف) + √لا^(ق)) = ۰ — لا = ((ط ± ص)/(ط ∓ ص))^(۲ن/(ق−ف))

(۷۴) (ط⁴ + ۱)(۱/لا² − ۱)² = ۲ (لا + ۱) — لا = ((ط² ± ۱)/(ط² ∓ ۱))²

(۷۵) ᵐ√((۱ + لا)²) − ᵐ√((۱ − لا)²) = ᵐ√(۱ − لا²) یہ مساوات ضمیمہ میں حل کی گئی صفحہ ۱۴۷ مساوات (۱۶) — لا = ((۱ ± √۵)ᵐ − ۲ᵐ) / ((۱ ± √۵)ᵐ + ۲ᵐ)

(۷۶) لا − ۱ = ۲ + √(۲/لا) مساوات تو نین اس کا حل ہے صفحہ ۱۳۱ (۱۱) مساوات — لا = ۴ یا ۱

(۷۷) لا² − ۳ لا = ۲ ضمیمہ میں اس کا حل ہی صفحہ ۱۴۷ مساوات (۹) — لا = ۲ یا − ۱

(۷۸) لا² − ۲/۳ لا = ۱ − ۴/۹ ایضاً صفحہ ۱۴۷ مساوات (۱۰) — لا = − ۲/۳ یا (۱ ± √۱۰)/۳

(۷۹) لا − ۳ = (۳ + ۴ √لا)/لا مساوات تو نین اس کا حل ہی صفحہ ۱۳۱ (۱۳) مساوات — لا = (۷ ± √۱۳)/۲

(۸۰) لا² + ۱/لا² + لا + ۱/لا = ۴ مساوات تو نین اس کا حل ہی صفحہ ۱۳۴ (۱۴) مساوات — لا = ۱ یا (−۳ ± √۵)/۲

(۸۱) لا² − ۸ (لا + ۱) √لا + ۱۸ لا + ۱ = ۰ — لا = ۷ ± ۴ √۳

(۸۲) ۱/۳ لا² (لا² + ۳) = ۲۰ + ۵ ۱/۳ × لا — لا = ۳ یا − ۲

(۸۳) لا + ۷ لا^(۱/۲) = ۲۲ مساوات تو نین اس کا حل ہی صفحہ ۱۳۵ کی (۱۸) مساوات — لا = ۸ یا (−۱ ± √−۱۰)²

(۸۴) (لا + ۳)² − ۲ (لا² + ۳) = ۲ لا (لا + ۱)² — لا = ۱ یا − ۳ یا − ۱/۲

(۸۵) √لا − ۶/لا = ۷/(√لا − ۲) — لا = ۱ یا ۱۴

(۸۶) لا² (لا² − ۲۳) − ۱۰ لا (لا² − ۲۴) = ۶۴۹ — لا = ۱/۲ (۵ ± ۳ √۲۹)

(۸۷) ۲ لا^(۵/۳) (لا^(۴/۳) + ۳/۲)² = ۲ لا² (لا + ۲ ط) + ط² (لا − ط) — لا = ط/۲ یا − ط

(۸۸) لا² − ۷ = √(لا² − ۲ لا + ۸۹) — لا = ۴ یا − ۵

(۸۹) (لا² − ۵)² = (لا − ۳)² + (لا + ۱)² — لا = ۳ یا − ۱ یا ۱ ± √۶ − ۱

(۹۰) $\frac{لا}{۲} + \frac{۶۳}{لا^۲} = \frac{۲۲۰}{\sqrt{لا}} + ۴۹\sqrt{لا} - ۱۱۹$ ‏ لا = ۱ یا ۴ یا $\frac{۱}{۱۶}(۱۷ \pm \sqrt{۲۸۷})$

(۹۱) $\frac{۱ + لا^۳}{(۱+لا)^۳} = ط$ ‏ $لا = \frac{۱ + ۲ط \pm ۲\sqrt{۲ط - ۳}}{۲(ط-۱)}$

(۹۲) $\frac{۱ + لا^۴}{(۱+لا)^۴} = ط$ ضمیمہ مین حل کی گئی ہی ‏ $لا = ن \pm \sqrt{ن^۲ - ۱}$ اور اسمین $ن = \frac{ط + ۲\sqrt{۲(ط+۱)}}{۲(ط-۱)}$

(۹۳) $\frac{۱ + لا^۵}{(۱+لا)^۵} = ط$ ‏ $لا = \frac{\sqrt{۴ط+۱}(\sqrt{۵} + \sqrt{۴ط+۱}) \pm \left\{۱۰(۴ط-۱) + ۲\sqrt{۵}(۴ط+۱)^{\frac{۳}{۲}}\right\}^{\frac{۱}{۲}}}{۴(ط-۱)}$

(۹۴) $\sqrt{لا} + \sqrt{لا^۲} = لا - ۱ + ۳\sqrt{لا}$ ‏ لا = $\frac{۱}{۴}$ یا $\frac{۳۱ \pm ۵\sqrt{۳۷}}{۱۸}$ ہے

(۹۵) $لا - ۲\sqrt{لا + ۲} = ۱ + \sqrt{لا^۲ - ۳لا + ۲}$ یہ ضمیمہ مین حل ہوئی ہے ‏ $لا = \frac{۱}{۲}(۳ \pm \sqrt{۱۳})$ یا $۴ \pm ۹\sqrt{۴}$

(۹۶) $۲لا\sqrt{۱ - لا^۲} = ط(۱ + لا^۲)$ ضمیمہ مین حل کی گئی ہی ‏ $لا = \pm \frac{۱}{ط}\left(\sqrt{۱ - \sqrt{۱ - ط^۲}} \pm \sqrt{۲(۱ \mp \sqrt{۱ - ط^۲})}\right)$

(۹۷) $\left(لا - \frac{۱}{۳}\right)^۲ - \frac{۵}{۹} = \frac{۳ + لا^۲ + \frac{۲}{۹}}{۲(لا - \frac{۱}{۳}) + \sqrt{لا(لا - \frac{۵}{۳})}}$ ضمیمہ مین اسکا حل ہے ‏ لا = ۳ یا $-\frac{۱}{۳}$ یا $\frac{۲}{۳}(۲ \pm \sqrt{۱۳})$

(۹۸) $\frac{(ن-۱)(لا^۴ + ط^۲لا^۲ + ط^۴)}{(ن+۱)(لا^۴ - ط^۲لا^۲ - ط^۴)} = \left(۲ - \frac{۱}{ن}\right)\left(\frac{طلا}{ط^۲ - لا^۲}\right)$ ضمیمہ کو دیکھو اوسمین حل ہے

(۹۹) $(ط - س لا)^۲ + \frac{۱ + لا^۲}{۱ - لا^۲}\left(\frac{ط - س لا}{۱ - لا^۲}\right)^۲ + \frac{ط^۲ - ص^۲}{۱ - لا^۲} + \sqrt{(ط - س لا)\ طلا^۲ - ص^۲ - ۲لا} = ۰$

یہہ مساوات ضمیمہ مین حل کی گئی ہی اور قیمت اسکی یعنی $لا = \frac{ط \mp ص}{س \pm ط}$

(۱۰۰) $(۱ - لا)\sqrt{ط\left(۱ + \frac{۱}{لا}\right) - ۲} = \sqrt{لا + ۱} + \sqrt{س لا - ۱}$ ضمیمہ کو دیکھو اوسمین اسکو حل کیا ہی ‏ $لا = \frac{\pm\sqrt{ط + ۱} - ۱}{\pm\sqrt{ط - ۱} + ۱}$

مساوات دو مجہولوں کی

(۱) $لا^۲ - لا ی = ۱۰$ ‏ $(لا - ی)^۲ = ۴$ ‏ لا = ± ۵ ‏ ی = ± ۳

(۲) $لا^۲ + ی^۲ = ۱۳$ ‏ لا + ی = ۵ ‏ لا = ۲ یا ۳ ‏ ی = ۳ یا ۲

(۳) $لا^۲ - ی^۲ = ۹$ ‏ $لا ی - ی^۲ = ۴$ ‏ لا = ± ۵ ‏ ی = ± ۴

(۴) $۲لا^۲ + ۳لا ی = ۲۶$ ‏ $۳ی^۲ + ۲لا ی = ۳۹$ ‏ لا = ± ۲ ‏ ی = ± ۳

(۵) $لا ی + لا ی^۲ = ۱۲$ ‏ $لا + لا ی^۳ = ۱۸$ ‏ لا = ۲ یا ۱۶ ‏ ی = ۲ یا $\frac{۱}{۲}$

(۶) $لا^۲ - لا ی = ۷۲$ ‏ $لا ی - ی^۲ = ۸$ ‏ لا = ± ۱۲ یا ± $۱۲\frac{۳}{۴}$ ‏ ی = ± ۴ یا ± $\frac{۱}{۴}$

(۷) $۲ی - ۳لا = ۳لا^۲ + ۲(ی - ۱۱)^۲ = ۱۴$ ‏ لا = ۲ یا $\frac{۱}{۵}$ اور ی = ۱۰ یا ۸$\frac{۴}{۵}$

(۸) $۲ی + ۳لا = ۸$ ‏ $۳ی^۲ + ۲لا^۲ = ۱۱$ ‏ لا = ۲ یا $\frac{۴۲}{۳۵}$ ‏ ی = ۱ یا $\frac{۲۹}{۳۵}$

(۹) $لا^۲ + لا ی + ۴ی^۲ = ۶$ ‏ $۳لا^۲ + ۸ی^۲ = ۱۴$ ‏ لا = ± ۲ یا ± $\frac{۱}{۵}\sqrt{۱۰}$ ‏ ی = ± $\frac{۱}{۲}$ یا ∓ $\frac{۲}{۵}\sqrt{۱۰}$

(۱۰) $۲لا^۲ + ۳لا ی + ی^۲ = ۲۰$ ‏ $۵لا^۲ + ۷ی^۲ = ۴۱$ ‏ جواب لا = ± ۱ ‏ ی = ± ۳

(۱۱) $لا - ی = ۱$ ‏ $ی^۲ + ۱ + ی + ب لا = ۰$ ‏ جواب ی = - ب یا - ۱ ‏ لا = ۱ - ب

(۱۲) $لا^{\frac{۱}{۳}} + ی^{\frac{۱}{۳}} = ۳$ ‏ لا + ی = ۹ ‏ جواب لا = ۸ ‏ ی = ۱

(۱۳) لا + ی = ۵ ‏ $(لا^۲ + ی^۲)(لا^۳ + ی^۳) = ۴۵۵$ ‏ جواب لا = ۳ ‏ ی = ۲

(۱۴) $\sqrt{\frac{لا}{ی}} + \sqrt{\frac{ی}{لا}} = \frac{۶۱}{\sqrt{لا ی}} + ۱$ ‏ $\sqrt[۴]{لا^۳ ی} + \sqrt[۴]{لا ی^۳} = ۷۸$ ‏ جواب $لا^۴ = ۸۱$ ‏ $ی^۴ = ۱۶$

(۱۵) $لا^۲ + ی^۲ = ۶۴۱$ ‏ $لا^۳ ی + ی^۳ لا = ۲۹۰$ ‏ جواب لا = ۵ ‏ ی = ۲

(۱۶) لا − ی = ۸ ، لا^۴ − ی^۴ = ۱۴۵۶۰ ضمیر دیکھو — جواب لا = ۱۱ ، ی = ۳

(۱۷) لا + ی = ط ، لا^۴ + ی^۴ = ۱۴ لا^۲ ی^۲ — جواب لا = ط/۲ (۱ + √۳ ±) ، ی = ط/۲ (۱ + √۳ ±)

(۱۸) ۵√(لا + ی)/لا + ۵√(لا + ی)/ی = ۱۰ ۲/۳ ؛ ۳√(لا − ی)/لا − ۳√(لا − ی)/ی = ۴/۵ — جواب لا = ۲ ۱/۴ ، ی = ۱ ۱/۴

(۱۹) لا ع = ی^۲ اور (لا + ع)(ع − لا − ی) = ۳ ؛ (لا + ی + ع)(ع − لا − ی) = ۷ — جواب لا = ۱ یا ۹۰ ، ی = ۲۰ یا −۶ ، ع = ۴

(۲۰) لا + ی + ع = ۲۱۶ اور لا^{۱/۳} + ی^{۱/۳} + ع^{۱/۳} = ۱۲ ؛ ی^{۲/۳} + ع^{۲/۳} = لا^{۲/۳} + ی^{۲/۳} ع^{۱/۳} − ۱۲ — جواب لا = ۱۲۵ ، ی = ۶۴ ، ع = ۲۷

(۲۱) (لا − ۲)^۲ + (ی − ۲)^۲ + (ع − ۱)^۲ = ۲۴ ؛ لا ی + لا ع + ی ع = ۶۳ اور ۲لا + ۳ی + ع = ۳۰ — جواب لا = ۶ ، ی = ۵ ، ع = ۳

(۲۲) لا^۲ + لا ی + ی^۲ = ۳۷ اور لا^۲ + لا ع + ع^۲ = ۲۸ ؛ ی^۲ + ی ع + ع^۲ = ۱۹ — جواب لا = ۴ ، ی = ۳ ، ع = ۲

(۲۳) لا^۲ + ی^۲ + لا ی (لا + ی) = ۱۳ ؛ (لا^۲ + ی^۲) لا^۲ ی^۲ = ۴۶۸ — جواب لا = ۳ یا −۲ ، ی = −۲ یا ۳

(۲۴) ی/لا − لا/(لا + ی) = (لا^۲ − ی^۲)/ی ؛ لا/ی − (لا + ی)/لا = ی/لا — جواب لا = −۱/۹ ، ی = −۱/۱۸

(۲۵) لا/ی − ی/لا = (لا + ی)/(لا^۲ + ی^۲) ؛ لا^۲/ی^۲ − ی^۲/لا^۲ = (لا − ی)/ی^۲ — جواب لا = ۱/۴ {۱ ± √۲}^۲ ، ی = ۱/۴

(۲۶) (لا − √(لا^۲ − ی^۲)) / (لا + √(لا^۲ − ی^۲)) = لا اور لا/ی = √((لا + ۱)/(ی − ۱)) — جواب لا = ۱/۴ ، ی = ۱/۵

(۲۷) لا^۲ − ۶√(لا^۲ ی) = ۲۷ ؛ لا − ۲√(لا ی) = ۳ — جواب لا = ۹ ، ی = ۱

(۲۸) (لا + ی)^۲ = لا^۴ + لا^۲ ی^۲ + ی^۴ ؛ (لا^۴ + ۴ی^۴) = ۴ لا ی (۲ی^۲ − لا^۲) — جواب لا = √((۸ ± ۲√۳)/۱۳) ، ی = √((۱۱ ∓ ۶√۳)/۱۳)

(۲۹) لا + √(لا^۲ − ی^۲) = ۸/ی (√(لا + ی) + √(لا − ی)) ؛ (لا + ی)^{۳/۲} − (لا − ی)^{۳/۲} = ۲۶ — جواب لا = ۵ ، ی = ۴

(۳۰) ل + ۴√(ل۲ − ی۲) = ۹/ی۴ (√(ل+ی) + √(ل−ی)) — جواب ل = ۳(۹+۱)^(۱/۲) / ۲√۲ ×

۴√(ل+ی) + √(ل−ی) = ی — ی = ۱√(۲/(۹+۱)) {(۱۲/(۱+۹))۲ + ۱}

(۳۱) ل۲ − ی۲ = ۱۷ ط ی + ۳ ی۲ + ۴ ل √(۲ ط ی − ی۲) — جواب ل = ۷ ط ، ی = ط

ل۲ + ی۲ = ۲ ط ی + ۸ √ی . (ل √(ط − ی) √ی)

(۳۲) ل − √(ل۲ − ی۲) = ط/ی (√(ل+ل) + √(ل+ی) + √(ل−ی)) — جواب ل = (ص + ۲ ط) / √۳ ۴ ط

(۳۳) (ل + ی − √(ل۲+ی۲)) / (ل + ی + √(ل۲+ی۲)) = ۲ ل / ط ، اور (ل+ی)^(۳/۲) − (ل−ی)^(۳/۲) = ص — ی = ۲√(۴ ط) √((ص − ط)/۳)

ل/ی = √((ط + ل)/(ط − ی))

(۳۴) ل + √(ل ی) + ی + √ل + √(ل ی) + √ی = ۲۱۰ — جواب ل = ط (−۱۱ ± √۱۵۳) / ۱۶

ل − √(ل ی) + ی + √ل − √(ل ی) + √ی = ۱۲۶ — ی = ط (۱۳ ∓ √۱۵۳) / ۸

جواب ل = ۱۴۴ یا ۹ ، ی = ۹ یا ۱۴۴

(۳۵) √ل − √ی = √(ی + ۲) — جواب ل = ۴ ، ی = ۱/۴

ل + ۸ = ۸ √(ی + ۲)

(۳۶) ل۴ + ی۴ = ۱ + ۲ ل ی + ۳ ل۲ ی۲ — جواب ل = ۲ ، ی = ۱

ل۳ + ی۳ = ۲ ی۲ ل + ی۲ + ل + ۱

(۳۷) ل۲ + ی۲ = ۳ ل ی — جواب ل = ۳√۱۰ / ۲√۵ (√۵ − ۱) ، ی = ۳√۱۰ / ۲√۵ (√۵ + ۱)

ل۵ + ی۵ = ۲

(۳۸) ل۲ − ل ی = ۱۶ ، اور ل۲ + ی۲ = ۶۱ — جواب ل = ۶ ، ی = ۵

(۳۹) ل^(ل+ی) = ی^(۴ ط) — جواب ل = ۱/۲ (۱۴ + ۱ ± √(۱۸ + ۱)) — دیکھو ضمیمہ

ی^(ل+ی) = ل^ط — ی = ۱/۲ (−۱ ± √(۱۸ + ۱))

(۴۰) (√ل)^(√ل + ۴√ی) = (√ی)^(۸/۳) — جواب ل = {−۱/۲ ± ۱/۴ √۵۷}^۸

(√ی)^(√ل + ۴√ی) = (√ل)^(۲/۳) — ی = {(−۱/۲ ± ۱/۴ √۵۷)}^۴

(۴۱) ۵ ط ل + ۱۲ ی (ط − ل) = ۰ — جواب ل = ۴ ط/۳ اور ی = ۵ ط/۳

ل۲ − ی۲ + ط۲ = ۰

(۴۲) ل۴ ی۲ − ۴ = ۴ ل ی۲ − ی۴/۴ — جواب ل = ۱ ، ی = ۲ — دیکھو ضمیمہ

ل۳ − ۳ = ل ی (ل − ی)

(۴۳) $\sqrt{ل+ل^۲ی^۲} + \sqrt{ی^۲+ل^۲ی^۲} = ط$ جواب $ل = \frac{۱}{۸}\left\{\frac{ص^۲}{۲} + \sqrt{\frac{ط^۲}{ص^۲}-\frac{۲}{ص}}\right\}^۲$

$ل+ی+۳\sqrt[۳]{ص\,ل\,ی} = ص$ ؛ $ی = \frac{۱}{۸}\left(\frac{ص^۲}{۲} - \sqrt{\frac{ط^۲}{ص^۲}-\frac{۲}{ص}}\right)^۲$

(۴۴) $(ل^۲+ی^۲)\frac{ی}{ل} = ۸\frac{۲}{۳}$ جواب $ل = ۳$

$(ل^۲-ی^۲)\frac{ل}{ی} = ۷\frac{۱}{۲}$ ؛ $ی = ۲$

(۴۵) $(ل^۲+ی^۲)(ل+ی) = ۱۵ ل$ جواب $ل = ۲$ یا ۴

$(ل^۴+ی^۴)(ل^۲+ی^۲) = ۸۵ ل^۲ی^۲$ ؛ $ی = ۴$ یا ۲

(۴۶) $(ل-۲)(ی-\sqrt{لی})(ی^۲-۱) = ۲ی^۲-ل$ جواب $ل = ۸$ یا ۱۲

$\frac{۲ل}{۴} = \frac{\sqrt{لی}-۱۲}{لی-۱۸}$ ؛ $ی = ۴$ یا ۲

(۴۷) $۵-۲\sqrt{ی+۲} = \frac{۹ل^۲}{۹۴} - (\sqrt{ل}-۳\sqrt{ی})^۲$ جواب $ل = ۴$ ؛ $ی = \frac{۱}{۴}$

$\frac{۲}{ل} - ۱۰\sqrt{\frac{ل}{ی}} = ل - ۱۶$

(۴۸) $\sqrt{ل+ی} + \sqrt{ی-ل} = \frac{لی - ی\,۸\sqrt{ل^۲-ی^۲}}{ط}$ جواب $ل = \frac{۱}{۴}\left\{\frac{ص^۲}{۲} + \sqrt[۳]{\frac{۲ط^۲}{۲ص}}\right\}^۲$

$(ل+ی)^{\frac{۱}{۴}} + (ل-ی)^{\frac{۱}{۴}} = ص$ ؛ $۲+\sqrt{\frac{۲ط^۲}{ل}} = \frac{ص^۲}{۲}\sqrt{\frac{ط}{۲}} + \frac{ط}{ص}$

(۴۹) $(ص+ل)ل+طی = (ل+ی)^۲ - ۲\sqrt{لی}\cdot\sqrt{ط-ل}\cdot\sqrt{ص-ی}$

$\sqrt{ی} + \sqrt{ط-ل} = \sqrt{\frac{ن\,ل}{ی}}$ جواب $ل = ط + \frac{ن-ص}{ص^۲}\left\{ن-ص \pm \sqrt{ط\,ص(ص-۱) + ن(ن-ص)}\right\}^۲$

$ی = ص-ن$

(۵۰) $ل^۲ + ی^۲ = ل + \frac{ط}{۲}$ جواب $ل = \frac{۱}{۲} \pm \frac{۱}{۴}\sqrt{۴ط + ۲ \pm ۲\sqrt{۸ط^۲ - ۴ط - ۸ص + ۱}}$

$ل^۲(ل-۲) + ۴ی^۲ل(ل-۱) + ی^۲ = \frac{ص}{۲} - ل$ ؛ $ی = \pm\frac{۱}{۴}\sqrt{۴ط + ۲ + ۲\sqrt{۸ط^۲ - ۴ط - ۸ص + ۱}}$

(۵۱) $ی\sqrt{(ط-ل)(ل-ص)} + ل\sqrt{(ط-ی)(ص-ی)} =$ جواب $ل = ۲(ط \pm ص) + \sqrt{ص^۲ + ط^۲ \pm ط\,ص}$

$ط\sqrt{(ط-ل)(ط+ی)} + ط\sqrt{(ل-ص)(ص-ی)}$ اور $ص\,ل\,ی = لا$ ؛ $ی = ۲(ص \pm ط) \mp \sqrt{ط^۲ \pm ط\,ص + ص^۲}$

(۵۲) $ل^ن + ی^م = ۲(ص\,ل)^{\frac{ن}{۲}}\cdot(ص\,ی)^{\frac{م}{۲}}$ جواب $ل = \frac{ص\,ن}{م+ن}\left\{\frac{ص^{م}}{ط^{م}}\right\}^{\frac{۱}{م+ن}} \pm \ldots$

$ل^ی = ط\,ص$ ؛ $ی = \frac{ط\,ص\,م}{م+ن}\left\{\ldots\right\}^{\frac{۱}{م+ن}}$

(۵۳) $\frac{\sqrt{ی^۲-۱}+۱}{ی} = \frac{\sqrt{ل+۹}+۳}{\sqrt{ل}}$ جواب $ل = \frac{۳}{۲}(۱۹ \pm \sqrt{۱۰۵})$ دیکھو ضمیمہ

$ل(۱+ی)^۲ = ۲۶\left(ی^۲ + \frac{۱۴}{۹}\right)$ ؛ $ی = \frac{۱}{۴}(۲ \pm \sqrt{۱۰۵})$

(۵۴) $\frac{ی}{۲لا} + \frac{۲}{۳} \times \frac{ی-۱\sqrt{لا-۱}}{ی^۲-۲\sqrt{لا^۲-۱}} = \frac{\sqrt{۱+لا}}{لا}$ ، $\frac{۱}{۴}$ ی^۲ = ی^۲ لا − ۱ — جواب لا = $۱\frac{۱}{۴}$ ، ی = ۲ — دیکھو ضمیمہ

(۵۵) ط (۱ − لا ی) = لا $\sqrt{۱-ی^۲}$ ، $\sqrt{لا}$ (۱ − لا ی) = ی − لا — جواب لا = $\frac{۱}{۲}$ (ط^۲ ± ط $\sqrt{ط^۲+۴}$) دیکھو ضمیمہ

ی = ± ۱ یا ± $\frac{ط^۲-۱}{ط^۲+۱}$ یا $\frac{۲ط}{\sqrt{(ط^۲+۱+ط)(ط^۲-ط+۱)}}$

(۵۶) لا + ی + $\frac{۶۱}{۲}$ $\frac{۱}{لا^۲}$ $\frac{۲}{ی^۲}$ − ۱۰ (۱۴ $(\frac{ی}{لا})^{\frac{۱}{۲}}$ = $\frac{۱۲۰۰}{لا}$

$۳ لا^{\frac{۴}{۳}} + ۱۶ ی^{\frac{۴}{۳}} + ۴۲ (لا ی)^{\frac{۲}{۳}} = ۴ (لا ی)^{\frac{۱}{۳}} \{۵ لا^{\frac{۲}{۳}} + ۱۱ ی^{\frac{۲}{۳}}\}$ — جواب لا = ، ی =

(۵۷) $\frac{لا^{\frac{۱}{۳}}}{ی^{\frac{۱}{۳}}} (۱ - لا^{\frac{۲}{۳}}) + \frac{ی^{\frac{۱}{۳}}}{لا^{\frac{۱}{۳}}} (۱ - ۲ لا^{\frac{۲}{۳}}) = \frac{۴ ی^{\frac{۲}{۳}}}{لا^{\frac{۱}{۳}}} + (\frac{۱}{ی^{\frac{۱}{۳}}} + \frac{۱}{لا^{\frac{۱}{۳}}}) \frac{۳ ی}{لا^{\frac{۲}{۳}}} + ۲$

$\frac{۴ لا^{\frac{۲}{۳}}}{ی^{\frac{۲}{۳}}} - \frac{۲ لا^{\frac{۱}{۳}}}{ی} - \frac{۲ لا^{\frac{۱}{۳}}}{ی^{\frac{۱}{۳}}} = \frac{۱۴۴}{۲۷} \cdot \frac{۱}{\frac{۲}{ی^{\frac{۱}{۳}}}} - \frac{۲}{لا^{\frac{۱}{۳}}} - \frac{ی^{\frac{۱}{۳}}}{لا^{\frac{۱}{۳}}}$ — جواب لا = ۲۷ یا − ۸ ، ی = ۸ یا − ۲۷

(۵۸) ی^۲ = لا^۲ (ط ی − ص لا) ، لا^۲ = ط لا − ص ی — جواب لا = ی = ط − ص یا لا = ط − $\frac{مص}{۲}$ (م ± $\sqrt{م^۲-۴}$)

ی = $\frac{۱}{۲}$ (ط − $\frac{مص}{۲}$ (م ± $\sqrt{م^۲-۴}$)) (م ± $\sqrt{م^۲-۴}$)

جبکہ م = $\frac{۱}{۲ص}$ (ط − ص ± $\sqrt{ط^۲ + ۲ طص + ۵ ص^۲}$)

(۵۹) لا^۲ = م لا + ن ی ، ی^۲ = م ی + ن لا — جواب لا = ی = $\sqrt{م + ن}$

(۶۰) لا^۵ + ی^۵ = لا ی (لا + ی)^۲ ، ی $\sqrt{لا}$ = (لا + ی)$^{\frac{۳}{۲}}$ — دیکھو ضمیمہ جواب لا = $\frac{۵}{۲}$ ∓ $\sqrt{۱۰ ± \frac{۲۲}{۵}\sqrt{۵}}$ ، ی = $\frac{۵}{۲} \sqrt{۲ + \frac{۲}{۵}\sqrt{۵}}$

(۶۱) (لا^۲ + ۱) ی = (ی^۲ + ۱) لا^۳ ، (ی^۲ + ۱) لا = ۹ (لا^۲ + ۱) ی^۲ — دیکھو ضمیمہ جواب لا = $\frac{۱}{۲} \{\sqrt{۳^{\frac{۳}{۲}} + ۲ + ۳} + \sqrt{۳^{\frac{۳}{۲}} - ۱}\}$ ، ی = $\frac{۱}{۲} \{\sqrt{۳} \sqrt{۳ + ۲ ± ۳} \sqrt{۹ - ۱}\}$

(۶۲) (۲ + ۴ لا ی − ۳ لا^۲)^۲ = ۲ − ۴ لا ی^۲ + ۳ ، $۵ ی^۲ + \frac{۲۷ لا^۲}{۳۲} = \frac{۹ لا ی}{۲} + \frac{۲ لا ی + ۱}{لا^۲}$ — جواب لا = ۲ ، ی = ۱ − $\frac{۱}{۴}\sqrt{۶}$ دیکھو ضمیمہ

(۶۳) $\frac{۲ + ۲ لا^۲ - ۴ لا^۴}{۱ - لا^۲}$ = ی^۲ (۱ − ۲ ی^۲) ، (۲ لا^۲ − ۱) (۲ ی^۲ − ۱) = ۳ ضمیمہ میں انکا حل — جواب لا = ± $\frac{۱}{۲}\sqrt{۵ ± \frac{۱}{۲}\sqrt{۱ ± \sqrt{۳۳}}}$ ، ی = $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}$ یا $\frac{۱}{۲}\sqrt{۵ ± \sqrt{۳۳}}$

تمت الکتاب بعون الملک الوہاب